

2024 年普通高等学校招生全国统一考试（新课标 II 卷）

数学

本试卷共 10 页，19 小题，满分 150 分.

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.
3. 填空题和解答题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内. 写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.
4. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交.

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的. 请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

1. 已知 $z = -1 - i$ ，则 $|z| =$ ()

- A. 0 B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2

2. 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, |x+1| > 1$ ；命题 $q: \exists x > 0, x^3 = x$ ，则 ()

- A. p 和 q 都是真命题 B. $\neg p$ 和 q 都是真命题
C. p 和 $\neg q$ 都是真命题 D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

3. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 1, |\vec{a} + 2\vec{b}| = 2$ ，且 $(\vec{b} - 2\vec{a}) \perp \vec{b}$ ，则 $|\vec{b}| =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

4. 某农业研究部门在面积相等的 100 块稻田上种植一种新型水稻，得到各块稻田的亩产量（单位：kg）并部分整理下表

亩产量	[900, 950)	[950, 1000)	[1000, 1050)	[1100, 1150)	[1150, 1200)
频数	6	12	18	24	10

据表中数据，结论中正确的是 ()

- A. 100 块稻田亩产量的中位数小于 1050kg

B. 100 块稻田中亩产量低于 1100kg 的稻田所占比例超过 80%

C. 100 块稻田亩产量的极差介于 200kg 至 300kg 之间

D. 100 块稻田亩产量的平均值介于 900kg 至 1000kg 之间

5. 已知曲线 $C: x^2 + y^2 = 16$ ($y > 0$), 从 C 上任意一点 P 向 x 轴作垂线段 PP' , P' 为垂足, 则线段 PP' 的中点 M 的轨迹方程为 ()

A. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ ($y > 0$)

B. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$ ($y > 0$)

C. $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1$ ($y > 0$)

D. $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{8} = 1$ ($y > 0$)

6. 设函数 $f(x) = a(x+1)^2 - 1$, $g(x) = \cos x + 2ax$, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 恰有一个交点, 则 $a =$ ()

A. -1

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

7. 已知正三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{52}{3}$, $AB = 6$, $A_1B_1 = 2$, 则 A_1A 与平面 ABC 所成角的正切值为 ()

A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. 2

D. 3

8. 设函数 $f(x) = (x+a)\ln(x+b)$, 若 $f(x) \geq 0$, 则 $a^2 + b^2$ 的最小值为 ()

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 1

二、多项选择题: 本大题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 6 分, 选对但不全的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 对于函数 $f(x) = \sin 2x$ 和 $g(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{4})$, 下列正确的有 ()

A. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同零点

B. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同最大值

C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最小正周期

D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像有相同的对称轴

10. 抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的准线为 l , P 为 C 上的动点, 过 P 作 $\odot A: x^2 + (y-4)^2 = 1$ 的一条切线, Q 为切点, 过 P 作 l 的垂线, 垂足为 B , 则 ()

A. l 与 $\odot A$ 相切

B. 当 P, A, B 三点共线时, $|PQ| = \sqrt{15}$

C. 当 $|PB| = 2$ 时, $PA \perp AB$

D. 满足 $|PA|=|PB|$ 的点 P 有且仅有2个

11. 设函数 $f(x)=2x^3-3ax^2+1$, 则 ()

A. 当 $a>1$ 时, $f(x)$ 有三个零点

B. 当 $a<0$ 时, $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

C. 存在 a, b , 使得 $x=b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称轴

D. 存在 a , 使得点 $(1, f(1))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称中心

三、填空题: 本大题共3小题, 每小题5分, 共15分.

12. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_3+a_4=7$, $3a_2+a_5=5$, 则 $S_{10}=$ _____.

13. 已知 α 为第一象限角, β 为第三象限角, $\tan\alpha+\tan\beta=4$, $\tan\alpha\tan\beta=\sqrt{2}+1$, 则 $\sin(\alpha+\beta)=$ _____.

14. 在如图的 4×4 方格表中选4个方格, 要求每行和每列均恰有一个方格被选中, 则共有_____种选法, 在所有符合上述要求的选法中, 选中方格中的4个数之和的最大值是_____.

11	21	31	40
12	22	33	42
13	22	33	43
15	24	34	44

四、解答题: 本题共5小题, 共77分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$.

(1) 求 A .

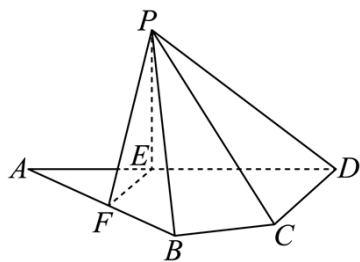
(2) 若 $a=2$, $\sqrt{2}b\sin C=c\sin 2B$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

16. 已知函数 $f(x)=e^x-ax-a^3$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若 $f(x)$ 有极小值, 且极小值小于0, 求 a 的取值范围.

17. 如图, 平面四边形 $ABCD$ 中, $AB=8$, $CD=3$, $AD=5\sqrt{3}$, $\angle ADC=90^\circ$, $\angle BAD=30^\circ$, 点 E, F 满足 $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, 将 $\triangle AEF$ 沿 EF 对折至 $\triangle PEF$, 使得 $PC=4\sqrt{3}$.



(1) 证明: $EF \perp PD$;

(2) 求面 PCD 与面 PBF 所成的二面角的正弦值.

18. 某投篮比赛分为两个阶段, 每个参赛队由两名队员组成, 比赛具体规则如下: 第一阶段由参赛队中一名队员投篮 3 次, 若 3 次都未投中, 则该队被淘汰, 比赛成员为 0 分; 若至少投中一次, 则该队进入第二阶段, 由该队的另一名队员投篮 3 次, 每次投中得 5 分, 未投中得 0 分. 该队的比赛成绩为第二阶段的得分总和. 某参赛队由甲、乙两名队员组成, 设甲每次投中的概率为 p , 乙每次投中的概率为 q , 各次投中与否相互独立.

(1) 若 $p = 0.4$, $q = 0.5$, 甲参加第一阶段比赛, 求甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分的概率.

(2) 假设 $0 < p < q$,

(i) 为使得甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率最大, 应该由谁参加第一阶段比赛?

(ii) 为使得甲、乙, 所在队的比赛成绩的数学期望最大, 应该由谁参加第一阶段比赛?

19. 已知双曲线 $C: x^2 - y^2 = m (m > 0)$, 点 $P_1(5, 4)$ 在 C 上, k 为常数, $0 < k < 1$. 按照如下方式依次构造点 $P_n (n = 2, 3, \dots)$, 过 P_{n-1} 作斜率为 k 的直线与 C 的左支交于点 Q_{n-1} , 令 P_n 为 Q_{n-1} 关于 y 轴的对称点, 记 P_n 的坐标为 (x_n, y_n) .

(1) 若 $k = \frac{1}{2}$, 求 x_2, y_2 ;

(2) 证明: 数列 $\{x_n - y_n\}$ 是公比为 $\frac{1+k}{1-k}$ 的等比数列;

(3) 设 S_n 为 $\triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}$ 的面积, 证明: 对任意的正整数 n , $S_n = S_{n+1}$.