# 2022年普通高等学校招生全国统一考试数学（天津卷）2022．06．

## 一、选择题：本题共9小题，每小题5分，共45分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设全集$U=\{-2,-1,0,1,2\}$，集合$A=\{0,1,2\},B=\{-1,2\}$，则$A\cap\left(\complement_U B\right)=$（　　）

A. $\{0,1\}$　　B. $\{0,1,2\}$　　C. $\{-1,1,2\}$　　D. $\{0,-1,1,2\}$

【答案】A

【解析】

【分析】先求出$\complement_U B$，再根据交集的定义可求$A\cap\left(\complement_U B\right)$.

【详解】$\complement_U B=\{-2,0,1\}$，故$A\cap\left(\complement_U B\right)=\{0,1\}$，

故选：A.

2. “$x$为整数”是“$2x+1$为整数”的（　　）

A. 充分不必要　　B. 必要不充分

C. 充分必要　　D. 既不充分也不必要

【答案】A

【解析】

【分析】依据充分不必要条件的定义去判定“$x$为整数”与“$2x+1$为整数”的逻辑关系即可.

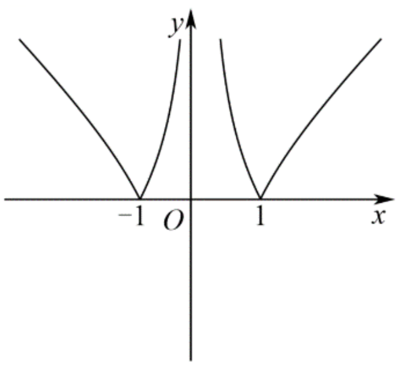
【详解】由题意，若$x$为整数，则$2x+1$为整数，故充分性成立；

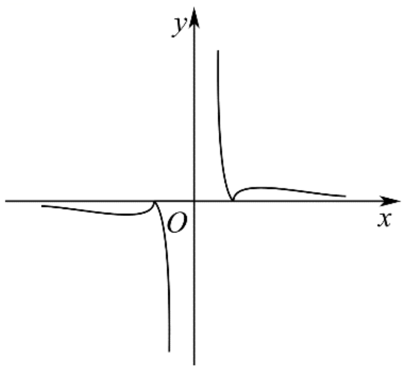
当$x=\dfrac{1}{2}$时，$2x+1$为整数，但$x$不为整数，故必要性不成立；

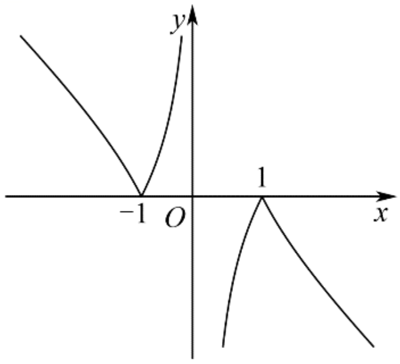
所以“$x$为整数”是“$2x+1$为整数”的充分不必要条件.

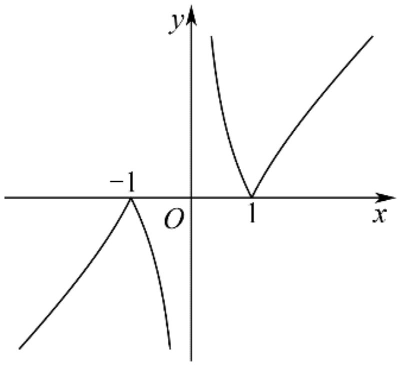
故选：A.

3. 函数$f(x)=\dfrac{\left|x^2-1\right|}{x}$的图像为（　　）

A. 


B. 

C. 


D. 


【答案】D

【解析】

【分析】分析函数 $f\left(x\right)$ 的定义域、奇偶性、单调性及其在 $\left(-\infty,0\right)$ 上的函数值符号，结合排除法可得出合适的选项.

【详解】函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\left|x^2-1\right|}{x}$ 的定义域为 $\left\{x\left|x\neq 0\right.\right\}$，

且 $f\left(-x\right)=\dfrac{\left|\left(-x\right)^2-1\right|}{-x}=-\dfrac{\left|x^2-1\right|}{x}=-f\left(x\right)$，

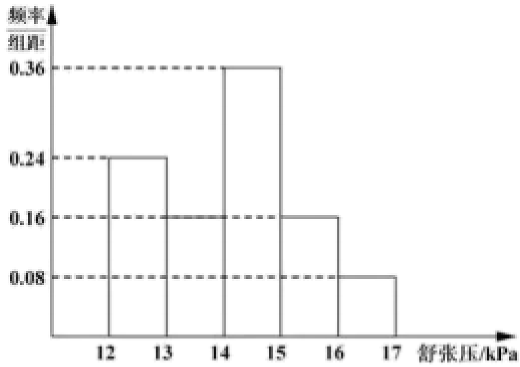
函数 $f\left(x\right)$ 为奇函数，A 选项错误；

又当 $x<0$ 时，$f\left(x\right)=\dfrac{\left|x^2-1\right|}{x}\leq 0$，C 选项错误；

当 $x>1$ 时，$f\left(x\right)=\dfrac{\left|x^2-1\right|}{x}=\dfrac{x^2-1}{x}=x-\dfrac{1}{x}$ 函数单调递增，故 B 选项错误；

故选：D.

4. 为研究某药品的疗效，选取若干名志愿者进行临床试验，所有志愿者的舒张压数据（单位：kPa ）的分组区间为 $[12,13),[13,14),[14,15),[15,16),[16,17]$，将其按从左到右的顺序分别编号为第一组，第二组，…，第五组，右图是根据试验数据制成的频率分布直方图．已知第一组与第二组共有 20 人，第三组中没有疗效的有 6 人，则第三组中有疗效的人数为（　　）




A. 8　　B. 12　　C. 16　　D. 18

【答案】B

【解析】

【分析】结合已知条件和频率分布直方图求出志愿者的总人数，进而求出第三组的总人数，从而可以求得结果.

【详解】志愿者的总人数为$\dfrac{20}{(0.24+0.16)\times 1}$＝50，

所以第三组人数为 50×0.36＝18，

有疗效的人数为 18－6＝12.

故选：B.

5. 已知$a=2^{0.7}$，$b=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{0.7}$，$c=\log_2\dfrac{1}{3}$，则（　　）

A. $a>c>b$　　B. $b>c>a$　　C. $a>b>c$　　D. $c>a>b$

【答案】C

【解析】

【分析】利用幂函数、对数函数的单调性结合中间值法可得出$a$、$b$、$c$的大小关系.

【详解】因为$2^{0.7}>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{0.7}>0=\log_2 1>\log_2\dfrac{1}{3}$，故$a>b>c$.

故答案为：C.

6. 化简$\left(2\log_4 3+\log_8 3\right)\left(\log_3 2+\log_9 2\right)$的值为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 6

【答案】B

【解析】

【分析】根据对数的性质可求代数式的值.

【详解】原式$=(2\times\frac{1}{2}\log_2 3+\frac{1}{3}\log_2 3)(\log_3 2+\frac{1}{2}\log_3 2)$

$=\frac{4}{3}\log_2 3\times\frac{3}{2}\log_3 2=2$，

故选：B

7. 已知抛物线 $y^2=4\sqrt{5}x, F_1, F_2$ 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，抛物线的准线过双曲线的左焦点 $F_1$，与双曲线的渐近线交于点 $A$，若 $\angle F_1F_2A=\frac{\pi}{4}$，则双曲线的标准方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{10}-y^2=1$　　　　B. $x^2-\frac{y^2}{16}=1$

C. $x^2-\frac{y^2}{4}=1$　　　　D. $\frac{x^2}{4}-y^2=1$

【答案】C

【解析】

【分析】由已知可得出 $c$ 的值，求出点 A 的坐标，分析可得 $|AF_1|=|F_1F_2|$，由此可得出关于 $a$、$b$、$c$ 的方程组，解出这三个量的值，即可得出双曲线的标准方程.

【详解】抛物线 $y^2=4\sqrt{5}x$ 的准线方程为 $x=-\sqrt{5}$，则 $c=\sqrt{5}$，则 $F_1\left(-\sqrt{5},0\right)$、$F_2\left(\sqrt{5},0\right)$，

不妨设点 A 为第二象限内的点，联立 $\begin{cases} y=-\frac{b}{a}x \\ x=-c \end{cases}$，可得 $\begin{cases} x=-c \\ y=\frac{bc}{a} \end{cases}$，即点 $A\left(-c,\frac{bc}{a}\right)$，

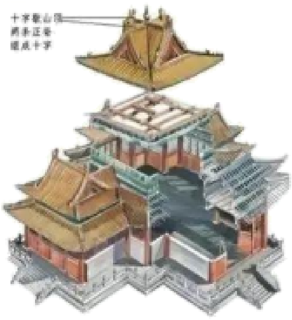
因为 $AF_1\perp F_1F_2$ 且 $\angle F_1F_2A=\frac{\pi}{4}$，则 $\triangle F_1F_2A$ 为等腰直角三角形，

且 $|AF_1|=|F_1F_2|$，即 $\frac{bc}{a}=2c$，可得 $\frac{b}{a}=2$，

所以，$\begin{cases} \frac{b}{a}=2 \\ c=\sqrt{5} \\ c^2=a^2+b^2 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=\sqrt{5} \end{cases}$，因此，双曲线的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$.

故选：C.

8. 如图，“十字歇山”是由两个直三棱柱重叠后的景象，重叠后的底面为正方形，直三棱柱的底面是顶角为 $120°$，腰为 3 的等腰三角形，则该几何体的体积为（　　）



十字歇山顶

A. 23　　B. 24　　C. 26　　D. 27

【答案】D

【解析】

【分析】作出几何体直观图，由题意结合几何体体积公式即可得组合体的体积.

【详解】该几何体由直三棱柱 $AFD-BHC$ 及直三棱柱 $DGC-AEB$ 组成，作 $HM\perp CB$ 于 $M$，如图，

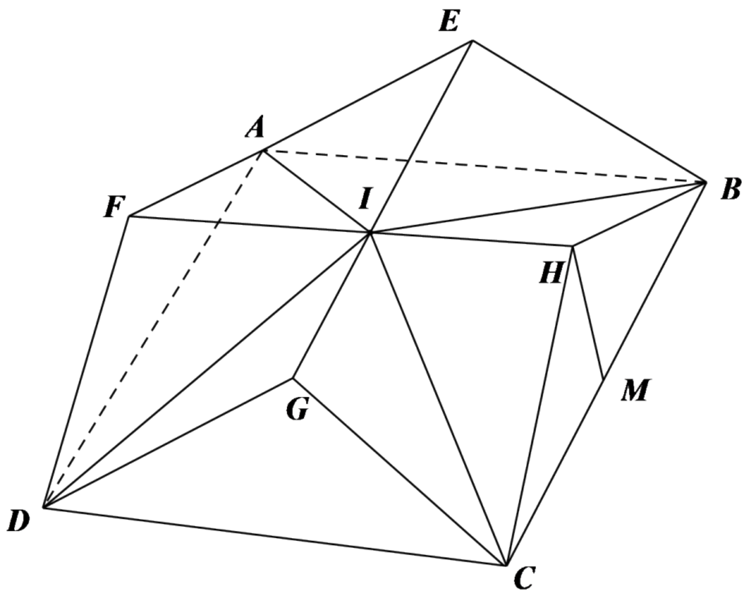
因为 $CH=BH=3,\angle CHB=120^{\circ}$，所以 $CM=BM=\dfrac{3\sqrt{3}}{2},HM=\dfrac{3}{2}$，

因为重叠后的底面为正方形，所以 $AB=BC=3\sqrt{3}$，

在直棱柱 $AFD-BHC$ 中，$AB\perp$ 平面 $BHC$，则 $AB\perp HM$，

由 $AB\cap BC=B$ 可得 $HM\perp$ 平面 $ADCB$，

设重叠后的 $EG$ 与 $FH$ 交点为 $I$，




则 $V_{I-BCDA}=\dfrac{1}{3}\times3\sqrt{3}\times3\sqrt{3}\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{27}{2},V_{AFD-BHC}=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times\dfrac{3}{2}\times3\sqrt{3}=\dfrac{81}{4}$

则该几何体的体积为 $V=2V_{AFD-BHC}-V_{I-BCDA}=2\times\dfrac{81}{4}-\dfrac{27}{2}=27$.

故选：D.

9. 已知 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$，关于该函数有下列四个说法：

①$f(x)$ 的最小正周期为 $2\pi$；

②$f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ 上单调递增；

③当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 时，$f(x)$ 的取值范围为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$；

④$f(x)$ 的图象可由 $g(x)=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度得到.

以上四个说法中，正确的个数为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】A

【解析】

【分析】根据三角函数的图象与性质，以及变换法则即可判断各说法的真假.

【详解】因为 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$，所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，①不正确；

令 $t=2x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，而 $y=\frac{1}{2}\sin t$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上递增，所以 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ 上单调递增，②正确；因为

$t=2x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，$\sin t\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，所以 $f\left(x\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{2}\right]$，③不正确；

由于 $g(x)=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right]$，所以 $f(x)$ 的图象可由 $g(x)=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度得到，④不正确.

故选：A.

## 第 II 卷

**二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．试题中包含两个空的，答对 1 个的给 3 分，全部答对的给 5 分．**

10. 已知$\mathrm{i}$是虚数单位，化简$\dfrac{11-3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$的结果为_______.

【答案】$1-5\mathrm{i}$ ## $-5\mathrm{i}+1$

【解析】

【分析】根据复数代数形式的运算法则即可解出.

【详解】$\dfrac{11-3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\dfrac{(11-3\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=\dfrac{11-6-25\mathrm{i}}{5}=1-5\mathrm{i}$.

故答案为：$1-5\mathrm{i}$.

11. $\left(\sqrt{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)^5$的展开式中的常数项为______.

【答案】15

【解析】

【分析】由题意结合二项式定理可得$\left(\sqrt{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)^5$的展开式的通项为$T_{r+1}=C_5^r\cdot 3^r\cdot x^{\frac{5-5r}{2}}$，令$\dfrac{5-5r}{2}=0$，代入即可得解.

【详解】由题意$\left(\sqrt{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)^5$的展开式的通项为$T_{r+1}=C_5^r\cdot\left(\sqrt{x}\right)^{5-r}\cdot\left(\dfrac{3}{x^2}\right)^r=C_5^r\cdot 3^r\cdot x^{\frac{5-5r}{2}}$，

令$\dfrac{5-5r}{2}=0$即$r=1$，则$C_5^r\cdot 3^r=C_5^1\cdot 3=15$，

所以$\left(\sqrt{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)^5$的展开式中的常数项为$15$.

故答案为：$15$.

【点睛】本题考查了二项式定理的应用，考查了运算求解能力，属于基础题.

12. 若直线$x-y+m=0(m>0)$与圆$(x-1)^2+(y-1)^2=3$相交所得的弦长为$m$，则$m=$_____.

【答案】2

【解析】

【分析】计算出圆心到直线的距离，利用勾股定理可得出关于$m$的等式，即可解得$m$的值.

【详解】圆$(x-1)^2+(y-1)^2=3$的圆心坐标为$(1,1)$，半径为$\sqrt{3}$，

圆心到直线$x-y+m=0(m>0)$的距离为$\dfrac{|1-1+m|}{\sqrt{2}}=\dfrac{m}{\sqrt{2}}$，

由勾股定理可得$\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{m}{2}\right)^2=3$，因为$m>0$，解得$m=2$.

故答案为：$2$.

13. 52 张扑克牌，没有大小王，无放回地抽取两次，则两次都抽到 $A$ 的概率为____________；已知第一次抽到的是 $A$，则第二次抽取 $A$ 的概率为____________

【答案】 ①. $\frac{1}{221}$ ②. $\frac{1}{17}$

【解析】

【分析】由题意结合概率的乘法公式可得两次都抽到 $A$ 的概率，再由条件概率的公式即可求得在第一次抽到 $A$ 的条件下，第二次抽到 $A$ 的概率.

【详解】由题意，设第一次抽到 $A$ 的事件为 $B$,第二次抽到 $A$ 的事件为 $C$,

则$P(BC)=\frac{4}{52}\times\frac{3}{51}=\frac{1}{221},P(B)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13},P(C\mid B)=\frac{P(BC)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{221}}{\frac{1}{13}}=\frac{1}{17}$.

故答案为：$\frac{1}{221}$；$\frac{1}{17}$.

14. 在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{CA}=\vec{a},\overrightarrow{CB}=\vec{b}$，$D$ 是 $AC$ 中点，$\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{BE}$，试用$\vec{a},\vec{b}$表示$\overrightarrow{DE}$为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，若$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{DE}$，则$\angle ACB$的最大值为____________

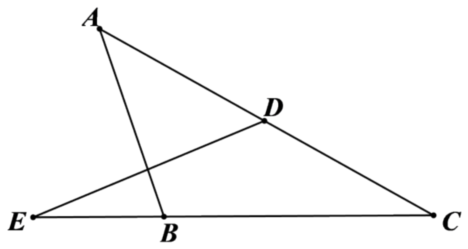
【答案】 ①. $\frac{3}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$ ②. $\frac{\pi}{6}$

【解析】

【分析】法一：根据向量的减法以及向量的数乘即可表示出$\overrightarrow{DE}$，以$\{\vec{a},\vec{b}\}$为基底，表示出$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}$，由$AB\perp DE$可得$3\vec{b}^2+\vec{a}^2=4\vec{b}\cdot\vec{a}$，再根据向量夹角公式以及基本不等式即可求出.

法二：以点$E$为原点建立平面直角坐标系，设$E(0,0),B(1,0),C(3,0),A(x,y)$，由$AB\perp DE$可得点 A 的轨迹为以$M(-1,0)$为圆心，以$r=2$为半径的圆，方程为$(x+1)^2+y^2=4$，即可根据几何性质可知，当且仅当$CA$与$\odot M$相切时，$\angle C$最大，即求出.

【详解】方法一：



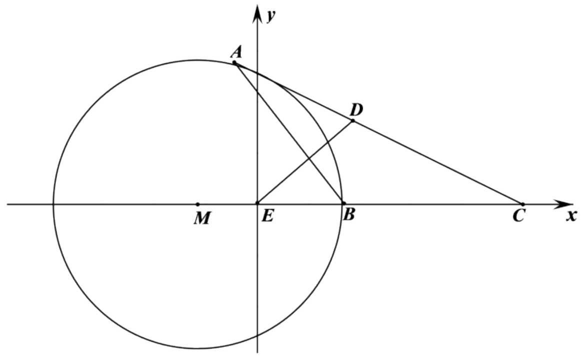

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CD}=\dfrac{3}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\vec{b}-\vec{a},\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{DE}\Rightarrow(3\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$，

$3\vec{b}^2+\vec{a}^2=4\vec{a}\cdot\vec{b}\Rightarrow\cos\angle ACB=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3\vec{b}^2+\vec{a}^2}{4|\vec{a}||\vec{b}|}\geq\dfrac{2\sqrt{3}|\vec{a}||\vec{b}|}{4|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，当且仅当$|\vec{a}|=\sqrt{3}|\vec{b}|$时取等号，而

$0<\angle ACB<\pi$，所以$\angle ACB\in(0,\dfrac{\pi}{6}]$.

故答案为：$\dfrac{3}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{a}$；$\dfrac{\pi}{6}$.

方法二：如图所示，建立坐标系：




$E(0,0),B(1,0),C(3,0),A(x,y)$，$\overrightarrow{DE}=(-\dfrac{x+3}{2},-\dfrac{y}{2}),\overrightarrow{AB}=(1-x,-y)$，

$\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow(\dfrac{x+3}{2})(x-1)+\dfrac{y^2}{2}=0\Rightarrow(x+1)^2+y^2=4$，所以点A的轨迹是以$M(-1,0)$为圆心，以

$r=2$为半径的圆，当且仅当$CA$与$\odot M$相切时，$\angle C$最大，此时$\sin C=\dfrac{r}{CM}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2},\angle C=\dfrac{\pi}{6}$.

故答案为：$\dfrac{3}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{a}$；$\dfrac{\pi}{6}$.

15. 设$a\in\mathbf{R}$，对任意实数x，记$f(x)=\min\{|x|-2,x^2-ax+3a-5\}$．若$f(x)$至少有3个零点，则实数$a$的取值范围为______.

【答案】$a\ge 10$

【解析】

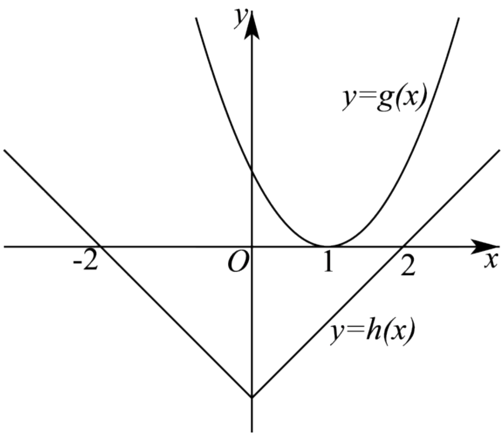
【分析】设 $g\left(x\right)=x^{2}-ax+3a-5$，$h\left(x\right)=\left|x\right|-2$，分析可知函数 $g\left(x\right)$ 至少有一个零点，可得出 $\Delta\ge 0$，求出 $a$ 的取值范围，然后对实数 $a$ 的取值范围进行分类讨论，根据题意可得出关于实数 $a$ 的不等式，综合可求得实数 $a$ 的取值范围.

【详解】设 $g\left(x\right)=x^{2}-ax+3a-5$，$h\left(x\right)=\left|x\right|-2$，由 $\left|x\right|-2=0$ 可得 $x=\pm 2$.

要使得函数 $f\left(x\right)$ 至少有 3 个零点，则函数 $g\left(x\right)$ 至少有一个零点，则 $\Delta=a^{2}-12a+20\ge 0$，

解得 $a\le 2$ 或 $a\ge 10$.

①当 $a=2$ 时，$g\left(x\right)=x^{2}-2x+1$，作出函数 $g\left(x\right)$、$h\left(x\right)$ 的图象如下图所示：



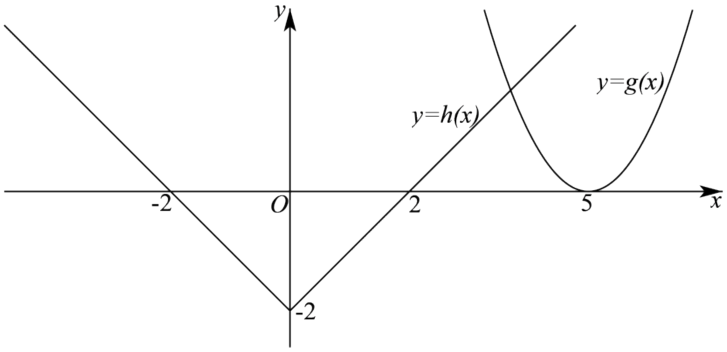

此时函数 $f\left(x\right)$ 只有两个零点，不合乎题意；

②当 $a<2$ 时，设函数 $g\left(x\right)$ 的两个零点分别为 $x_{1}$、$x_{2}\left(x_{1}<x_{2}\right)$，

要使得函数 $f\left(x\right)$ 至少有 3 个零点，则 $x_{2}\le -2$，

所以，$\begin{cases}\dfrac{a}{2}<-2\\ g\left(-2\right)=4+5a-5\ge 0\end{cases}$，解得 $a\in\varnothing$；

③当 $a=10$ 时，$g\left(x\right)=x^{2}-10x+25$，作出函数 $g\left(x\right)$、$h\left(x\right)$ 的图象如下图所示：




由图可知，函数 $f\left(x\right)$ 的零点个数为 $3$，合乎题意；

④当 $a>10$ 时，设函数 $g\left(x\right)$ 的两个零点分别为 $x_3$、$x_4\left(x_3<x_4\right)$，

要使得函数 $f\left(x\right)$ 至少有 $3$ 个零点，则 $x_3\geq 2$，

可得 $\begin{cases}\dfrac{a}{2}>2\\ g\left(2\right)=4+a-5\geq 0\end{cases}$，解得 $a>4$，此时 $a>10$.

综上所述，实数 $a$ 的取值范围是 $\left[10,+\infty\right)$.

故答案为：$\left[10,+\infty\right)$.

【点睛】方法点睛：已知函数有零点（方程有根）求参数值（取值范围）常用的方法：

（1）直接法：直接求解方程得到方程的根，再通过解不等式确定参数范围；

（2）分离参数法：先将参数分离，转化成求函数的值域问题加以解决；

（3）数形结合法：先对解析式变形，进而构造两个函数，然后在同一平面直角坐标系中画出函数的图象，利用数形结合的方法求解.

## 三、解答题：本大题共 5 小题，共 75 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16. 在 $\triangle ABC$ 中，角 $A$、$B$、$C$ 的对边分别为 $a$，$b$，$c$.已知 $a=\sqrt{6},b=2c,\cos A=-\dfrac{1}{4}$.

（1）求 $c$ 的值；

（2）求 $\sin B$ 的值；

（3）求 $\sin(2A-B)$ 的值.

【答案】（1）$c=1$

（2）$\sin B=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

（3）$\sin(2A-B)=\frac{\sqrt{10}}{8}$

【解析】

【分析】（1）根据余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$以及$b=2c$解方程组即可求出；

（2）由（1）可求出$b=2$，再根据正弦定理即可解出；

（3）先根据二倍角公式求出$\sin 2A,\cos 2A$，再根据两角差的正弦公式即可求出．

【小问1详解】

因为$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即$6=b^2+c^2+\frac{1}{2}bc$，而$b=2c$，代入得$6=4c^2+c^2+c^2$，解得：$c=1$．

【小问2详解】

由（1）可求出$b=2$，而$0<A<\pi$，所以$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，又$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以

$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{2\times\frac{\sqrt{15}}{4}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$．

【小问3详解】

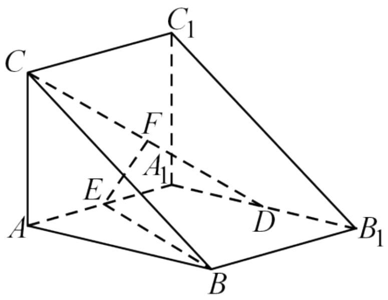
因为$\cos A=-\frac{1}{4}$，所以$\frac{\pi}{2}<A<\pi$，故$0<B<\frac{\pi}{2}$，又$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，所以

$\sin 2A=2\sin A\cos A=2\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times\frac{\sqrt{15}}{4}=-\frac{\sqrt{15}}{8}$，$\cos 2A=2\cos^2 A-1=2\times\frac{1}{16}-1=-\frac{7}{8}$，而

$\sin B=\frac{\sqrt{10}}{4}$，所以$\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

故$\sin(2A-B)=\sin 2A\cos B-\cos 2A\sin B=\left(-\frac{\sqrt{15}}{8}\right)\times\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{7}{8}\times\frac{\sqrt{10}}{4}=\frac{\sqrt{10}}{8}$．

17. 直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AA_1=AB=AC=2, AA_1\perp AB, AC\perp AB$，$D$为$A_1B_1$的中点，$E$为$AA_1$的中点，$F$为$CD$的中点．




（1）求证：$EF//$ 平面 $ABC$；

（2）求直线 $BE$ 与平面 $CC_1D$ 所成角的正弦值；

（3）求平面 $A_1CD$ 与平面 $CC_1D$ 所成二面角的余弦值．

【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{4}{5}$

（3）$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

【解析】

【分析】（1）以点 $A_1$ 为坐标原点，$A_1A$ 、$A_1B_1$ 、$A_1C_1$ 所在直线分别为 $x$ 、$y$ 、$z$ 轴建立空间直角坐标系，利用空间向量法可证得结论成立；

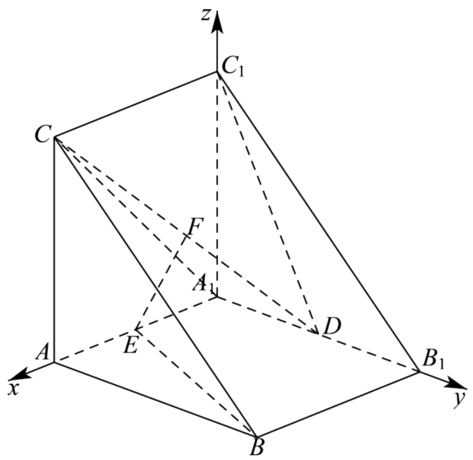
（2）利用空间向量法可求得直线 $BE$ 与平面 $CC_1D$ 夹角的正弦值；

（3）利用空间向量法可求得平面 $A_1CD$ 与平面 $CC_1D$ 夹角的余弦值.

【小问 1 详解】

证明：在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，且 $AC\perp AB$，则 $A_1C_1\perp A_1B_1$

以点 $A_1$ 为坐标原点，$A_1A$ 、$A_1B_1$ 、$A_1C_1$ 所在直线分别为 $x$ 、$y$ 、$z$ 轴建立如下图所示的空间直角坐标系，




则 $A(2,0,0)$、$B(2,2,0)$、$C(2,0,2)$、$A_1(0,0,0)$、$B_1(0,0,2)$、$C_1(0,0,2)$、$D(0,1,0)$、

$E(1,0,0)$、$F\left(1,\frac{1}{2},1\right)$，则 $\overrightarrow{EF}=\left(0,\frac{1}{2},1\right)$，

易知平面 $ABC$ 的一个法向量为 $\vec{m}=(1,0,0)$，则 $\overrightarrow{EF}\cdot\vec{m}=0$，故 $\overrightarrow{EF}\perp\vec{m}$，

$\because EF\not\subset$ 平面 $ABC$，故 $EF//$ 平面 $ABC$.

【小问 2 详解】

解：$\overrightarrow{C_1C}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{C_1D}=(0,1,-2)$，$\overrightarrow{EB}=(1,2,0)$，

设平面 $CC_1D$ 的法向量为 $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\vec{u}\cdot\overrightarrow{C_1C}=2x_1=0\\ \vec{u}\cdot\overrightarrow{C_1D}=y_1-2z_1=0\end{cases}$，

取 $y_1=2$，可得 $\vec{u}=(0,2,1)$，$\cos<\overrightarrow{EB},\vec{u}>=\frac{\overrightarrow{EB}\cdot\vec{u}}{|\overrightarrow{EB}|\cdot|\vec{u}|}=\frac{4}{5}$.

因此，直线 $BE$ 与平面 $CC_1D$ 夹角的正弦值为 $\frac{4}{5}$.

【小问 3 详解】

解：$\overrightarrow{A_1C}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{A_1D}=(0,1,0)$，

设平面 $A_1CD$ 的法向量为 $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\vec{v}\cdot\overrightarrow{A_1C}=2x_2+2z_2=0\\ \vec{v}\cdot\overrightarrow{A_1D}=y_2=0\end{cases}$，

取 $x_2=1$，可得 $\vec{v}=(1,0,-1)$，则 $\cos<\vec{u},\vec{v}>=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=-\frac{1}{\sqrt{5}\times\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，

因此，平面 $A_1CD$ 与平面 $CC_1D$ 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

18. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列，$\{b_n\}$ 是等比数列，且 $a_1=b_1=a_2-b_2=a_3-b_3=1$.

（1）求$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式；

（2）设$\{a_n\}$的前 n 项和为$S_n$，求证：$(S_{n+1}+a_{n+1})b_n=S_{n+1}b_{n+1}-S_nb_n$；

（3）求$\sum_{k=1}^{2n}\left[a_{k+1}-(-1)^k a_k\right]b_k$ .

【答案】（1）$a_n=2n-1,b_n=2^{n-1}$

（2）证明见解析　　（3）$\frac{(3\text{n}-1)4^{n+2}+16}{9}$

【解析】

【分析】（1）利用等差等比数列的通项公式进行基本量运算即可得解；

（2）由等比数列的性质及通项与前 $n$ 项和的关系结合分析法即可得证；

（3）先求得$\left[a_{2k}-(-1)^{2k-1}a_{2k-1}\right]b_{2k-1}+\left[a_{2k+1}-(-1)^{2k}a_{2k}\right]b_{2k}$，进而由并项求和可得$T_n=\sum_{k=1}^{n}k\cdot4^{k+1}$，再结合错位相减法可得解.

【小问 1 详解】

设$\{a_n\}$公差为 $d$，$\{b_n\}$公比为$q$，则$a_n=1+(n-1)d,b_n=q^{n-1}$，

由$a_2-b_2=a_3-b_3=1$可得$\begin{cases}1+d-q=1\\1+2d-q^2=1\end{cases}\Rightarrow d=q=2$（$d=q=0$舍去），

所以$a_n=2n-1,b_n=2^{n-1}$；

【小问 2 详解】

证明：因为$b_{n+1}=2b_n\neq0,$所以要证$(S_{n+1}+a_{n+1})b_n=S_{n+1}b_{n+1}-S_nb_n$，

即证$(S_{n+1}+a_{n+1})b_n=S_{n+1}\cdot2b_n-S_nb_n$，即证$S_{n+1}+a_{n+1}=2S_{n+1}-S_n$，

即证$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$，

而$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$显然成立，所以$(S_{n+1}+a_{n+1})b_n=S_{n+1}\cdot b_{n+1}-S_n\cdot b_n$；

【小问 3 详解】

因为$\left[a_{2k}-(-1)^{2k-1}a_{2k-1}\right]b_{2k-1}+\left[a_{2k+1}-(-1)^{2k}a_{2k}\right]b_{2k}$

$=(4k-1+4k-3)\times2^{2k-1}+[4k+1-(4k-1)]\times2^{2k}=k\times4^{k+1}$，

所以$\sum_{k=1}^{2n}\left[a_{k+1}-(-1)^k a_k\right]b_k=\sum_{k=1}^{n}[(a_{2k}-(-1)^{2k-1}a_{2k-1})b_{2k-1}+(a_{2k+1}-(-1)^{2k}a_{2k})b_{2k}]$

$=\sum_{k=1}^{n}k\times 4^{k+1}$，

设$T_n=\sum_{k=1}^{n}k\cdot 4^{k+1}$

所以$T_n=1\times 4^2+2\times 4^3+3\times 4^4+\cdots+n\times 4^{n+1}$，

则$4T_n=1\times 4^3+2\times 4^4+3\times 4^5+\cdots+n\times 4^{n+2}$，

作差得$-3T_n=4^2+4^3+4^4+\cdots+4^{n+1}-n\times 4^{n+2}=\dfrac{4^2(1-4^n)}{1-4}-n\times 4^{n+2}$

$=\dfrac{(1-3n)4^{n+2}-16}{3}$，

所以$T_n=\dfrac{(3n-1)4^{n+2}+16}{9}$，

所以$\sum_{k=1}^{2n}\left[a_{k+1}-(-1)^k a_k\right]b_k=\dfrac{(3\mathrm{n}-1)4^{n+2}+16}{9}$．

19．椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的右焦点为$F$、右顶点为$A$，上顶点为$B$，且满足$\dfrac{|BF|}{|AB|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

（1）求椭圆的离心率$e$；

（2）直线$l$与椭圆有唯一公共点$M$，与$y$轴相交于$N$（$N$异于$M$）．记$O$为坐标原点，若$|OM|=|ON|$，且$\triangle OMN$的面积为$\sqrt{3}$，求椭圆的标准方程．

【答案】（1）$e=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

（2）$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$

【解析】

【分析】（1）根据已知条件可得出关于$a$、$b$的等量关系，由此可求得该椭圆的离心率的值；

（2）由（1）可知椭圆的方程为$x^2+3y^2=a^2$，设直线$l$的方程为$y=kx+m$，将直线$l$的方程与椭圆方程联立，由$\Delta=0$可得出$3m^2=a^2\left(1+3k^2\right)$，求出点$M$的坐标，利用三角形的面积公式以及已知条件可求

得 $a^2$ 的值，即可得出椭圆的方程.

【小问 1 详解】

解：$\dfrac{|BF|}{|AB|}=\dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{b^2+a^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{b^2+a^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 4a^2=3\left(b^2+a^2\right)\Rightarrow a^2=3b^2$，

离心率为 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

【小问 2 详解】

解：由（1）可知椭圆的方程为 $x^2+3y^2=a^2$，

易知直线 $l$ 的斜率存在，设直线 $l$ 的方程为 $y=kx+m$，

联立 $\begin{cases} y=kx+m \\ x^2+3y^2=a^2 \end{cases}$ 得 $\left(1+3k^2\right)x^2+6kmx+\left(3m^2-a^2\right)=0$，

由 $\Delta=36k^2m^2-4\left(1+3k^2\right)\left(3m^2-a^2\right)=0\Rightarrow 3m^2=a^2\left(1+3k^2\right)$，①

$x_M=-\dfrac{3km}{3k^2+1}$，$y_M=kx_M+m=\dfrac{m}{1+3k^2}$，

由 $|OM|=|ON|$ 可得 $m^2=\dfrac{m^2\left(9k^2+1\right)}{\left(3k^2+1\right)^2}$，②

由 $S_{\triangle OMN}=\sqrt{3}$ 可得 $\dfrac{1}{2}|m|\cdot\dfrac{|3km|}{1+3k^2}=\sqrt{3}$，③

联立①②③可得 $k^2=\dfrac{1}{3}$，$m^2=4$，$a^2=6$，故椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

20. 已知 $a$，$b\in\mathbf{R}$，函数 $f\left(x\right)=e^x-a\sin x,g\left(x\right)=b\sqrt{x}$

（1）求函数 $y=f\left(x\right)$ 在 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）若 $y=f\left(x\right)$ 和 $y=g\left(x\right)$ 有公共点，

（i）当 $a=0$ 时，求 $b$ 的取值范围；

（ii）求证：$a^2+b^2>\mathrm{e}$.

【答案】（1）$y=(1-a)x+1$

（2）（i）$b\in\left[\sqrt{2\mathrm{e}},+\infty\right)$；（ii）证明见解析

【解析】

【分析】（1）求出 $f'(0)$ 可求切线方程；

（2）（i）当 $a=0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 有公共点即为 $s(t)=\mathrm{e}^{t^2}-bt,t\geq 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上有零点，求导后分类讨论结合零点存在定理可求 $b\in[\sqrt{2e},+\infty)$.

（ii）曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 有公共点即 $a\sin x_0+b\sqrt{x_0}-\mathrm{e}^{x_0}=0$，利用点到直线的距离得到 $\sqrt{a^2+b^2}\geq\dfrac{\mathrm{e}^{x_0}}{\sqrt{\sin^2 x_0+x_0}}$，利用导数可证 $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\sin^2 x+x}>\mathrm{e}$，从而可得不等式成立.

【小问 1 详解】

$f'(x)=\mathrm{e}^x-a\cos x$，故 $f'(0)=1-a$，而 $f(0)=1$，

曲线 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=(1-a)(x-0)+1$ 即 $y=(1-a)x+1$.

【小问 2 详解】

（i）当 $a=0$ 时，

因为曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 有公共点，故 $\mathrm{e}^x=b\sqrt{x}$ 有解，

设 $t=\sqrt{x}$，故 $x=t^2$，故 $\mathrm{e}^{t^2}=bt$ 在 $[0,+\infty)$ 上有解，

设 $s(t)=\mathrm{e}^{t^2}-bt,t\geq 0$，故 $s(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有零点，

而 $s'(t)=2t\mathrm{e}^{t^2}-b,t>0$，

若 $b=0$，则 $s(t)=\mathrm{e}^{t^2}>0$ 恒成立，此时 $s(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上无零点，

若 $b<0$，则 $s'(t)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，故 $s(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，

而 $s(0)=1>0$，$s(t)\geq s(0)=1$，故 $s(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上无零点，

故 $b>0$，

设 $u(t)=2t\mathrm{e}^{t^2}-b,t>0$，则 $u'(t)=(2+4t^2)\mathrm{e}^{t^2}>0$，

故 $u(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

而 $u(0)=-b<0$，$u(b)=b\left(2\mathrm{e}^{b^2}-1\right)>0$，

故 $u(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一零点 $t_0$，

且 $0<t<t_0$ 时，$u(t)<0$；$t>t_0$ 时，$u(t)>0$；

故 $0<t<t_0$ 时，$s'(t)<0$；$t>t_0$ 时，$s'(t)>0$；

所以$s(t)$在$(0,t_0)$上为减函数，在$(t_0,+\infty)$上为增函数，

故$s(t)_{\min}=s(t_0)$，

因为$s(t)$在$[0,+\infty)$上有零点，故$s(t_0)\le 0$，故$e^{t_0^2}-bt_0\le 0$，

而$2t_0e^{t_0^2}-b=0$，故$e^{t_0^2}-2t_0^2e^{t_0^2}\le 0$即$t_0\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$，

设$v(t)=2te^{t^2},t>0$，则$v'(t)=(2+4t^2)e^{t^2}>0$，

故$v(t)$在$(0,+\infty)$上为增函数，

而$b=2t_0e^{t_0^2}$，故$b\ge\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2e}$.

（ii）因为曲线$y=f(x)$和$y=g(x)$有公共点，

所以$e^x-a\sin x=b\sqrt{x}$有解$x_0$，其中$x_0\ge 0$，

若$x_0=0$，则$1-a\times 0=b\times 0$，该式不成立，故$x_0>0$.

故$a\sin x_0+b\sqrt{x_0}-e^{x_0}=0$，考虑直线$a\sin x_0+b\sqrt{x_0}-e^{x_0}=0$，

$\sqrt{a^2+b^2}$表示原点与直线$a\sin x_0+b\sqrt{x_0}-e^{x_0}=0$上的动点$(a,b)$之间的距离，

故$\sqrt{a^2+b^2}\ge\frac{e^{x_0}}{\sqrt{\sin^2 x_0+x_0}}$，所以$a^2+b^2\ge\frac{e^{2x_0}}{\sin^2 x_0+x_0}$，

下证：对任意$x>0$，总有$|\sin x|<x$，

证明：当$x\ge\frac{\pi}{2}$时，有$|\sin x|\le 1<\frac{\pi}{2}\le x$，故$|\sin x|<x$成立.

当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，即证$\sin x<x$，

设$p(x)=\sin x-x$，则$p'(x)=\cos x-1\le 0$（不恒为零），

故$p(x)=\sin x-x$在$[0,+\infty)$上为减函数，故$p(x)<p(0)=0$即$\sin<x$成立.

综上，$|\sin x|<x$成立.

下证：当$x>0$时，$e^x>x+1$恒成立，

$q(x)=e^x-1-x,x>0$，则$q'(x)=e^x-1>0$，

故 $q\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上为增函数，故 $q\left(x\right)>q\left(0\right)=0$ 即 $\mathrm{e}^{x}>x+1$ 恒成立.

下证：$\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\sin^{2}x+x}>\mathrm{e}$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上恒成立，即证：$\mathrm{e}^{2x-1}>\sin^{2}x+x$，

即证：$2x-1+1\geq\sin^{2}x+x$，即证：$x\geq\sin^{2}x$，

而 $x>\left|\sin x\right|\geq\sin^{2}x$，故 $x\geq\sin^{2}x$ 成立.

故 $\dfrac{\mathrm{e}^{x_0}}{\sqrt{\sin^{2}x_0+x_0}}>\mathrm{e}$，即 $a^{2}+b^{2}>\mathrm{e}$ 成立.

【点睛】思路点睛：导数背景下零点问题，注意利用函数的单调性结合零点存在定理来处理，而多变量的不等式的成立问题，注意从几何意义取构建不等式关系，再利用分析法来证明目标不等式.