

2005 年重庆高考文科数学真题及答案

注意事项:

1. 答题前, 务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时, 必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦擦干净后, 再选涂其他答案标号。
3. 答非选择题时, 必须使用 0.5 毫米黑色签字笔, 将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答, 在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后, 将试题卷和答题卡一并交回。

参考公式:

如果事件 A、B 互斥, 那么 $P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A、B 相互独立, 那么 $P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 P, 那么 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概

率 $P_n(k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$

第一部分 (选择题 共 50 分)

一、选择题: 本大题共 10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分。在每小题给出的四个备选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 圆 $(x+2)^2 + y^2 = 5$ 关于原点 $(0, 0)$ 对称的圆的方程为 ()

- A. $(x-2)^2 + y^2 = 5$ B. $x^2 + (y-2)^2 = 5$
C. $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 5$ D. $x^2 + (y+2)^2 = 5$

2. $(\cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12})(\cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}) =$ ()

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 若函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数, 在 $(-\infty, 0]$ 上是减函数, 且 $f(x) = 0$, 则使得

$f(x) < 0$ 的 x 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(2, +\infty)$
C. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ D. $(-2, 2)$

4. 设向量 $a = (-1, 2)$, $b = (2, -1)$, 则 $(a \cdot b)(a+b)$ 等于 ()

- A. $(1, 1)$ B. $(-4, -4)$ C. -4 D. $(-2, -2)$

5. 不等式组 $\begin{cases} |x-2| < 2, \\ \log_2(x^2-1) > 1 \end{cases}$ 的解集为 ()

- A. $(0, \sqrt{3})$ B. $(\sqrt{3}, 2)$ C. $(\sqrt{3}, 4)$ D. $(2, 4)$

6. 已知 α, β 均为锐角, 若 $p: \sin \alpha < \sin(\alpha + \beta), q: \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, 则 p 是 q 的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 对于不重合的两个平面 α 与 β , 给定下列条件:

- ①存在平面 γ , 使得 α, β 都垂直于 γ ;
②存在平面 γ , 使得 α, β 都平行于 γ ;
③存在直线 $l \subset \alpha$, 直线 $m \subset \beta$, 使得 $l \parallel m$;
④存在异面直线 l, m , 使得 $l \parallel \alpha, l \parallel \beta, m \parallel \alpha, m \parallel \beta$.

其中, 可以判定 α 与 β 平行的条件有 ()

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

8. 若 $(1+2x)^n$ 展开式中含 x^3 的项的系数等于含 x 的项的系数的 8 倍, 则 n 等于 ()

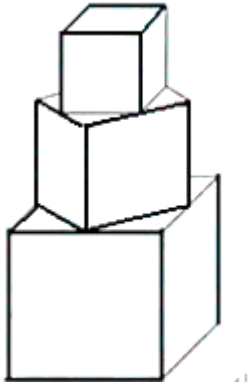
- A. 5 B. 7 C. 9 D. 11

9. 若动点 (x, y) 在曲线 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 上变化, 则 $x^2 + 2y$ 的最大值为 ()

- A. $\begin{cases} \frac{b^2}{4} + 4 & (0 < b < 4) \\ 2b & (b \geq 4) \end{cases}$ B. $\begin{cases} \frac{b^2}{4} + 4 & (0 < b < 2) \\ 2b & (b \geq 2) \end{cases}$

- C. $\frac{b^2}{4} + 4$ D. $2b$

10. 有一塔形几何体由若干个正方体构成, 构成方式如图所示, 上层正方体下底面的四个顶点是下层正方体上底面各边的中点, 已知最底层正方体的棱长为 2, 且该塔形的表面积 (含最底层正方体的底面面积) 超过 39, 则该塔形中正方体的个数至少是 ()



- A. 4 B. 5
C. 6 D. 7

第二部分（非选择题 共 100 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填写在答题卡相应位置上。

11. 若集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - 2)(x - 5) < 0\}$, 则 $A \cap B =$

12. 曲线 $y = x^3$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线与 x 轴、直线 $x = 2$ 所围成的三角形的面积为

13. 已知 α, β 均为锐角, 且 $\cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha - \beta)$, 则 $\tan \alpha =$

14. 若 $x^2 + y^2 = 4$, 则 $x - y$ 的最大值是

15. 若 10 把钥匙中只有 2 把能打开某锁, 则从中任取 2 把能将该锁打开的概率为

16. 已知 $A(-\frac{1}{2}, 0)$, B 是圆 $F: (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = 4$ (F 为圆心) 上一动点, 线段 AB 的垂直平分线交 BF 于 P , 则动点 P 的轨迹方程为

三、解答题：本大题共 6 小题，共 76 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 13 分)

若函数 $f(x) = \frac{1 + \cos 2x}{2 \sin(\frac{\pi}{2} - x)} + \sin x + a^2 \sin(x + \frac{\pi}{4})$ 的最大值为 $\sqrt{2} + 3$, 试确定常数 a 的值.

18. (本小题满分 13 分)

加工某种零件需经过三道工序, 设第一、二、三道工序的合格率分别为 $\frac{9}{10}$ 、 $\frac{8}{9}$ 、 $\frac{7}{8}$, 且各道工序互不影响.

(I) 求该种零件的合格率;

(II) 从该种零件中任取 3 件, 求恰好取到一件合格品的概率和至少取到一件合格品的概率.

19. (本小题满分 13 分)

设函数 $f(x) = 2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax + 8$, 其中 $a \in \mathbb{R}$.

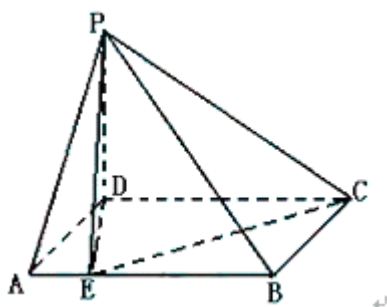
- (1) 若 $f(x)$ 在 $x = 3$ 处取得极值, 求常数 a 的值;
- (2) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为增函数, 求 a 的取值范围.

20. (本小题满分 13 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, E 是 AB 上

一点, $PE \perp EC$. 已知 $PD = \sqrt{2}, CD = 2, AE = \frac{1}{2}$, 求

- (I) 异面直线 PD 与 EC 的距离;
- (II) 二面角 $E-PC-D$ 的大小.



21. (本小题满分 12 分)

已知中心在原点的双曲线 C 的右焦点为 $(2, 0)$, 右顶点为 $(\sqrt{3}, 0)$

- (1) 求双曲线 C 的方程;
- (2) 若直线 $l: y = kx + \sqrt{2}$ 与双曲线 C 恒有两个不同的交点 A 和 B , 且 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} > 2$ (其中 O 为原点). 求 k 的取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ 且 $8a_{n+1}a_n - 16a_{n+1} + 2a_n + 5 = 0 (n \geq 1)$. 记 $b_n = \frac{1}{a_n - \frac{1}{2}} (n \geq 1)$.

- (I) 求 b_1, b_2, b_3, b_4 的值;

(II) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式及数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

参考答案

一、选择题：每小题 5 分，满分 50 分.

1. A 2. D 3. D 4. B 5. C 6. B 7. B 8. A 9. A 10. C

二、填空题：每小题 4 分，满分 24 分.

11. $\{x | 2 < x < 3\}$ 12. $\frac{8}{3}$ 13. 1 14. $2\sqrt{2}$ 15. $\frac{17}{45}$ 16. $x^2 + \frac{4}{3}y^2 = 1$

三、解答题：满分 76 分.

17. (本小题 13 分)

$$f(x) = \frac{1 + 2\cos^2 x - 1}{2\sin(\frac{\pi}{2} - x)} + \sin x + a^2 \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

解：

$$= \frac{2\cos^2 x}{2\cos x} + \sin x + a^2 \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin x + \cos x + a^2 \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$= \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) + a^2 \sin(x + \frac{\pi}{4}) = (\sqrt{2} + a^2) \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

因为 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2} + 3$, $\sin(x + \frac{\pi}{4})$ 的最大值为 1, 则 $\sqrt{2} + a^2 = \sqrt{2} + 3$,

所以 $a = \pm\sqrt{3}$,

18. (本小题 13 分)

$$(I) \text{ 解: } P = \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{10};$$

(II) 解法一： 该种零件的合格品率为 $\frac{7}{10}$, 由独立重复试验的概率公式得：

$$\text{恰好取到一件合格品的概率为 } C_3^1 \cdot \frac{7}{10} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2 = 0.189,$$

$$\text{至少取到一件合格品的概率为 } 1 - \left(\frac{3}{10}\right)^3 = 0.973.$$

解法二：

$$\text{恰好取到一件合格品的概率为 } C_3^1 \cdot \frac{7}{10} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2 = 0.189,$$

因 $\triangle PDC \sim \triangle GHC$, 故 $GH = PD \cdot \frac{CG}{PC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

又 $EG = \sqrt{DE^2 - DG^2} = \sqrt{1^2 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

故在 $Rt\triangle EHG$ 中, $GH = EG$, 因此 $\angle EHG = \frac{\pi}{4}$,

即二面角 $E-PC-D$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$.

解法二:

(I) 以 D 为原点, \overrightarrow{DA} 、 \overrightarrow{DC} 、 \overrightarrow{DP} 分别为 x 、 y 、 z 轴建立空间直角坐标系.

由已知可得 $D(0, 0, 0)$, $P(0, 0, \sqrt{2})$,

$C(0, 2, 0)$ 设 $A(x, 0, 0)(x > 0)$, 则 $B(x, 2, 0)$,

$E(x, \frac{1}{2}, 0)$, $\overrightarrow{PE} = (x, \frac{1}{2}, -\sqrt{2})$, $\overrightarrow{CE} = (x, -\frac{3}{2}, 0)$. 由 $PE \perp CE$ 得 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$,

即 $x^2 - \frac{3}{4} = 0$, 故 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 由 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CE} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0) \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 0) = 0$ 得 $DE \perp CE$,

又 $PD \perp DE$, 故 DE 是异面直线 PD 与 CE 的公垂线, 易得 $|\overrightarrow{DE}| = 1$, 故异面直线 PD 、 CE 的距离为 1.

(II) 作 $DG \perp PC$, 可设 $G(0, y, z)$. 由 $\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{PC} = 0$ 得 $(0, y, z) \cdot (0, 2, -\sqrt{2}) = 0$

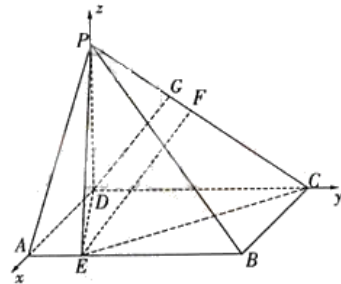
即 $z = \sqrt{2}y$, 故可取 $\overrightarrow{DG} = (0, 1, \sqrt{2})$, 作 $EF \perp PC$ 于 F , 设 $F(0, m, n)$,

则 $\overrightarrow{EF} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, m - \frac{1}{2}, n)$.

由 $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{PC} = 0$ 得 $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, m - \frac{1}{2}, n) \cdot (0, 2, -\sqrt{2}) = 0$, 即 $2m - 1 - \sqrt{2}n = 0$,

又由 F 在 PC 上得 $n = -\frac{\sqrt{2}}{2}m + \sqrt{2}$, 故 $m = 1, n = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\overrightarrow{EF} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

因 $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{DG} \perp \overrightarrow{PC}$, 故平面 $E-PC-D$ 的平面角 θ 的大小为向量 \overrightarrow{EF} 与 \overrightarrow{DG} 的夹角.



故 $\cos \theta = \frac{\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{EF}}{|\overrightarrow{DG}| |\overrightarrow{EF}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \theta = \frac{\pi}{4},$ 即二面角 E—PC—D 的大小为 $\frac{\pi}{4}.$

21. (本小题 12 分)

解: (I) 设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0).$

由已知得 $a = \sqrt{3}, c = 2,$ 再由 $a^2 + b^2 = 2^2,$ 得 $b^2 = 1.$

故双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1.$

(II) 将 $y = kx + \sqrt{2}$ 代入 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 得 $(1 - 3k^2)x^2 - 6\sqrt{2}kx - 9 = 0.$

由直线 l 与双曲线交于不同的两点得 $\begin{cases} 1 - 3k^2 \neq 0, \\ \Delta = (6\sqrt{2}k)^2 + 36(1 - 3k^2) = 36(1 - k^2) > 0. \end{cases}$

即 $k^2 \neq \frac{1}{3}$ 且 $k^2 < 1.$ ① 设 $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B),$ 则

$x_A + x_B = \frac{6\sqrt{2}k}{1 - 3k^2}, x_A x_B = \frac{-9}{1 - 3k^2},$ 由 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} > 2$ 得 $x_A x_B + y_A y_B > 2,$

而 $x_A x_B + y_A y_B = x_A x_B + (kx_A + \sqrt{2})(kx_B + \sqrt{2}) = (k^2 + 1)x_A x_B + \sqrt{2}k(x_A + x_B) + 2$

$= (k^2 + 1) \frac{-9}{1 - 3k^2} + \sqrt{2}k \frac{6\sqrt{2}k}{1 - 3k^2} + 2 = \frac{3k^2 + 7}{3k^2 - 1}.$

于是 $\frac{3k^2 + 7}{3k^2 - 1} > 2,$ 即 $\frac{-3k^2 + 9}{3k^2 - 1} > 0,$ 解此不等式得

$\frac{1}{3} < k^2 < 3.$ ②

由①、②得 $\frac{1}{3} < k^2 < 1.$

故 k 的取值范围为 $(-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, 1).$

22. (本小题 12 分) 解法一:

$$(I) \quad a_1 = 1, \text{ 故 } b_1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2;$$

$$a_2 = \frac{7}{8}, \text{ 故 } b_2 = \frac{1}{\frac{7}{8} - \frac{1}{2}} = \frac{8}{3};$$

$$a_3 = \frac{3}{4}, \text{ 故 } b_3 = \frac{1}{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} = 4;$$

$$a_4 = \frac{13}{20}, \text{ 故 } b_4 = \frac{20}{3}.$$

$$(II) \quad \text{因 } (b_1 - \frac{4}{3})(b_3 - \frac{4}{3}) = \frac{2}{3} \times \frac{8}{3} = (\frac{4}{3})^2,$$

$$(b_2 - \frac{4}{3})^2 = (\frac{4}{3})^2, (b_1 - \frac{4}{3})(b_3 - \frac{4}{3}) = (b_2 - \frac{4}{3})^2$$

故猜想 $\{b_n - \frac{4}{3}\}$ 是首项为 $\frac{2}{3}$, 公比 $q = 2$ 的等比数列.

因 $a_n \neq 2$, (否则将 $a_n = 2$ 代入递推公式会导致矛盾)

$$\text{故 } a_{n+1} = \frac{5 + 2a_n}{16 - 8a_n} \quad (n \geq 1).$$

$$\text{因 } b_{n+1} - \frac{4}{3} = \frac{1}{a_{n+1} - \frac{1}{2}} - \frac{4}{3} = \frac{16 - 8a_n}{6a_n - 3} - \frac{4}{3} = \frac{20 - 16a_n}{6a_n - 3},$$

$$2(b_n - \frac{4}{3}) = \frac{2}{a_n - \frac{1}{2}} - \frac{8}{3} = \frac{20 - 16a_n}{6a_n - 3} = b_{n+1} - \frac{4}{3}, b_1 - \frac{4}{3} \neq 0,$$

故 $\{b_n - \frac{4}{3}\}$ 确是公比为 $q = 2$ 的等比数列.

$$\text{因 } b_1 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}, \text{ 故 } b_n - \frac{4}{3} = \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1}, \quad b_n = \frac{1}{3} \cdot 2^n + \frac{4}{3} \quad (n \geq 1) \quad \text{由 } b_n = \frac{1}{a_n - \frac{1}{2}} \text{ 得 } a_n b_n = \frac{1}{2} b_n + 1,$$

$$\text{故 } S_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + n \\
&= \frac{\frac{1}{3}(1-2^n)}{1-2} + \frac{5}{3}n \\
&= \frac{1}{3}(2^n + 5n - 1)
\end{aligned}$$

解法二:

$$b_n = \frac{1}{a_n - \frac{1}{2}} \text{ 得 } a_n = \frac{1}{b_n} + \frac{1}{2}, \text{ 代入递推关系 } 8a_{n+1}a_n - 16a_{n+1} + 2a_n + 5 = 0,$$

(I) 由

$$\text{整理得 } \frac{4}{b_{n+1}b_n} - \frac{6}{b_{n+1}} + \frac{3}{b_n} = 0, \text{ 即 } b_{n+1} = 2b_n - \frac{4}{3},$$

$$\text{由 } a_1 = 1, \text{ 有 } b_1 = 2, \text{ 所以 } b_2 = \frac{8}{3}, b_3 = 4, b_4 = \frac{20}{3}.$$

$$(II) \text{ 由 } b_{n+1} = 2b_n - \frac{4}{3}, b_{n+1} - \frac{4}{3} = 2(b_n - \frac{4}{3}), b_1 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \neq 0,$$

所以 $\{b_n - \frac{4}{3}\}$ 是首项为 $\frac{2}{3}$, 公比 $q = 2$ 的等比数列, 故

$$b_n - \frac{4}{3} = \frac{1}{3} \cdot 2^n, \text{ 即 } b_n = \frac{1}{3} \cdot 2^n + \frac{4}{3} (n \geq 1).$$

$$\text{由 } b_n = \frac{1}{a_n - \frac{1}{2}} \text{ 得 } a_n b_n = \frac{1}{2} b_n + 1,$$

$$\text{故 } S_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

$$= \frac{1}{2}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + n$$

$$= \frac{\frac{1}{3}(1-2^n)}{1-2} + \frac{5}{3}n$$

$$= \frac{1}{3}(2^n + 5n - 1).$$

解法三:

(I) 同解法一

$$(II) \quad b_2 - b_1 = \frac{2}{3}, b_3 - b_2 = \frac{4}{3}, b_4 - b_3 = \frac{8}{3}, \frac{2}{3} \times \frac{8}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

猜想 $\{b_{n+1} - b_n\}$ 是首项为 $\frac{2}{3}$,公比 $q = 2$ 的等比数列, $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{3} \cdot 2^n$

又因 $a_n \neq 2$,故 $a_{n+1} = \frac{5+2a_n}{16-8a_n} (n \geq 1)$.因此

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{a_{n+1} - \frac{1}{2}} - \frac{1}{a_n - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{5+2a_n}{16-8a_n} - \frac{1}{2}} - \frac{2}{2a_n - 1} \\ &= \frac{16-8a_n}{6a_n - 3} - \frac{6}{6a_n - 3} = \frac{10-8a_n}{6a_n - 3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{n+2} - b_{n+1} &= \frac{1}{a_{n+2} - \frac{1}{2}} - \frac{1}{a_{n+1} - \frac{1}{2}} = \frac{16-8a_{n+1}}{6a_{n+1} - 3} - \frac{16-8a_n}{6a_n - 3} \\ &= \frac{36-24a_n}{6a_n - 3} - \frac{16-8a_n}{6a_n - 3} = \frac{20-16a_n}{6a_n - 3} = 2(b_{n+1} - b_n). \end{aligned}$$

因 $b_2 - b_1 = \frac{2}{3} \neq 0$, $\{b_{n+1} - b_n\}$ 是公比 $q = 2$ 的等比数列, $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{3} \cdot 2^n$,

从而 $b_n = (b_n - b_{n-1}) + (b_{n-1} - b_{n-2}) + \cdots + (b_2 - b_1) + b_1$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3}(2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^1) + 2 \\ &= \frac{1}{3}(2^n - 2) + 2 = \frac{1}{3} \cdot 2^n + \frac{4}{3} (n \geq 1). \end{aligned}$$

由 $b_n = \frac{1}{a_n - \frac{1}{2}}$ 得 $a_n b_n = \frac{1}{2} b_n + 1$,

故 $S_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$

$$= \frac{1}{2}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + n$$

$$= \frac{1}{3} \frac{(1-2^n)}{1-2} + \frac{5}{3} n$$

$$= \frac{1}{3}(2^n + 5n - 1).$$