

2005 年福建高考理科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 150 分，考试用时 120 分钟。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷（选择题 共 60 分）

注意事项：

1. 答第 I 卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目涂写在答题卡上。
2. 每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。不能答在试题卷上。

一、选择题 本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 复数 $z = \frac{1}{1-i}$ 的共轭复数是 ()

- A. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ B. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ C. $1-i$ D. $1+i$

2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_7 + a_9 = 16, a_4 = 1$ ，则 a_{12} 的值是 ()

- A. 15 B. 30 C. 31 D. 64

3. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overrightarrow{AB} = (k, 1), \overrightarrow{AC} = (2, 3)$ ，则 k 的值是 ()

- A. 5 B. -5 C. $\frac{3}{2}$ D. $-\frac{3}{2}$

4. 已知直线 m, n 与平面 α, β ，给出下列三个命题：

①若 $m // \alpha, n // \alpha$ ，则 $m // n$;

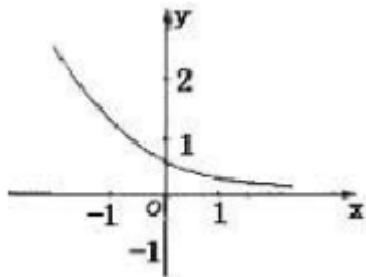
②若 $m // \alpha, n \perp \alpha$ ，则 $n \perp m$;

③若 $m \perp \alpha, m // \beta$ ，则 $\alpha \perp \beta$.

其中真命题的个数是 ()

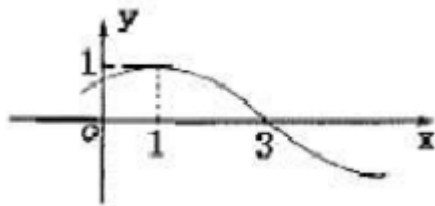
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

5. 函数 $f(x) = a^{x-b}$ 的图象如图，其中 a, b 为常数，则下列结论正确的是 ()



- A. $a > 1, b < 0$
- B. $a > 1, b > 0$
- C. $0 < a < 1, b > 0$
- D. $0 < a < 1, b < 0$

6. 函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ ($x \in \mathbf{R}, \omega > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$) 的部分图象如图, 则 ()

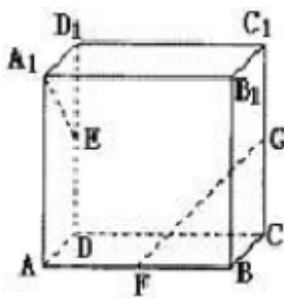


- A. $\omega = \frac{\pi}{2}, \varphi = \frac{\pi}{4}$
- B. $\omega = \frac{\pi}{3}, \varphi = \frac{\pi}{6}$
- C. $\omega = \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{\pi}{4}$
- D. $\omega = \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{5\pi}{4}$

7. 已知 $p: |2x-3| < 1, q: x(x-3) < 0$, 则 p 是 q 的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

8. 如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=AB=2, AD=1$, 点 E, F, G 分别是 DD_1, AB, CC_1 的中点, 则异面直线 A_1E 与 GF 所成的角是 ()



- A. $\arccos \frac{\sqrt{15}}{5}$
- B. $\frac{\pi}{4}$
- C. $\arccos \frac{\sqrt{10}}{5}$
- D. $\frac{\pi}{2}$

9. 从 6 人中选 4 人分别到巴黎、伦敦、悉尼、莫斯科四个城市游览, 要求每个城市有一人游览, 每人只游览一个城市, 且这 6 人中甲、乙两人不去巴黎游览, 则不同的选择方案共有

()

- A. 300 种 B. 240 种 C. 144 种 D. 96 种

10. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两焦点, 以线段 F_1F_2 为边作正三角形 MF_1F_2 , 若边 MF_1 的中点在双曲线上, 则双曲线的离心率是 ()

- A. $4 + 2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{3} - 1$ C. $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$ D. $\sqrt{3} + 1$

11. 设 $a, b \in \mathbf{R}, a^2 + 2b^2 = 6$, 则 $a + b$ 的最小值是 ()

- A. $-2\sqrt{2}$ B. $-\frac{5\sqrt{3}}{3}$ C. -3 D. $-\frac{7}{2}$

12. $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的以 3 为周期的奇函数, 且 $f(2) = 0$ 则方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(0, 6)$ 内解的个数的最小值是 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分, 把答案填在题中横线上。

13. $(2\sqrt{x} - \frac{1}{x})^6$ 展开式中的常数项是 (用数字作答)。

14. 非负实数 x, y 满足 $\begin{cases} 2x + y \leq 0, \\ x + y - 3 \leq 0, \end{cases}$ 则 $x + 3y$ 的最大值为 。

15. 若常数 b 满足 $|b| > 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + b + b^2 + \dots + b^{n-1}}{b^n} =$ 。

16. 把下面不完整的命题补充完整, 并使之成为真命题:

若函数 $f(x) = 3 + \log_2 x$ 的图象与 $g(x)$ 的图象关于 对称, 则函数 $g(x) =$

(注: 填上你认为可以成为真命题的一件情形即可, 不必考虑所有可能的情形)。

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 74 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 12 分)

已知 $-\frac{\pi}{2} < x < 0, \sin x + \cos x = \frac{1}{5}$ 。

(I) 求 $\sin x - \cos x$ 的值;

(II) 求 $\frac{3\sin^2 \frac{x}{2} - 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\tan x + \cot x}$ 的值.

18. (本小题满分 12 分)

甲、乙两人在罚球线投球命中的概率分别为 $\frac{1}{2}$ 与 $\frac{2}{5}$, 投中得 1 分, 投不中得 0 分.

(I) 甲、乙两人在罚球线各投球一次, 求两人得分之和 ξ 的数学期望;

(II) 甲、乙两人在罚球线各投球二次, 求这四次投球中至少一次命中的概率;

19. (本小题满分 12 分)

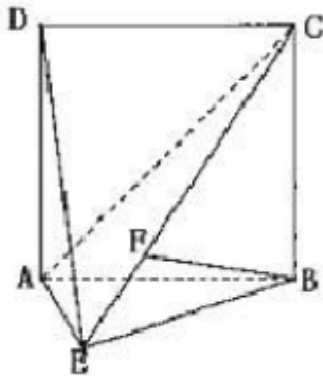
已知函数 $f(x) = \frac{ax-6}{x^2+b}$ 的图象在点 $M(-1, f(1))$ 处的切线方程为 $x+2y+5=0$.

(I) 求函数 $y=f(x)$ 的解析式;

(II) 求函数 $y=f(x)$ 的单调区间.

20. (本小题满分 12 分)

如图, 直二面角 $D-AB-E$ 中, 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, $AE=EB$, F 为 CE 上的点, 且 $BF \perp$ 平面 ACE .



(I) 求证 $AE \perp$ 平面 BCE ;

(II) 求二面角 $B-AC-E$ 的大小;

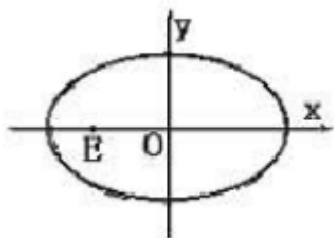
(III) 求点 D 到平面 ACE 的距离.

21. (本小题满分 12 分)

已知方向向量为 $v=(1, \sqrt{3})$ 的直线 l 过点 $(0, -2\sqrt{3})$ 和椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的焦点, 且椭圆 C 的中心关于直线 l 的对称点在椭圆 C 的右准线上.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 是否存在过点 E (-2, 0) 的直线 m 交椭圆 C 于点 M、N, 满足 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \frac{4}{3}\sqrt{6}$
 $\cot \angle MON \neq 0$ (O 为原点). 若存在, 求直线 m 的方程; 若不存在, 请说明理由.



22. (本小题满分 14 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a$, $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$ 我们知道当 a 取不同的值时, 得到不同的数列, 如当

$a=1$ 时, 得到无穷数列: $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \dots$; 当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, 得到有穷数列: $-\frac{1}{2}, -1, 0$.

(I) 求当 a 为何值时 $a_4 = 0$;

(II) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = -1$, $b_{n+1} = \frac{1}{b_n - 1} (n \in N_+)$, 求证 a 取数列 $\{b_n\}$ 中的任一个数, 都可以得到一个有穷数列 $\{a_n\}$;

(III) 若 $\frac{3}{2} < a_n < 2 (n \geq 4)$, 求 a 的取值范围.

参考答案

一、选择题: 本大题考查基本知识和基本运算, 每小题 5 分, 满分 60 分.

1. B 2. A 3. A 4. C 5. D 6. C 7. A 8. D 9. B 10. D 11. C
12. D

二、填空题: 本大题考查基本知识和基本运算, 每小题 4 分, 满分 16 分.

13. 240 14. 9 15. $\frac{1}{b-1}$

16. 如 ①x 轴, $-3 - \log_2 x$ ②y 轴, $3 + \log_2(-x)$
③原点, $-3 - \log_2(x)$ ④直线 $y=x$, $2x-3$

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 74 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. 本小题主要考查三角函数的基本公式、三角恒等变换、三角函数在各象限符号等基本知识, 以及推理和运算能力. 满分 12 分.

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{5}, \text{平方得 } \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{25},$$

解法一: (I) 由

$$\text{即 } 2 \sin x \cos x = -\frac{24}{25}. \quad \because (\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x = \frac{49}{25}.$$

$$\text{又 } \because -\frac{\pi}{2} < x < 0, \therefore \sin x < 0, \cos x > 0, \sin x - \cos x < 0,$$

$$\text{故 } \sin x - \cos x = -\frac{7}{5}.$$

$$(II) \quad \frac{3 \sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\tan x + \cos x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2} - \sin x + 1}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}}$$

$$= \sin x \cos x (2 - \cos x - \sin x)$$

$$= \left(-\frac{12}{25}\right) \times \left(2 - \frac{1}{5}\right) = -\frac{108}{125}$$

$$\text{解法二: (I) 联立方程 } \begin{cases} \sin x + \cos x = \frac{1}{5}, & \text{①} \\ \sin^2 + \cos^2 x = 1. & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{由①得 } \sin x = \frac{1}{5} - \cos x, \text{ 将其代入②, 整理得 } 25 \cos^2 x - 5 \cos x - 12 = 0,$$

$$\therefore \cos x = -\frac{3}{5} \text{ 或 } \cos x = \frac{4}{5}. \quad \because -\frac{\pi}{2} < x < 0, \therefore \begin{cases} \sin x = -\frac{3}{5}, \\ \cos x = \frac{4}{5}. \end{cases}$$

$$\text{故 } \sin x - \cos x = -\frac{7}{5}.$$

$$(II) \quad \frac{3 \sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\tan x + \cot x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2} - \sin x + 1}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}}$$

$$= \sin x \cos x (2 - \cos x - \sin x)$$

$$= \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{4}{5} \times \left(2 - \frac{4}{5} + \frac{3}{5}\right) = -\frac{108}{125}$$

18. 本小题主要考查概率的基本知识, 运用数学知识解决问题的能力, 以及推理和运算能力. 满分 12 分.

解: (I) 依题意, 记“甲投一次命中”为事件 A, “乙投一次命中”为事件 B, 则

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{2}{5}, P(\bar{A}) = \frac{1}{2}, P(\bar{B}) = \frac{3}{5}.$$

甲、乙两人得分之和 ξ 的可能取值为 0、1、2, 则 ξ 概率分布为:

ξ	0	1	2
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$

$$E \xi = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{5} = \frac{9}{10}$$

答: 每人在罚球线各投球一次, 两人得分之和 ξ 的数学期望为 $\frac{9}{10}$.

(II) \because 事件“甲、乙两人在罚球线各投球二次均不命中”的概率为

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{100}$$

\therefore 甲、乙两人在罚球线各投球两次至少有一次命中的概率

$$P = 1 - \bar{P} = 1 - \frac{9}{100} = \frac{91}{100}.$$

答: 甲、乙两人在罚球线各投球二次, 至少有一次命中的概率为 $\frac{91}{100}$.

19. 本小题主要考查函数的单调性, 导数的应用等知识, 考查运用数学知识, 分析问题和解决问题的能力. 满分 12 分.

解: (1) 由函数 $f(x)$ 的图象在点 $M(-1, f(-1))$ 处的切线方程为 $x+2y+5=0$, 知

$$-1 + 2f(-1) + 5 = 0, \text{ 即 } f(-1) = -2, f'(-1) = -\frac{1}{2}.$$

$$\therefore f'(x) = \frac{a(x^2 + b) - 2x(ax - 6)}{(x^2 + b)^2}.$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{-a-b}{1+b} = -2 \\ \frac{a(1+b) + 2(-a-6)}{(1+b)^2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} a = 2b - 4 \\ \frac{a(1+b) + 2(-a-6)}{(1+b)^2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

解得 $a = 2, b = 3$ ($\because b + 1 \neq 0, b = -1$ 舍去).

所以所求的函数解析式是 $f(x) = \frac{2x - 6}{x^2 + 3}$.

$$(II) f'(x) = \frac{-2x^2 + 12x + 6}{(x^2 + 3)^2}.$$

令 $-2x^2 + 12x + 6 = 0$, 解得 $x_1 = 3 - 2\sqrt{3}, x_2 = 3 + 2\sqrt{3}$,

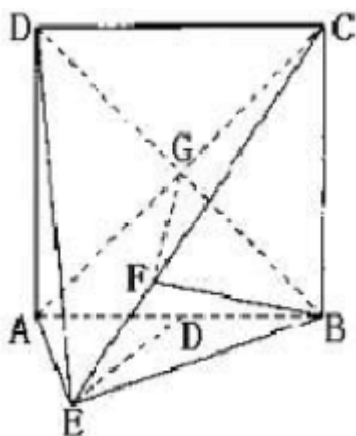
当 $x < 3 - 2\sqrt{3}$, 或 $x > 3 + 2\sqrt{3}$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $3 - 2\sqrt{3} < x < 3 + 2\sqrt{3}$ 时, $f'(x) > 0$.

所以 $f(x) = \frac{2x - 6}{x^2 + 3}$ 在 $(-\infty, 3 - 2\sqrt{3})$ 内是减函数; 在 $(3 - 2\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3})$ 内是增函数;

在 $(3 + 2\sqrt{3}, +\infty)$ 内是减函数.

20. 本小题主要考查直线、直线与平面、二面角及点到平面的距离等基础知识, 考查空间想象能力, 逻辑思维能力与运算能力. 满分 12 分.



解法一: (I) $\because BF \perp$ 平面 ACE. $\therefore BF \perp AE$.

\because 二面角 D—AB—E 为直二面角, 且 $CB \perp AB$, $\therefore CB \perp$ 平面 ABE.

$\therefore CB \perp AE$. $\therefore AE \perp$ 平面 BCE.

(II) 连结 BD 交 AC 于 G, 连结 FG,

\because 正方形 ABCD 边长为 2, $\therefore BG \perp AC$, $BG = \sqrt{2}$,

$\because BF \perp$ 平面 ACE,

由三垂线定理的逆定理得 $FG \perp AC$.

$\therefore \angle BGF$ 是二面角 B—AC—E 的平面角.

由 (I) $AE \perp$ 平面 BCE, 又 $\because AE = EB$,

\therefore 在等腰直角三角形 AEB 中, $BE = \sqrt{2}$.

又 \because 直角 $\triangle BCE$ 中, $EC = \sqrt{BC^2 + BE^2} = \sqrt{6}$,

$$BF = \frac{BC \cdot BE}{EC} = \frac{2 \times \sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{直角} \triangle BFG \text{ 中, } \sin \angle BGF = \frac{BF}{BG} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\therefore \text{二面角 } B-AC-E \text{ 等于 } \arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

(III) 过点 E 作 $EO \perp AB$ 交 AB 于点 O. $OE=1$. \therefore 二面角 D-AB-E 为直二面角,

$\therefore EO \perp$ 平面 ABCD. 设 D 到平面 ACE 的距离为 h,

$$\therefore V_{D-ACE} = V_{E-ACD}, \quad \therefore \frac{1}{3} S_{\triangle ACB} \cdot h = \frac{1}{3} S_{\triangle ACD} \cdot EO.$$

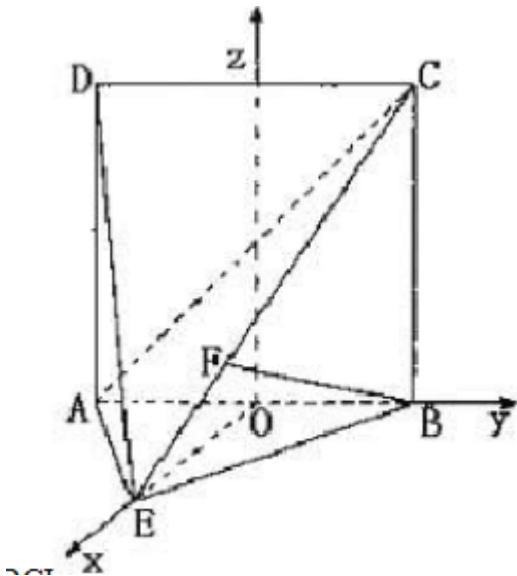
$\therefore AE \perp$ 平面 BCE, $\therefore AE \perp EC$.

$$\therefore h = \frac{\frac{1}{2} AD \cdot DC \cdot EO}{\frac{1}{2} AE \cdot EC} = \frac{\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 1}{\frac{1}{2} \sqrt{2} \times \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\therefore \text{点 D 到平面 ACE 的距离为 } \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

解法二: (I) 同解法一.

(II) 以线段 AB 的中点为原点 O, OE 所在直线为 x 轴, AB 所在直线为 y 轴, 过 O 点平行于 AD 的直线为 z 轴, 建立空间直角坐标系 O-xyz, 如图.



$\therefore AE \perp$ 面 BCE, $BE \subset$ 面 BCE, $\therefore AE \perp BE$,

在 $Rt\triangle AEB$ 中, $AB = 2$, O 为 AB 的中点,

$$\therefore OE = 1. \quad \therefore A(0, -1, 0), E(1, 0, 0), C(0, 1, 2).$$

$\overrightarrow{AE} = (1, 1, 0), \overrightarrow{AC} = (0, 2, 2)$. 设平面 AEC 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{AE} \cdot \vec{n} = 0, \\ \overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} x + y = 0, \\ 2y + 2x = 0. \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} y = -x, \\ z = x, \end{cases}$$

令 $x = 1$, 得 $\vec{n} = (1, -1, 1)$ 是平面 AEC 的一个法向量.

又平面 BAC 的一个法向量为 $\vec{m} = (1, 0, 0)$,

$$\therefore \cos(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

\therefore 二面角 $B-AC-E$ 的大小为 $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(III) $\because AD // z$ 轴, $AD = 2$, $\therefore \overrightarrow{AD} = (0, 0, 2)$,

$$d = |\overrightarrow{AD}| \cdot |\cos \langle \overrightarrow{AD}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

\therefore 点 D 到平面 ACE 的距离

21. 本小题主要考查直线、椭圆及平面向量的基本知识, 平面解析几何的基本方法和综合解题能力. 满分 14 分.

(I) 解法一: 直线 $l: y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$, ①

过原点垂直 l 的直线方程为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$, ②

$$\text{解①②得} \quad x = \frac{3}{2}.$$

\because 椭圆中心 $O(0, 0)$ 关于直线 l 的对称点在椭圆 C 的右准线上,

$$\therefore \frac{a^2}{c} = 2 \times \frac{3}{2} = 3.$$

\because 直线 l 过椭圆焦点, \therefore 该焦点坐标为 $(2, 0)$.

$$\therefore c=2, a^2=6, b^2=2. \quad \text{故椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1. \quad \textcircled{3}$$

解法二：直线 $l: y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$.

$$\text{设原点关于直线 } l \text{ 对称点为 } (p, q), \text{ 则 } \begin{cases} \frac{q}{2} = \sqrt{3} \cdot \frac{p}{2} - 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \cdot \frac{q}{p} = -1. \end{cases} \quad \text{解得 } p=3.$$

\therefore 椭圆中心 $O(0, 0)$ 关于直线 l 的对称点在椭圆 C 的右准线上,

$$\therefore \frac{a^2}{c} = 3. \quad \therefore \text{直线 } l \text{ 过椭圆焦点, } \therefore \text{该焦点坐标为 } (2, 0).$$

$$\therefore c=2, a^2=6, b^2=2. \quad \text{故椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1. \quad \textcircled{3}$$

(II) 解法一：设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$.

当直线 m 不垂直 x 轴时，直线 $m: y = k(x+2)$ 代入③，整理得

$$(3k^2 + 1)x^2 + 12k^2x + 12k^2 - 6 = 0, \quad \therefore x_1 + x_2 = -\frac{12k^2}{3k^2 + 1}, x_1 \cdot x_2 = \frac{12k^2 - 6}{3k^2 + 1},$$

$$|MN| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1+k^2} \sqrt{\left(-\frac{12k^2}{3k^2+1}\right)^2 - 4 \cdot \frac{12k^2-6}{3k^2+1}} = \frac{2\sqrt{6}(1+k^2)}{3k^2+1},$$

$$d = \frac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}}$$

点 O 到直线 MN 的距离

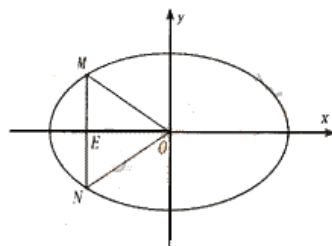
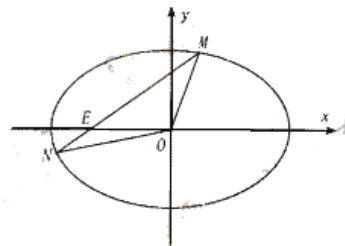
$$\therefore \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \frac{4}{3}\sqrt{6} \cot \angle MON, \quad \text{即 } |\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}| \cos \angle MON = \frac{4}{3}\sqrt{6} \frac{\cos \angle MON}{\sin \angle MON} \neq 0,$$

$$\therefore |\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}| \sin \angle MON = \frac{4}{3}\sqrt{6}, \therefore S_{\triangle OMN} = \frac{2}{3}\sqrt{6}. \therefore |MN| \cdot d = \frac{4}{3}\sqrt{6},$$

$$\text{即 } 4\sqrt{6} |k| \sqrt{k^2+1} = \frac{4}{3}\sqrt{6}(3k^2+1).$$

$$\text{整理得 } k^2 = \frac{1}{3}, \therefore k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{当直线 } m \text{ 垂直 } x \text{ 轴时, 也满足 } S_{\triangle OMN} = \frac{2}{3}\sqrt{6}.$$



故直线 m 的方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

或 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 或 $x = -2$.

经检验上述直线均满足 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} \neq 0$.

所以所求直线方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 或 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 或 $x = -2$.

解法二: 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$.

当直线 m 不垂直 x 轴时, 直线 $m: k(x+2)$ 代入③, 整理得

$$(3k^2 + 1)x^2 + 12k^2x + 12k^2 - 6 = 0, \quad \therefore x_1 + x_2 = -\frac{12k^2}{3k^2 + 1},$$

$\because E(-2, 0)$ 是椭圆 C 的左焦点,

$\therefore |MN| = |ME| + |NE|$

$$= e\left(\frac{a^2}{c} + x_1\right) + e\left(\frac{a^2}{c} + x_2\right) = \frac{c}{a}(x_1 + x_2) + 2a = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \left(-\frac{12k^2}{3k^2 + 1}\right) + 2\sqrt{6} = \frac{2\sqrt{6}(k^2 + 1)}{3k^2 + 1}.$$

以下与解法一相同.

解法三: 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$.

设直线 $m: x = ty - 2$, 代入③, 整理得 $(t^2 + 3)y^2 - 4ty - 2 = 0$.

$$\therefore y_1 + y_2 = \frac{4t}{t^2 + 3}, y_1 y_2 = \frac{-2}{t^2 + 3},$$

$$|y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{\left(\frac{4t}{t^2 + 3}\right)^2 + \frac{8}{t^2 + 3}} = \sqrt{\frac{24t^2 + 24}{(t^2 + 3)^2}}.$$

$$\therefore \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \frac{4}{3}\sqrt{6} \cot \angle MON, \quad \text{即} \quad |\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}| \cos \angle MON = \frac{4}{3}\sqrt{6} \frac{\cos \angle MON}{\sin \angle MON} \neq 0,$$

$$\therefore |\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}| \sin \angle MON = \frac{4}{3}\sqrt{6}, \therefore S_{\triangle OMN} = \frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

$$S_{\triangle OMN} = S_{\triangle OEM} + S_{\triangle OEN} = \frac{1}{2}|OE| \cdot |y_1 - y_2| = \sqrt{\frac{24t^2 + 24}{(t^2 + 3)^2}}.$$

$$\therefore \sqrt{\frac{24t^2 + 24}{(t^2 + 3)^2}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}, \quad \text{整理得 } t^4 = 3t^2.$$

解得 $t = \pm\sqrt{3}$, 或 $t = 0$.

故直线 m 的方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 或 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 或 $x = -2$.

经检验上述直线方程为 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} \neq 0$.

所以所求直线方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 或 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 或 $x = -2$.

22. 本小题主要考查数列、不等式等基础知识, 考试逻辑思维能力、分析问题和解决问题的能力. 满分 14 分.

$\because a_1 = a, a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$,
(I) 解法一:

$$\therefore a_2 = 1 + \frac{1}{a_1} = 1 + \frac{1}{a} = \frac{a+1}{a}, a_3 = 1 + \frac{1}{a_2} = \frac{2a+1}{a+1}$$

$$a_4 = 1 + \frac{1}{a_3} = \frac{3a+2}{2a+1}. \text{故当 } a = -\frac{2}{3} \text{ 时 } a_4 = 0.$$

解法二 $\because a_4 = 0, \therefore 1 + \frac{1}{a_3} = 0, \therefore a_3 = -1$.

$$\because a_3 = 1 + \frac{1}{a_2}, \therefore a_2 = \frac{1}{2}. \because a_2 = 1 + \frac{1}{a}, \therefore a = -\frac{2}{3}. \text{故当 } a = -\frac{2}{3} \text{ 时 } a_4 = 0.$$

(II) 解法一 $\because b_1 = -1, b_{n+1} = \frac{b}{b_n - 1}, \therefore b_n = \frac{1}{b_{n+1}} + 1$.

a 取数列 $\{b_n\}$ 中的任一个数不妨设 $a = b_n$.

$$\because a = b_n, \therefore a_2 = 1 + \frac{1}{a_1} = 1 + \frac{1}{b_n} = b_{n-1}.$$

$$\therefore a_3 = 1 + \frac{1}{a_2} = 1 + \frac{1}{b_{n-1}} = b_{n-2}.$$

.....

$$\therefore a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}} = 1 + \frac{1}{b_2} = b_1 = -1.$$

$$\therefore a_{n+1} = 0.$$

故 a 取数列 $\{b_n\}$ 中的任一个数, 都可以得到一个有穷数列 $\{a_n\}$

$$\because b_1 = -1, b_{n+1} = \frac{1}{b_n - 1}, \therefore b_n = \frac{1}{b_{n+1}} + 1$$

解法二:

当 $a = b_1$ 时, $a_2 = 1 + \frac{1}{b_1} = 0$

当 $a = b_2$ 时, $a_2 = 1 + \frac{1}{b_2} = b_1 \quad \therefore a_3 = 0$

当 $a = b_3$ 时, $a_2 = 1 + \frac{1}{b_3} = b_2 \quad a_3 = 1 + \frac{1}{a_2} = 1 + \frac{1}{b_2} = b_1$

$\therefore a_4 = 0 \dots\dots\dots$

一般地, 当 $a = b_n$ 时, $a_{n+1} = 0$ 可得一个含有 $n+1$ 项的有穷数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1}$

下面用数学归纳法证明:

①当 $n=1$ 时, $a=b_1$ 显然 $a_2=0$ 得到一个含有 2 项的有穷数列 a_1, a_2 .

②假设当 $n=k$ 时, $a = b_k$ 得到一个含有 $k+1$ 项的有穷数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k+1}$, 其中 $a_{k+1} = 0$,

则 $n=k+1$ 时, $a = b_{k+1} \quad \therefore a_2 = 1 + \frac{1}{b_{k+1}} = b_k$

由假设可知, 可得到一个含有 $k+1$ 项的有穷数列 a_2, a_3, \dots, a_{k+2} , 其中 $a_{k+2} = 0$

\therefore 当 $n=k+1$ 时, 可得到一个含有 $k+2$ 项的有穷数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k+1}$, 其中 $a_{k+2} = 0$

由①②知, 对一切 $n \in N_+$ 命题都成立。

(III) 要使 $\frac{3}{2} < a_n < 2$, 即 $\frac{3}{2} < 1 + \frac{1}{a_{n-1}} < 2. \quad 1 < a_{n-1} < 2.$

\therefore 要使 $\frac{3}{2} < a_n < 2$ 当且仅当它的前一项 a_{n-1} 满足 $1 < a_{n-1} < 2.$

$\therefore (\frac{3}{2}, 2) \subsetneq (1, 2) \quad \therefore$ 只须当 $a_4 \in (\frac{3}{2}, 2)$ 时都有 $a_n \in (\frac{3}{2}, 2) (n \geq 5)$

由 $a_4 = \frac{3a+2}{2a+1}$, 得 $\frac{3}{2} < \frac{3a+2}{2a+1} < 2$, 得 $\frac{3}{2} < \frac{3a+2}{2a+1} < 2.$

解不等式组 $\begin{cases} \frac{3}{2} < \frac{3a+2}{2a+1} \\ \frac{3a+2}{2a+1} < 2 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a > -\frac{1}{2} \\ a > 0 \text{ 或 } a < -\frac{1}{2}. \end{cases}$

故 $a > 0$