

1990年青海高考文科数学真题及答案

一、选择题:在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.把所选项前的字母填在题后括号内.

(1)方程 $2^{\log_3 x} = \frac{1}{4}$ 的解是

(A) $x = \frac{1}{9}$

(B) $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(C) $x = \sqrt{3}$

(D) $x = 9$

(2) $\cos 275^\circ + \cos 215^\circ + \cos 75^\circ \cos 15^\circ$ 的值等于

(A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

(B) $\frac{3}{2}$

(C) $\frac{5}{4}$

(D) $1 + \frac{\sqrt{3}}{4}$

(3) 如果轴截面为正方形的圆柱的侧面积是 S , 那么圆柱的体积等于

(A) $\frac{S}{2} \sqrt{S}$

(B) $\frac{S}{2} \sqrt{\frac{S}{\pi}}$

(C) $\frac{S}{4} \sqrt{S}$

(D) $\frac{S}{4} \sqrt{\frac{S}{\pi}}$

(4) 把复数 $1+i$ 对应的向量按顺时针方向旋转 $\frac{2\pi}{3}$, 所得到的向量对应的复数是

(A) $\frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}i$, (B) $\frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}}{2}i$.

(C) $\frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$, (D) $\frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}}{2}i$.

(5) 双曲线 $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ 的准线方程是

(A) $y = \pm \frac{16}{\sqrt{7}}$

(B) $x = \pm \frac{16}{\sqrt{7}}$

(C) $x = \pm \frac{16}{5}$

(D) $y = \pm \frac{16}{5}$

(6) 已知上图是函数 $y=2\sin(\omega x + \psi)$ ($|\psi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象, 那么

(A) $\omega = \frac{10}{11}, \varphi = \frac{\pi}{6}$

(B) $\omega = \frac{10}{11}, \varphi = -\frac{\pi}{6}$

(C) $\omega = 2, \varphi = \frac{\pi}{6}$

(D) $\omega = 2, \varphi = -\frac{\pi}{6}$

(7) 设命题甲为: $0 < x < 5$; 命题乙为: $|x-2| < 3$. 那么

(A) 甲是乙的充分条件, 但不是乙的必要条件.

(B) 甲是乙的必要条件, 但不是乙的充分条件.

(C) 甲是乙的充要条件.

(D) 甲不是乙的充分条件, 也不是乙的必要条件.

(8) 函数 $y = \frac{\sin x}{|\sin x|} + \frac{|\cos x|}{\cos x} + \frac{\operatorname{tg} x}{|\operatorname{tg} x|} + \frac{|\operatorname{ctg} x|}{\operatorname{ctg} x}$ 的值域是

(A) $\{-2, 4\}$

(B) $\{-2, 0, 4\}$

(C) $\{-2, 0, 2, 4\}$

(D) $\{-4, -2, 0, 4\}$

(9) 如果直线 $y=ax+2$ 与直线 $y=3x-b$ 关于直线 $y=x$ 对称, 那么

(A) $a = \frac{1}{3}, b = 6$

(B) $a = \frac{1}{3}, b = -6$

(C) $a=3, b=-2$

(D) $a=3, b=6$

(10) 如果抛物线 $y^2 = a(x+1)$ 的准线方程是 $x = -3$, 那么这条抛物线的焦点坐标是

- (A) (3, 0) (B) (2, 0)
(C) (1, 0) (D) (-1, 0)

(11) 设全集 $I = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, 集合 $M = \{(x, y) \mid \frac{y-3}{x-2} = 1\}$, $N = \{(x, y) \mid y \neq x+1\}$.

那么 $\overline{M \cap N}$ 等于

- (A) Φ (B) $\{(2, 3)\}$
(C) (2, 3) (D) $\{(x, y) \mid y = x+1\}$

(12) A, B, C, D, E 五人并排站成一排, 如果 A, B 必须相邻且 B 在 A 的右边, 那么不同的排法共有

- (A) 60 种 (B) 48 种
(C) 36 种 (D) 24 种

(13) 已知 $f(x) = x^5 + ax^3 + bx - 8$, 且 $f(-2) = 10$, 那么 $f(2)$ 等于

- (A) -26 (B) -18
(C) -10 (D) 10

(14) 如图, 正三棱锥 $S-ABC$ 的侧棱与底面边长相等, 如果 E、F 分别为 SC、AB 的中点, 那么异面直线 EF 与 SA 所成的角等于

- (A) 90°
(B) 60°
(C) 45°
(D) 30°

(15) 以一个正三棱柱的顶点为顶点的四面体共有

- (A) 6 个 (B) 12 个
(C) 18 个 (D) 30 个

二、填空题: 把答案填在题中横线上.

(16) 已知 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 那么 $\sin \frac{\alpha}{2}$ 的值等于 _____.

(17) $(x-1) - (x-1)^2 + (x-1)^3 - (x-1)^4 + (x-1)^5$ 的展开式中, x^2 的系数等于 _____.

(18) 已知 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列, 如果 S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和, 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{S_n}$ 等于 _____.

(19) 如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 若 E 、 F 分别为 AB 、 AC 的中点, 平面 EB_1C_1F 将三棱柱分成体积为 V_1 、 V_2 的两部分, 那么 $V_1:V_2 =$ _____.

(20) 如果实数 x , y 满足等式 $(x-2)^2 + y^2 = 3$, 那么 $\frac{y}{x}$ 的最大值是 _____.

三、解答题.

(21) 有四个数, 其中前三个数成等差数列, 后三个数成等比数列, 并且第一个数与第四个数的和是 16, 第二个数与第三个数的和是 12, 求这四个数.

(22) 已知 $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{4}$, $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{3}$, 求 $\text{tg}(\alpha + \beta)$ 的值.

(23) 如图, 在三棱锥 $S-ABC$ 中, $SA \perp$ 底面 ABC , $AB \perp BC$. DE 垂直平分 SC , 且分别交 AC 、 SC 于 D 、 E . 又 $SA=AB$, $SB=BC$. 求以 BD 为棱, 以 BDE 与 BDC 为面的二面角的度数.

(24) 已知 $a > 0$, $a \neq 1$, 解不等式 $\log_a(4+3x-x^2) - \log_a(2x-1) > \log_a 2$.

(25) 设 $a \geq 0$, 在复数集 C 中解方程 $z^2 + 2|z| = a$.

依题意, 有

$$\begin{cases} x + (12 - y) = 2y, & \textcircled{1} \\ y(16 - x) = (12 - y)^2 & \textcircled{2} \end{cases}$$

由①式得 $x = 3y - 12$. ③

将③式代入②式得 $y(16 - 3y + 12) = (12 - y)^2$,

整理得 $y^2 - 13y + 36 = 0$.

解得 $y_1 = 4, y_2 = 9$.

代入③式得 $x_1 = 0, x_2 = 15$.

从而得所求四个数为 0, 4, 8, 16 或 15, 9, 3, 1.

(22) 本小题考查三角公式以及三角函数式的恒等变形和运算能力.

解法一: 由已知得

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{4},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{3},$$

两式相除得

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{3}{4}.$$

所以 $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{2 \times \frac{3}{4}}{1 - (\frac{3}{4})^2} = \frac{24}{7}.$

解法二: 如图, 不妨设 $0 \leq \alpha \leq \beta < 2\pi$, 且点 A 的坐标是 $(\cos \alpha, \sin \alpha)$, 点 B 的坐标是 $(\cos \beta, \sin \beta)$, 则点 A, B 在单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上. 连结 AB, 若 C 是 AB 的中点, 由题设知点 C

的坐标是 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{8})$.

连结 OC, 于是 $OC \perp AB$, 若设点 D 的坐标是 $(1, 0)$, 再连结 OA, OB, 则有

$$\angle DOA = \alpha, \quad \angle DOB = \beta, \quad \angle DOC = \frac{\alpha + \beta}{2} - \pi.$$

$$\text{从而} \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \operatorname{tg} \angle DOC = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{6}} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{所以} \quad \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{2 \times \frac{3}{4}}{1 - (\frac{3}{4})^2} = \frac{24}{7}.$$

解法三: 由题设得 $4(\sin \alpha + \sin \beta) = 3(\cos \alpha + \cos \beta).$

$$\text{将上式变形为} \quad \frac{4}{5} \sin \alpha - \frac{3}{5} \cos \alpha = \frac{3}{5} \cos \beta - \frac{4}{5} \sin \beta. \quad \textcircled{1}$$

$$\text{设} \quad \cos \varphi = \frac{4}{5}, \quad \sin \varphi = \frac{3}{5}, \quad \textcircled{2}$$

将②式代入①式, 可得 $\sin(\alpha - j) = \sin(j - \beta).$

$$\text{于是} \quad \alpha - j = (2k+1)\pi - (j - \beta) \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{或} \quad \alpha - j = 2k\pi + (j - \beta) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{若} \quad \alpha - j = (2k+1)\pi - (j - \beta) \quad (k \in \mathbb{Z}), \text{ 则 } \alpha = \beta + (2k+1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{于是} \quad \sin \alpha = -\sin \beta, \text{ 即 } \sin \alpha + \sin \beta = 0.$$

$$\text{这与已知条件} \quad \sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{4} \text{ 矛盾.}$$

$$\text{由此可知} \quad \alpha - j = 2k\pi + (j - \beta) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{即} \quad \alpha + \beta = 2j + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{由②式得} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{4}.$$

所以
$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{2 \times \frac{3}{4}}{1 - (\frac{3}{4})^2} = \frac{24}{7}.$$

(23) 本小题考查直线和平面, 直线和直线的位置关系, 二面角等基本知识, 以及逻辑推理能力和空间想象能力.

解法一: 由于 $SB=BC$, 且 E 是 SC 的中点, 因此 BE 是等腰三角形 SBC 的底边 SC 的中线, 所以 $SC \perp BE$.

又已知 $SC \perp DE, BE \cap DE=E$,

$\therefore SC \perp$ 面 BDE ,

$\therefore SC \perp BD$.

又 $\because SA \perp$ 底面 ABC, BD 在底面 ABC 上, $\therefore SA \perp BD$.

而 $SC \cap SA=S, \therefore BD \perp$ 面 SAC .

$\because DE=$ 面 $SAC \cap$ 面 $BDE, DC=$ 面 $SAC \cap$ 面 BDC ,

$\therefore BD \perp DE, BD \perp DC$.

$\therefore \angle EDC$ 是所求的二面角的平面角.

$\because SA \perp$ 底面 $ABC, \therefore SA \perp AB, SA \perp AC$.

设 $SA = a$. 则 $AB = a, BC = SB = \sqrt{2}a$.

又因为 $AB \perp BC$, 所以 $AC = \sqrt{3}a$.

在 $\text{Rt}\triangle SAC$ 中, $\operatorname{tg}\angle ACS = \frac{SA}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \therefore \angle ACS = 30^\circ$.

又已知 $DE \perp SC$, 所以 $\angle EDC=60^\circ$, 即所求的二面角等于 60° .

解法二: 由于 $SB=BC$, 且 E 是 SC 的中点, 因此 BE 是等腰三角形 SBC 的底边 SC 的中线, 所以 $SC \perp BE$.

又已知 $SC \perp DE, BE \cap DE=E$.

∴ $SC \perp$ 面 BDE ,

∴ $SC \perp BD$.

由于 $SA \perp$ 底面 ABC , 且 A 是垂足, 所以 AC 是 SC 在平面 ABC 上的射影. 由三垂线定理的逆定理得 $BD \perp AC$; 又因 $E \in SC$, AC 是 SC 在平面 ABC 上的射影, 所以 E 在平面 ABC 上的射影在 AC 上, 由于 $D \in AC$, 所以 DE 在平面 ABC 上的射影在 AC 上, 根据三垂线定理又得 $BD \perp DE$.

∵ DE 面 BDE , DC 面 BDC ,

∴ $\angle EDC$ 是所求的二面角的平面角.

以下同解法一.

(24) 本小题考查对数, 不等式的基本知识及运算能力.

解: 原不等式可化为

$$\log_a(4+3x-x^2) > \log_a 2(2x-1). \quad \text{①}$$

当 $0 < a < 1$ 时, ①式等价于

$$\begin{cases} 4+3x-x^2 > 0, \\ 2(2x-1) > 0, \\ 4+3x-x^2 < 2(2x-1). \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4+3x-x^2 > 0, \\ 4+3x-x^2 < 2(2x-1). \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4-x)(1+x) > 0, \\ (x+3)(x-2) > 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 4, \\ x < -3 \text{ 或 } x > 2. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 2 < x < 4$. 即当 $0 < a < 1$ 时, 原不等式的解集是 $\{x \mid 2 < x < 4\}$.

当 $a > 1$ 时, ①式等价于

$$\begin{cases} 4+3x-x^2 > 0, \\ 2(2x-1) > 0, \\ 4+3x-x^2 > 2(2x-1). \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ -3 < x < 2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 2.$$

即当 $a > 1$ 时, 原不等式的解集是 $\{x \mid \frac{1}{2} < x < 2\}$.

综合以上讨论知, 当 $0 < a < 1$ 时, 原不等式的解集是 $\{x \mid 2 < x < 4\}$, 当 $a > 1$ 时, 原不等式的解集是 $\{x \mid \frac{1}{2} < x < 2\}$.

(25) 本小题考查复数与解方程等基本知识以及综合分析能力.

解法一: 设 $z=x+yi$, 代入原方程得

$$x^2 - y^2 + 2\sqrt{x^2 + y^2} + 2xyi = a,$$

于是原方程等价于方程组

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2\sqrt{x^2 + y^2} = a, & \text{①} \\ 2xy = 0. & \text{②} \end{cases}$$

由②式得 $y=0$ 或 $x=0$. 由此可见, 若原方程有解, 则其解或为实数或为纯虚数. 下面分别加以讨论.

情形 1. 若 $y=0$, 即求原方程的实数解 $z=x$. 此时, ①式化为

$$x^2 + 2|x| = a. \quad \text{③}$$

(I) 令 $x > 0$, 方程③变为 $x^2 + 2x = a$. ④

解方程④得 $x = -1 \pm \sqrt{1+a}$.

由此可知: 当 $a=0$ 时, 方程④无正根;

当 $a > 0$ 时, 方程④有正根 $x = -1 + \sqrt{1+a}$.

(II) 令 $x < 0$, 方程③变为 $x^2 - 2x = a$. ⑤

解方程⑤得 $x = 1 \pm \sqrt{1+a}$.

由此可知: 当 $a=0$ 时, 方程⑤无负根;

当 $a > 0$ 时, 方程⑤有负根 $x = 1 - \sqrt{1+a}$.

(III) 令 $x=0$, 方程③变为 $0=a$. ⑥

由此可知: 当 $a=0$ 时, 方程⑥有零解 $x=0$;

当 $a > 0$ 时, 方程⑥无零解.

所以, 原方程的实数解是:

当 $a=0$ 时, $z=0$;

当 $a > 0$ 时, $z = \pm(1 - \sqrt{1+a})$.

情形 2. 若 $x=0$, 由于 $y=0$ 的情形前已讨论, 现在只需考查 $y \neq 0$ 的情形, 即求原方程的纯虚数解 $z=yi$ ($y \neq 0$). 此时, ①式化为

$$-y^2 + 2|y| = a. \quad ⑦$$

(I) 令 $y > 0$, 方程⑦变为 $-y^2 + 2y = a$, 即 $(y-1)^2 = 1-a$. ⑧

由此可知: 当 $a > 1$ 时, 方程⑧无实根.

当 $a \leq 1$ 时, 解方程⑧得 $y = 1 \pm \sqrt{1-a}$, 从而, 当 $a=0$ 时, 方程⑧有正根 $y=2$;

当 $0 < a \leq 1$ 时, 方程⑧有正根 $y = 1 \pm \sqrt{1-a}$.

(II) 令 $y < 0$, 方程⑦变为 $-y^2 - 2y = a$, 即 $(y+1)^2 = 1-a$. ⑨

由此可知: 当 $a > 1$ 时, 方程⑨无实根.

当 $a \leq 1$ 时解方程⑨得 $y = -1 \pm \sqrt{1-a}$,

从而, 当 $a=0$ 时, 方程⑨有负根 $y=-2$;

当 $0 < a \leq 1$ 时, 方程⑨有负根 $y = -1 \pm \sqrt{1-a}$.

所以, 原方程的纯虚数解是:

当 $a=0$ 时, $z = \pm 2i$;

当 $0 < a \leq 1$ 时, $z = \pm(1 + \sqrt{1-a})i$, $z = \pm(1 - \sqrt{1-a})i$.

而当 $a > 1$ 时, 原方程无纯虚数解.

解法二: 设 $z=x+yi$, 代入原方程得

$$x^2 - y^2 + 2\sqrt{x^2 + y^2} + 2xyi = a,$$

于是原方程等价于方程组

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2\sqrt{x^2 + y^2} = a, & \text{①} \\ 2xy = 0. & \text{②} \end{cases}$$

由②式得 $y=0$ 或 $x=0$. 由此可见, 若原方程有解, 则其解或为实数, 或为纯虚数. 下面分别加以讨论.

情形 1. 若 $y=0$, 即求原方程的实数解 $z=x$. 此时, ①式化为

$$x^2 + 2|x| = a.$$

$$\text{即} \quad |x|^2 + 2|x| = a. \quad \text{③}$$

$$\text{解方程③得} \quad |x| = -1 + \sqrt{1+a},$$

所以, 原方程的实数解是 $z = \pm(-1 + \sqrt{1+a})$.

情形 2. 若 $x=0$, 由于 $y=0$ 的情形前已讨论, 现在只需考查 $y \neq 0$ 的情形, 即求原方程的纯虚数解 $z=yi$ ($y \neq 0$). 此时, ①式化为

$$-y^2 + 2|y| = a.$$

$$\text{即} \quad -|y|^2 + 2|y| = a. \quad \textcircled{4}$$

当 $a=0$ 时, 因 $y \neq 0$, 解方程④得 $|y|=2$,

即当 $a=0$ 时, 原方程的纯虚数解是 $z = \pm 2i$.

当 $0 < a \leq 1$ 时, 解方程④得 $|y| = 1 \pm \sqrt{1-a}$.

即当 $0 < a \leq 1$ 时, 原方程的纯虚数解是

$$z = \pm(1 + \sqrt{1-a})i, \quad z = \pm(1 - \sqrt{1-a})i.$$

当 $a > 1$ 时, 方程④无实根, 所以这时原方程无纯虚数解.

解法三: 因为 $z^2 = -2|z| + a$ 是实数, 所以若原方程有解, 则其解或为实数, 或为纯虚数, 即 $z=x$ 或 $z=yi$ ($y \neq 0$).

情形 1. 若 $z=x$. 以下同解法一或解法二中的情形 1.

情形 2. 若 $z=yi$ ($y \neq 0$). 以下同解法一或解法二中的情形 2.

解法四: 设 $z=r(\cos \theta + i\sin \theta)$, 其中 $r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$. 代入原方程得

$$r^2 \cos 2\theta + 2r + ir^2 \sin 2\theta = a.$$

于是原方程等价于方程组

$$\begin{cases} r^2 \cos 2\theta + 2r = a, & \textcircled{1} \\ r^2 \sin 2\theta = 0. & \textcircled{2} \end{cases}$$

由②式得 $r=0$ 或 $\theta = \frac{k\pi}{2}$ ($k=0, 1, 2, 3$). 情形 1. 若 $r=0$. ①式变成

$$0 = a. \quad \textcircled{3}$$

由此可知: 当 $a=0$ 时, $r=0$ 是方程③的解.

当 $a > 0$ 时, 方程③无解.

所以, 当 $a=0$ 时, 原方程有解 $z=0$;

当 $a > 0$ 时, 原方程无零解.

情形 2. 若 $\theta = \frac{k\pi}{2}$ ($k=0, 1, 2, 3$), 由于 $r=0$ 的情形前已讨论, 现在只需考查 $r > 0$ 的情形.

(I) 当 $k=0, 2$ 时, 对应的复数是 $z = \pm r$. 因 $\cos 2\theta = 1$, 故①式化为

$$r^2 + 2r = a. \quad (4)$$

解方程④可得 $r = -1 \pm \sqrt{1+a}$.

由此可知: 当 $a=0$ 时, 方程④无正根;

当 $a > 0$ 时, 方程④有正根 $r = -1 + \sqrt{1+a}$.

所以, 当 $a > 0$ 时, 原方程有解 $z = \pm(\sqrt{1+a} - 1)$.

(II) 当 $k=1, 3$ 时, 对应的复数是 $z = \pm ri$. 因 $\cos 2\theta = -1$, 故①式化为

$$-r^2 + 2r = a, \text{ 即 } (r-1)^2 = 1+a, \quad (5)$$

由此可知: 当 $a > 1$ 时, 方程⑤无实根, 从而无正根;

当 $a \leq 1$ 时解方程⑤得 $r = 1 \pm \sqrt{1-a}$. 从而, 当 $a=0$ 时, 方程⑤有正根 $r=2$;

当 $0 < a \leq 1$ 时, 方程⑤有正根 $r = 1 \pm \sqrt{1-a}$.

所以, 当 $a=0$ 时, 原方程有解 $z = \pm 2i$;

当 $0 < a \leq 1$ 时, 原方程有解

$$z = \pm(1 + \sqrt{1-a})i, \quad z = \pm(1 - \sqrt{1-a})i.$$

当 $a > 1$ 时, 原方程无纯虚数解.