

## 2020年浙江省高考数学试卷（解析版）

一、选择题：本大题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $P = \{x | 1 < x < 4\}$ ,  $Q = \{x | 2 < x < 3\}$ , 则  $P \cap Q =$  ( )

- A.  $\{x | 1 < x \leq 2\}$       B.  $\{x | 2 < x < 3\}$       C.  $\{x | 3 \leq x < 4\}$       D.  $\{x | 1 < x < 4\}$

【分析】直接利用交集的运算法则求解即可.

解: 集合  $P = \{x | 1 < x < 4\}$ ,  $Q = \{x | 2 < x < 3\}$ ,

则  $P \cap Q = \{x | 2 < x < 3\}$ .

故选: B.

2. 已知  $a \in \mathbb{R}$ , 若  $a - 1 + (a - 2)i$  ( $i$  为虚数单位) 是实数, 则  $a =$  ( )

- A. 1      B. -1      C. 2      D. -2

【分析】利用复数的虚部为0, 求解即可.

解:  $a \in \mathbb{R}$ , 若  $a - 1 + (a - 2)i$  ( $i$  为虚数单位) 是实数,

可得  $a - 2 = 0$ , 解得  $a = 2$ .

故选: C.

3. 若实数  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - 3y + 1 \leq 0 \\ x + y - 3 \geq 0 \end{cases}$ , 则  $z = x + 2y$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-\infty, 4]$       B.  $[4, +\infty)$       C.  $[5, +\infty)$       D.  $(-\infty, +\infty)$

【分析】作出不等式组表示的平面区域; 作出目标函数对应的直线; 结合图象判断目标函数  $z = x + 2y$  的取值范围.

解: 画出实数  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - 3y + 1 \leq 0 \\ x + y - 3 \geq 0 \end{cases}$  所示的平面区域, 如图:

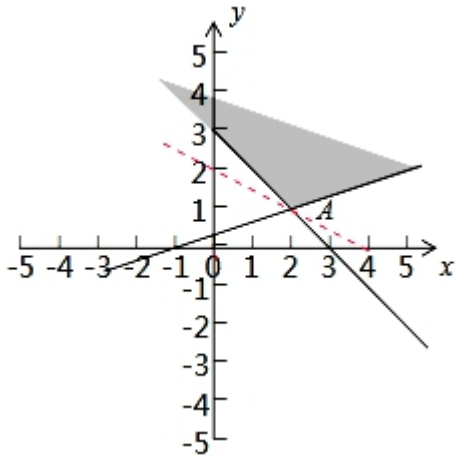
将目标函数变形为  $-\frac{1}{2}x + \frac{z}{2} = y$ ,

则  $z$  表示直线在  $y$  轴上截距, 截距越大,  $z$  越大,

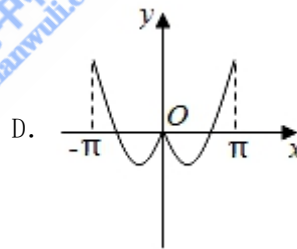
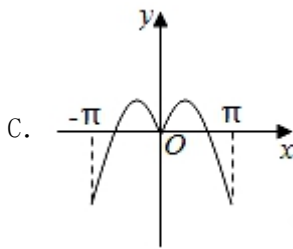
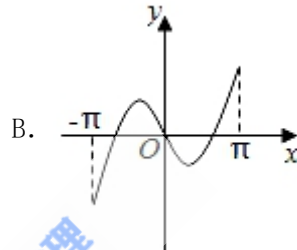
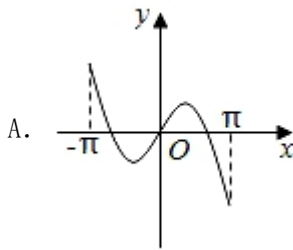
当目标函数过点  $A(2, 1)$  时, 截距最小为  $z = 2 + 2 = 4$ , 随着目标函数向上移动截距越来越大,

故目标函数  $z = x + 2y$  的取值范围是  $[4, +\infty)$ .

故选: B.



4. 函数  $y = x\cos x + \sin x$  在区间  $[-\pi, +\pi]$  的图象大致为 ( )



【分析】先判断函数的奇偶性，再判断函数值的特点。

解：  $y = f(x) = x\cos x + \sin x$ ,

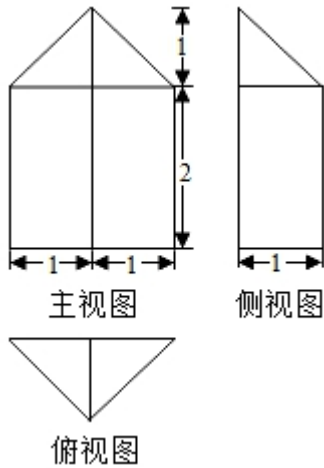
则  $f(-x) = -x\cos x - \sin x = -f(x)$ ,

$\therefore f(x)$  为奇函数，函数图象关于原点对称，故排除 B, D,

当  $x = \pi$  时，  $y = f(\pi) = \pi \cos \pi + \sin \pi = -\pi < 0$ ，故排除 B,

故选： A.

5. 某几何体的三视图 (单位:  $cm$ ) 如图所示，则该几何体的体积 (单位:  $cm^3$ ) 是 ( )



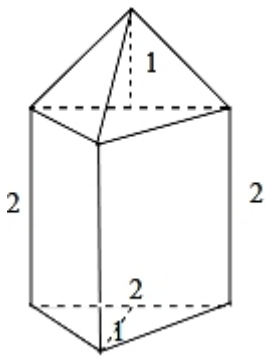
- A.  $\frac{7}{3}$                       B.  $\frac{14}{3}$                       C. 3                      D. 6

【分析】画出几何体的直观图，利用三视图的数据求解几何体的体积即可.

解：由题意可知几何体的直观图如图，下部是直三棱柱，底面是斜边长为 2 的等腰直角三角形，棱锥的高为 2，上部是一个三棱锥，一个侧面与底面等腰直角三角形垂直，棱锥的高为 1，

$$\text{所以几何体的体积为: } \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times 2 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times 1 = \frac{7}{3}.$$

故选：A.



6. 已知空间中不过同一点的三条直线  $m, n, l$ ，则“ $m, n, l$  在同一平面”是“ $m, n, l$  两两相交”的 ( )

- A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
C. 充分必要条件                      D. 既不充分也不必要条件

【分析】由  $m, n, l$  在同一平面，则  $m, n, l$  相交或  $m, n, l$  有两个平行，另一直线与之相交，或三条直线两两平行，根据充分条件，必要条件的定义即可判断.

解：空间中不过同一点的三条直线  $m, n, l$ ，若  $m, n, l$  在同一平面，则  $m, n, l$  相交或  $m, n, l$  有两个平行，另一直线与之相交，或三条直线两两平行.

故  $m, n, l$  在同一平面”是“ $m, n, l$  两两相交”的必要不充分条件,

故选:  $B$ .

7. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ , 公差  $d \neq 0$ ,  $\frac{a_1}{d} \leq 1$ . 记  $b_1 = S_2$ ,  $b_{n+1} = S_{n+2} - S_{2n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

下列等式不可能成立的是 ( )

- A.  $2a_4 = a_2 + a_6$       B.  $2b_4 = b_2 + b_6$       C.  $a_4^2 = a_2 a_8$       D.  $b_4^2 = b_2 b_8$

【分析】由已知利用等差数列的通项公式判断  $A$  与  $C$ ; 由数列递推式分别求得  $b_2, b_4, b_6, b_8$ , 分析  $B, D$  成立时是否满足公差  $d \neq 0$ ,  $\frac{a_1}{d} \leq 1$  判断  $B$  与  $D$ .

解: 在等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_n = a_1 + (n-1)d$ ,

$$S_{n+2} = (n+2)a_1 + \frac{(n+2)(n+1)}{2}d, \quad S_{2n} = 2na_1 + \frac{2n(2n-1)}{2}d,$$

$$b_1 = S_2 = 2a_1 + d, \quad b_{n+1} = S_{n+2} - S_{2n} = (2-n)a_1 - \frac{3n^2 - 5n - 2}{2}d.$$

$$\therefore b_2 = a_1 + 2d, \quad b_4 = -a_1 - 5d, \quad b_6 = -3a_1 - 24d, \quad b_8 = -5a_1 - 55d.$$

A.  $2a_4 = 2(a_1 + 3d) = 2a_1 + 6d$ ,  $a_2 + a_6 = a_1 + d + a_1 + 5d = 2a_1 + 6d$ , 故  $A$  正确;

$$B. 2b_4 = -2a_1 - 10d, \quad b_2 + b_6 = a_1 + 2d - 3a_1 - 24d = -2a_1 - 22d,$$

若  $2b_4 = b_2 + b_6$ , 则  $-2a_1 - 10d = -2a_1 - 22d$ , 即  $d = 0$ , 不合题意, 故  $B$  错误;

$$C. \text{若 } a_4^2 = a_2 a_8, \text{ 则 } (a_1 + 3d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 7d),$$

$$\text{即 } a_1^2 + 6a_1d + 9d^2 = a_1^2 + 8a_1d + 7d^2, \text{ 得 } a_1d = d^2,$$

$\therefore d \neq 0, \therefore a_1 = d$ , 符合  $\frac{a_1}{d} \leq 1$ , 故  $C$  正确;

$$D. \text{若 } b_4^2 = b_2 b_8, \text{ 则 } (-a_1 - 5d)^2 = (a_1 + 2d)(-5a_1 - 55d),$$

$$\text{即 } 2\left(\frac{a_1}{d}\right)^2 + 25\frac{a_1}{d} + 45 = 0, \text{ 则 } \frac{a_1}{d} \text{ 有两不等负根, 满足 } \frac{a_1}{d} \leq 1, \text{ 故 } D \text{ 正确.}$$

$\therefore$  等式不可能成立的是  $B$ .

故选:  $B$ .

8. 已知点  $O(0, 0)$ ,  $A(-2, 0)$ ,  $B(2, 0)$ . 设点  $P$  满足  $|PA| - |PB| = 2$ , 且  $P$  为函数

$y = 3\sqrt{4-x^2}$  图象上的点, 则  $|OP| =$  ( )

- A.  $\frac{\sqrt{22}}{2}$       B.  $\frac{4\sqrt{10}}{5}$       C.  $\sqrt{7}$       D.  $\sqrt{10}$

【分析】求出  $P$  满足的轨迹方程, 求出  $P$  的坐标, 即可求解  $|OP|$ .

解: 点  $O(0, 0)$ ,  $A(-2, 0)$ ,  $B(2, 0)$ . 设点  $P$  满足  $|PA| - |PB| = 2$ ,

可知  $P$  的轨迹是双曲线  $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$  的右支上的点，

$P$  为函数  $y = 3\sqrt{4-x^2}$  图象上的点，即  $\frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{4} = 1$  在第一象限的点，

联立两个方程，解得  $P\left(\frac{\sqrt{13}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ ，

所以  $|OP| = \sqrt{\frac{13}{4} + \frac{27}{4}} = \sqrt{10}$ .

故选：D.

9. 已知  $a, b \in \mathbb{R}$  且  $ab \neq 0$ ，若  $(x-a)(x-b)(x-2a-b) \geq 0$  在  $x \geq 0$  上恒成立，则 ( )

- A.  $a < 0$                       B.  $a > 0$                       C.  $b < 0$                       D.  $b > 0$

【分析】设  $f(x) = (x-a)(x-b)(x-2a-b)$ ，求得  $f(x)$  的零点，根据  $f(0) \geq 0$  恒成立，讨论  $a, b$  的符号，结合三次函数的图象，即可得到结论.

解：设  $f(x) = (x-a)(x-b)(x-2a-b)$ ，可得  $f(x)$  的图象与  $x$  轴有三个交点，即  $f(x)$  有三个零点  $a, b, 2a+b$  且  $f(0) = -ab(2a+b)$ ，

由题意知， $f(0) \geq 0$  恒成立，则  $ab(2a+b) \leq 0$ ， $a < 0$ ， $b < 0$ ，

可得  $2a+b < 0$ ， $ab(2a+b) \leq 0$  恒成立，排除 B, D;

我们考虑零点重合的情况，即中间和右边的零点重合，左边的零点在负半轴上.

则有  $a=b$  或  $a=2a+b$  或  $b=b+2a$  三种情况，此时  $a=b < 0$  显然成立；

若  $b=b+2a$ ，则  $a=0$  不成立；

若  $a=2a+b$ ，即  $a+b=0$ ，可得  $b < 0$ ， $a > 0$  且  $a$  和  $2a+b$  都在正半轴上，符合题意，

综上  $b < 0$  恒成立.

故选：C.

10. 设集合  $S, T, S \subseteq \mathbb{N}^*$ ， $T \subseteq \mathbb{N}^*$ ， $S, T$  中至少有两个元素，且  $S, T$  满足：

①对于任意  $x, y \in S$ ，若  $x \neq y$ ，都有  $xy \in T$ ；

②对于任意  $x, y \in T$ ，若  $x < y$ ，则  $\frac{y}{x} \in S$ ；下列命题正确的是 ( )

- A. 若  $S$  有 4 个元素，则  $S \cup T$  有 7 个元素  
B. 若  $S$  有 4 个元素，则  $S \cup T$  有 6 个元素  
C. 若  $S$  有 3 个元素，则  $S \cup T$  有 4 个元素  
D. 若  $S$  有 3 个元素，则  $S \cup T$  有 5 个元素

【分析】利用特殊集合排除选项，推出结果即可.

解：取： $S = \{1, 2, 4\}$ ，则  $T = \{2, 4, 8\}$ ， $S \cup T = \{1, 2, 4, 8\}$ ，4 个元素，排除 C。

$S = \{2, 4, 8\}$ ，则  $T = \{8, 16, 32\}$ ， $S \cup T = \{2, 4, 8, 16, 32\}$ ，5 个元素，排除 D。

$S = \{2, 4, 8, 16\}$  则  $T = \{8, 16, 32, 64, 128\}$ ， $S \cup T = \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128\}$ ，

7 个元素，排除 B。

故选：A。

二、填空题：本大题共 7 小题，共 36 分。多空题每小题 4 分；单空题每小题 4 分。

11. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ，则  $S_3 = \underline{10}$ 。

【分析】求出数列的前 3 项，然后求解即可。

解：数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ，

可得  $a_1 = 1$ ， $a_2 = 3$ ， $a_3 = 6$ ，

所以  $S_3 = 1 + 3 + 6 = 10$ 。

故答案为：10。

12. 设  $(1+2x)^5 = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + a_5x^4 + a_6x^5$ ，则  $a_5 = \underline{\hspace{2cm}}$ ； $a_1 + a_2 + a_3 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解析】 $(1+2x)^5$  的通项为  $T_{r+1} = C_5^r (2x)^r = 2^r C_5^r x^r$ ，令  $r = 4$ ，则  $T_5 = 2^4 C_5^4 x^4 = 80x^4$ ，故  $a_5 = 80$ ；

$a_1 + a_3 + a_5 = 2^1 C_5^1 + 2^3 C_5^3 + 2^5 C_5^5 = 122$ 。

13. 已知  $\tan \theta = 2$ ，则  $\cos 2\theta = \underline{-\frac{3}{5}}$ ； $\tan(\theta - \frac{\pi}{4}) = \underline{-\frac{1}{3}}$ 。

【分析】利用二倍角公式以及同角三角函数基本关系式求解第一问，利用两角和与差的三角函数转化求解第二问。

解： $\tan \theta = 2$ ，

则  $\cos 2\theta = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1 - 4}{1 + 4} = -\frac{3}{5}$ 。

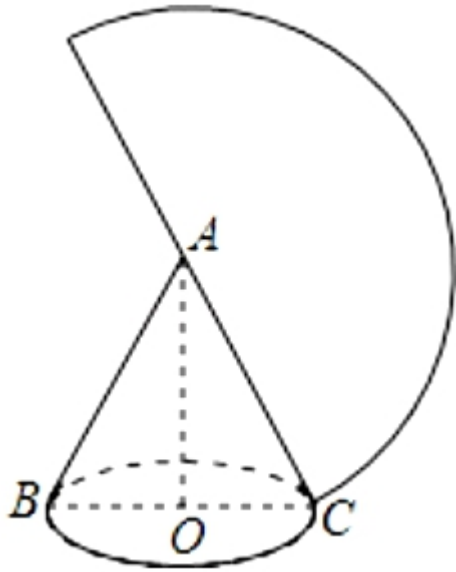
$\tan(\theta - \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan \theta - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \theta \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{2 - 1}{1 + 2 \times 1} = \frac{1}{3}$ 。

故答案为： $-\frac{3}{5}$ ； $\frac{1}{3}$ 。

14. 已知圆锥展开图的侧面积为  $2\pi$ ，且为半圆，则底面半径为 1。

【分析】利用圆锥的侧面积，求出母线长，求解底面圆的周长，然后求解底面半径。

解： $\because$ 圆锥侧面展开图是半圆，面积为  $2\pi$ ，



设圆锥的母线长为  $a$ ，则  $\frac{1}{2} \times a^2 \pi = 2\pi$ ， $\therefore a=2$ ，

$\therefore$  侧面展开扇形的弧长为  $2\pi$ ，

设圆锥的底面半径  $OC=r$ ，则  $2\pi r=2\pi$ ，解得  $r=1$ 。

故答案为：1。

15. 设直线  $l: y=kx+b$  ( $k>0$ )，圆  $C_1: x^2+y^2=1$ ， $C_2: (x-4)^2+y^2=1$ ，若直线  $l$  与  $C_1$ ， $C_2$  都相切，则  $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ； $b=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。

【分析】根据直线  $l$  与两圆都相切，分别列出方程  $d_1=\frac{|b|}{\sqrt{1+k^2}}=1$ ， $d_2=\frac{|4k+b|}{\sqrt{1+k^2}}=1$ ，

解得即可。

解：由条件得  $C_1(0, 0)$ ， $r_1=1$ ， $C_2(4, 0)$ ， $r_2=1$ ，

因为直线  $l$  与  $C_1$ ， $C_2$  都相切，

$$\text{故有 } d_1=\frac{|b|}{\sqrt{1+k^2}}=1, \quad d_2=\frac{|4k+b|}{\sqrt{1+k^2}}=1,$$

$$\text{则有 } \frac{|b|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|4k+b|}{\sqrt{1+k^2}}, \text{ 故可得 } b^2=(4k+b)^2, \text{ 整理得 } k(2k+b)=0,$$

因为  $k>0$ ，所以  $2k+b=0$ ，即  $b=-2k$ ，

$$\text{代入 } d_1=\frac{|b|}{\sqrt{1+k^2}}=1, \text{ 解得 } k=\frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 则 } b=-\frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

16. 一个盒子里有 1 个红 1 个绿 2 个黄四个相同的球，每次拿一个，不放回，拿出红球即停，设拿出黄球的个数为  $\xi$ ，则  $P(\xi=0) = \underline{\frac{1}{3}}$ ； $E(\xi) = \underline{1}$ 。

【分析】由题意知随机变量  $\xi$  的可能取值为 0, 1, 2；分别计算  $P(\xi=0)$ 、 $P(\xi=1)$  和  $P(\xi=2)$ ，再求  $E(\xi)$  的值。

解：由题意知，随机变量  $\xi$  的可能取值为 0, 1, 2；

$$\text{计算 } P(\xi=0) = \frac{C_1^1 \cdot C_1^1 \cdot C_1^1}{C_4^1 + C_4^1 \cdot C_3^1} = \frac{1}{3};$$

$$P(\xi=1) = \frac{C_2^1 \cdot C_1^1}{A_4^2} + \frac{C_2^1 C_1^1 A_2^2 C_1^1}{A_4^3} = \frac{1}{3};$$

$$P(\xi=2) = \frac{A_2^2 \cdot C_1^1}{A_4^3} + \frac{C_2^2 C_1^1 \frac{A_3^3}{A_2^2} C_1^1}{A_4^4} = \frac{1}{3};$$

$$\text{所以 } E(\xi) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 1.$$

故答案为： $\frac{1}{3}$ ，1。

17. 设  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  为单位向量，满足  $|2\vec{e}_1 - \vec{e}_2| \leq \sqrt{2}$ ， $\vec{a} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ ， $\vec{b} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ ，设  $\vec{a}, \vec{b}$  的夹角为  $\theta$ ，则  $\cos^2 \theta$  的最小值为  $\underline{\frac{28}{29}}$ 。

【分析】设  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  的夹角为  $\alpha$ ，由题意求出  $\cos \alpha \geq \frac{3}{4}$ ；

再求  $\vec{a}, \vec{b}$  的夹角  $\theta$  的余弦值  $\cos^2 \theta$  的最小值即可。

解：设  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  的夹角为  $\alpha$ ，由  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  为单位向量，满足  $|2\vec{e}_1 - \vec{e}_2| \leq \sqrt{2}$ ，

$$\text{所以 } 4\vec{e}_1^2 - 4\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_2^2 = 4 - 4\cos \alpha + 1 \leq 2,$$

$$\text{解得 } \cos \alpha \geq \frac{3}{4};$$

又  $\vec{a} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ ， $\vec{b} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ ，且  $\vec{a}, \vec{b}$  的夹角为  $\theta$ ，

$$\text{所以 } \vec{a} \cdot \vec{b} = 3\vec{e}_1^2 + 4\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_2^2 = 4 + 4\cos \alpha,$$

$$\vec{a}^2 = \vec{e}_1^2 + 2\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_2^2 = 2 + 2\cos \alpha,$$

$$\vec{b}^2 = 9\vec{e}_1^2 + 6\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_2^2 = 10 + 6\cos \alpha;$$

$$\text{则 } \cos^2 \theta = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{\vec{a}^2 \times \vec{b}^2} = \frac{(4+4\cos \alpha)^2}{(2+2\cos \alpha)(10+6\cos \alpha)} = \frac{4+4\cos \alpha}{5+3\cos \alpha} = \frac{4}{3} - \frac{\frac{8}{3}}{5+3\cos \alpha},$$

$$\text{所以 } \cos \alpha = \frac{3}{4} \text{ 时, } \cos^2 \theta \text{ 取得最小值为 } \frac{4}{3} - \frac{\frac{8}{3}}{5+3 \times \frac{3}{4}} = \frac{28}{29}.$$

故答案为:  $\frac{28}{29}$ .

三、解答题: 本大题共 5 小题, 共 74 分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

18. 在锐角  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $2b\sin A = \sqrt{3}a$ .

(I) 求角  $B$ ;

(II) 求  $\cos A + \cos B + \cos C$  的取值范围.

【分析】(I) 根据正弦定理可得  $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 结合角的范围, 即可求出,

(II) 根据两角和差的余弦公式, 以及利用正弦函数的性质即可求出.

解: (I)  $\because 2b\sin A = \sqrt{3}a$ ,

$$\therefore 2\sin B \sin A = \sqrt{3}\sin A,$$

$$\because \sin A \neq 0,$$

$$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore B = \frac{\pi}{3},$$

(II)  $\because \triangle ABC$  为锐角三角形,  $B = \frac{\pi}{3}$ ,

$$\therefore C = \frac{2\pi}{3} - A,$$

$$\therefore \cos A + \cos B + \cos C = \cos A + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - A\right) + \cos \frac{\pi}{3} = \cos A - \frac{1}{2}\cos A + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin A + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cos A +$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A + \frac{1}{2} = \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2},$$

$\triangle ABC$  为锐角三角形,  $0 < A < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < C < \frac{\pi}{2}$ ,

解得  $\frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{2}$ ,

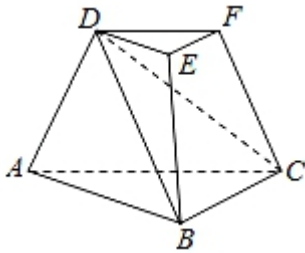
$$\therefore \frac{\pi}{3} < A + \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3},$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\sqrt{3}}{2} < \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) &\leq 1, \\ \therefore \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} < \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) + 1 &\leq \frac{3}{2}, \\ \therefore \cos A + \cos B + \cos C \text{ 的取值范围} &\text{为 } \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{3}{2}\right]. \end{aligned}$$

19. 如图，三棱台  $DEF-ABC$  中，面  $ADFC \perp$  面  $ABC$ ， $\angle ACB = \angle ACD = 45^\circ$ ， $DC = 2BC$ 。

(I) 证明： $EF \perp DB$ ；

(II) 求  $DF$  与面  $DBC$  所成角的正弦值。



【分析】(I) 题根据已知条件，作  $DH \perp AC$ ，根据面面垂直，可得  $DH \perp BC$ ，进一步根据直角三角形的知识可判断出  $\triangle BHC$  是直角三角形，且  $\angle HBC = 90^\circ$ ，则  $HB \perp BC$ ，从而可证出  $BC \perp$  面  $DHB$ ，最后根据棱台的定义有  $EF \parallel BC$ ，根据平行线的性质可得  $EF \perp DB$ ；

(II) 题先可设  $BC = 1$ ，根据解直角三角形可得  $BH = 1$ ， $HC = \sqrt{2}$ ， $DH = \sqrt{2}$ ， $DC = 2$ ， $DB = \sqrt{3}$ ，然后找到  $CH$  与面  $DBC$  的夹角即为  $\angle HCG$ ，根据棱台的特点可知  $DF$  与面  $DBC$  所成角与  $CH$  与面  $DBC$  的夹角相等，通过计算  $\angle HCG$  的正弦值，即可得到  $DF$  与面  $DBC$  所成角的正弦值。

解：(I) 证明：作  $DH \perp AC$ ，且交  $AC$  于点  $H$ ，

$\because$  面  $ADFC \perp$  面  $ABC$ ， $DH \subset$  面  $ADFC$ ， $\therefore DH \perp BC$ ，

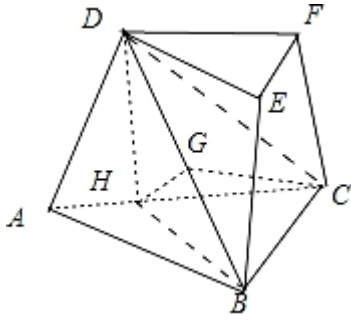
$\therefore$  在  $\text{Rt}\triangle DHC$  中， $CH = CD \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} CD$ ，

$\because DC = 2BC$ ， $\therefore CH = \frac{\sqrt{2}}{2} CD = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2BC = \sqrt{2} \cdot BC$ ，

$\therefore \frac{BC}{CH} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，即  $\triangle BHC$  是直角三角形，且  $\angle HBC = 90^\circ$ ，

$\therefore HB \perp BC$ ， $\therefore BC \perp$  面  $DHB$ ， $\because BD \subset$  面  $DHB$ ， $\therefore BC \perp BD$ ，

$\because$  在三棱台  $DEF-ABC$  中， $EF \parallel BC$ ， $\therefore EF \perp DB$ 。



(II) 设  $BC=1$ , 则  $BH=1$ ,  $HC=\sqrt{2}$ ,

在  $\text{Rt}\triangle DHC$  中,  $DH=\sqrt{2}$ ,  $DC=2$ ,

在  $\text{Rt}\triangle DHB$  中,  $DB=\sqrt{DH^2+HB^2}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$ ,

作  $HG\perp BD$  于  $G$ ,  $\because BC\perp HG$ ,  $\therefore HG\perp$  面  $BCD$ ,  $\because GC\subset$  面  $BCD$ ,

$\therefore HG\perp GC$ ,  $\therefore \triangle HGC$  是直角三角形, 且  $\angle HGC=90^\circ$ ,

设  $DF$  与面  $DBC$  所成角为  $\theta$ , 则  $\theta$  即为  $CH$  与面  $DBC$  的夹角,

$$\text{且 } \sin \theta = \sin \angle HCG = \frac{HG}{HC} = \frac{HG}{\sqrt{2}},$$

$\because$  在  $\text{Rt}\triangle DHB$  中,  $DH \cdot HB = BD \cdot HG$ ,

$$\therefore HG = \frac{DH \cdot HB}{BD} = \frac{\sqrt{2} \cdot 1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{HG}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

20. 已知数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ ,  $\{c_n\}$  中,  $a_1=b_1=c_1=1$ ,  $c_{n+1}=a_{n+1}-a_n$ ,  $c_{n+1}=\frac{b_n}{b_{n+2}} \cdot c_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

(I) 若数列  $\{b_n\}$  为等比数列, 且公比  $q>0$ , 且  $b_1+b_2=6b_3$ , 求  $q$  与  $a_n$  的通项公式;

(II) 若数列  $\{b_n\}$  为等差数列, 且公差  $d>0$ , 证明:  $c_1+c_2+\dots+c_n < 1+\frac{1}{d}$ .

【分析】本题第 (I) 题先根据等比数列的通项公式将  $b_2=q$ ,  $b_3=q^2$  代入  $b_1+b_2=6b_3$ , 计

算出公比  $q$  的值, 然后根据等比数列的定义化简  $c_{n+1}=\frac{b_n}{b_{n+2}} \cdot c_n$  可得  $c_{n+1}=4c_n$ , 则可发现

数列  $\{c_n\}$  是以 1 为首项, 4 为公比的等比数列, 从而可得数列  $\{c_n\}$  的通项公式, 然后将通项公式代入  $c_{n+1}=a_{n+1}-a_n$ , 可得  $a_{n+1}-a_n=c_{n+1}=4^n$ , 再根据此递推公式的特点运用累加法可计算出数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

第 (II) 题通过将已知关系式  $c_{n+1}=\frac{b_n}{b_{n+2}} \cdot c_n$  不断进行转化可构造出数列  $\{b_n b_{n+1} c_n\}$ , 且可

得到数列  $\{b_n b_{n+1} c_n\}$  是一个常数列，且此常数为  $1+d$ ，从而可得  $b_n b_{n+1} c_n = 1+d$ ，再计算得到  $c_n = \frac{1+d}{b_n b_{n+1}}$ ，根据等差数列的特点进行转化进行裂项，在求和时相消，最后运用放缩法即可证明不等式成立。

【解答】（I）解：由题意， $b_2 = q$ ， $b_3 = q^2$ ，

$$\therefore b_1 + b_2 = 6b_3, \therefore 1 + q = 6q^2,$$

整理，得  $6q^2 - q - 1 = 0$ ，

$$\text{解得 } q = -\frac{1}{3} \text{ (舍去)}, \text{ 或 } q = \frac{1}{2},$$

$$\therefore c_{n+1} = \frac{b_n}{b_{n+2}} \cdot c_n = \frac{1}{\frac{b_{n+2}}{b_n}} \cdot c_n = \frac{1}{q^2} \cdot c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot c_n = 4 \cdot c_n,$$

$\therefore$  数列  $\{c_n\}$  是以 1 为首项，4 为公比的等比数列，

$$\therefore c_n = 1 \cdot 4^{n-1} = 4^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\therefore a_{n+1} - a_n = c_{n+1} = 4^n,$$

则  $a_1 = 1$ ，

$$a_2 - a_1 = 4^1,$$

$$a_3 - a_2 = 4^2,$$

•

•

•

$$a_n - a_{n-1} = 4^{n-1},$$

各项相加，可得

$$a_n = 1 + 4^1 + 4^2 + \dots + 4^{n-1} = \frac{1-4^n}{1-4} = \frac{4^n-1}{3}.$$

（II）证明：依题意，由  $c_{n+1} = \frac{b_n}{b_{n+2}} \cdot c_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ )，可得

$$b_{n+2} \cdot c_{n+1} = b_n \cdot c_n,$$

两边同时乘以  $b_{n+1}$ ，可得

$$b_{n+1} b_{n+2} c_{n+1} = b_n b_{n+1} c_n,$$

$$\therefore b_1 b_2 c_1 = b_2 = 1+d,$$

$\therefore$  数列  $\{b_n b_{n+1} c_n\}$  是一个常数列，且此常数为  $1+d$ ，

$$b_n b_{n+1} c_n = 1 + d,$$

$$\therefore c_n = \frac{1+d}{b_n b_{n+1}} = \frac{1+d}{d} \cdot \frac{d}{b_n b_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{d}\right) \cdot \frac{b_{n+1} - b_n}{b_n b_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{d}\right) \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}\right),$$

$$\therefore c_1 + c_2 + \dots + c_n$$

$$= \left(1 + \frac{1}{d}\right) \left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2}\right) + \left(1 + \frac{1}{d}\right) \left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_3}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{d}\right) \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{d}\right) \left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_3} + \dots + \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{d}\right) \left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{n+1}}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{d}\right) \left(1 - \frac{1}{b_{n+1}}\right)$$

$$< 1 + \frac{1}{d},$$

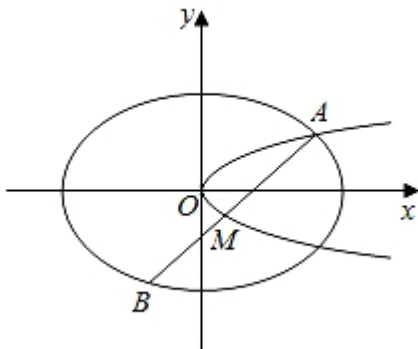
$$\therefore c_1 + c_2 + \dots + c_n < 1 + \frac{1}{d}, \text{ 故得证.}$$

21. 如图, 已知椭圆  $C_1: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ , 抛物线  $C_2: y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ), 点  $A$  是椭圆  $C_1$  与抛物线

$C_2$  的交点, 过点  $A$  的直线  $l$  交椭圆  $C_1$  于点  $B$ , 交抛物线  $C_2$  于  $M$  ( $B, M$  不同于  $A$ ).

(I) 若  $p = \frac{1}{16}$ , 求抛物线  $C_2$  的焦点坐标;

(II) 若存在不过原点的直线  $l$  使  $M$  为线段  $AB$  的中点, 求  $p$  的最大值.



【分析】(I) 直接由抛物线的定义求出焦点坐标即可;

(II) 设直线方程  $y = kx + t$ ,  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $M(x_0, y_0)$ , 由 
$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \\ y = kx + t \end{cases}$$

根据韦达定理定理求出  $M\left(-\frac{2kt}{1+2k^2}, \frac{t}{1+2k^2}\right)$ , 可得  $p$ , 再由 
$$\begin{cases} y^2 = 2px, \\ y = kx + t \end{cases}$$
 求出点  $A$

的坐标，代入椭圆方程可得  $t^2 = \frac{8k^6}{(1+2k^2)^2+2k^2}$ ，化简整理得  $p^2 =$

$\frac{k^4}{2(1+2k^2)^2 \cdot [(1+2k^2)^2+2k^2]}$ ，利用基本不等式即可求出  $p$  的最大值。

解：（I） $p = \frac{1}{16}$ ，则  $\frac{p}{2} = \frac{1}{32}$ ，则抛物线  $C_2$  的焦点坐标  $(\frac{1}{32}, 0)$ ，

（II）直线  $l$  与  $x$  轴垂直时，此时点  $M$  与点  $A$  或点  $B$  重合，不满足题意，

设直线  $l$  的方程为  $y = kx + t$ ， $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ， $M(x_0, y_0)$ ，

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \\ y = kx + t \end{cases} \text{消} y \text{ 可得 } (2k^2+1)x^2 + 4kty + 2t^2 - 2 = 0,$$

$$\therefore \Delta = 16k^2t^2 - 4(2k^2+1)(2t^2-2) \geq 0, \text{ 即 } t^2 < 1+2k^2,$$

$$\therefore x_1+x_2 = -\frac{4kt}{1+2k^2}, \therefore x_0 = \frac{1}{2}(x_1+x_2) = -\frac{2kt}{1+2k^2},$$

$$\therefore y_0 = kx_0 + t = \frac{t}{1+2k^2}, \therefore M(-\frac{2kt}{1+2k^2}, \frac{t}{1+2k^2}),$$

$\therefore$  点  $M$  在抛物线  $C_2$  上， $\therefore y^2 = 2px$ ，

$$\therefore p = \frac{y^2}{2x} = \frac{\frac{t^2}{(1+2k^2)^2}}{2 \cdot \frac{-2kt}{1+2k^2}} = \frac{t}{-4k(1+2k^2)},$$

$$\text{联立} \begin{cases} y^2 = 2px, \\ y = kx + t \end{cases} \text{ 解得 } x_1 = \frac{t(1+2k^2)}{-2k^3}, y_1 = \frac{t^2}{-2k^2},$$

代入椭圆方程可得  $\frac{t^2(1+2k^2)^2}{8k^6} + \frac{t^2}{4k^4} = 1$ ，解得  $t^2 = \frac{8k^6}{(1+2k^2)^2+2k^2}$

$$\begin{aligned} \therefore p^2 &= \frac{t^2}{16k^2(1+2k^2)^2} = \frac{8k^6}{16k^2(1+2k^2)^2 \cdot [(1+2k^2)^2+2k^2]} \\ &= \frac{k^4}{2(1+2k^2)^2 \cdot [(1+2k^2)^2+2k^2]} \leq \frac{k^4}{2(2\sqrt{2}k)^2 [(2\sqrt{2}k)^2+2k^2]} = \frac{1}{160}, \end{aligned}$$

$\therefore p \leq \frac{\sqrt{10}}{40}$ ，当且仅当  $1 = 2k^2$ ，即  $k^2 = \frac{1}{2}$ ， $t^2 = \frac{1}{5}$  时等号成立，

故  $p$  的最大值为  $\frac{\sqrt{10}}{40}$ 。

22. 已知  $1 < a \leq 2$ ，函数  $f(x) = e^x - x - a$ ，其中  $e = 2.71828 \dots$  为自然对数的底数。

(I) 证明: 函数  $y=f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上有唯一零点;

(II) 记  $x_0$  为函数  $y=f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上的零点, 证明:

(i)  $\sqrt{a-1} \leq x_0 \leq \sqrt{2(a-1)}$ ;

(ii)  $x_0 f(e^{x_0}) \geq (e-1)(a-1)a$ .

**【分析】** (I) 推导出  $x>0$  时,  $f'(x) = e^x - 1 > 0$  恒成立,  $f(0) = <0, f(2) > 0$ , 由此能证明函数  $y=f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上有唯一零点.

(II) (i) 由  $f(x)$  单调增,  $1 < a \leq 2$ , 设  $x_0$  的最大值为  $t$ , 则  $c^t = 2+t, f(1) = c-1-2 < 0$ , 则  $t > 1$ , 推导出  $x_0 \leq \sqrt{2(a-1)}$ . 要证明  $x_0^2 \geq a-1 = e^{x_0} - x_0 - 1$ , 只需证明  $e^{x_0} - x_0^2 - x_0 - 1 \leq 0$ , 记  $h(x) = e^x - 1 - x - x^2 (0 \leq x \leq t)$ , 则  $h'(x) = e^x - 1 - 2x$ , 利用导数性质能证明  $\sqrt{a-1} \leq x_0 \leq \sqrt{2(a-1)}$ .

(ii) 要证明  $x_0 f(e^{x_0}) \geq (e-1)(a-1)a$ , 只需证明  $x_0 f(x_0+a) \geq (e-1)(a-1)a$ , 只需证  $\frac{a}{\sqrt{a-1}} - \frac{\sqrt{a-1}}{a} \geq 2(e-2)$ , 由此能证明  $x_0 f(e^{x_0}) \geq (e-1)(a-1)a$ .

**【解答】** 证明: (I)  $\because f(x) = e^x - x - a = 0 (x > 0), \therefore f'(x) = e^x - 1 > 0$  恒成立,  $\therefore f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

$\because 1 < a \leq 2, \therefore f(2) = e^2 - 2 - a \geq e^2 - 4 > 0$ , 又  $f(0) = 1 - a < 0$ ,

$\therefore$  函数  $y=f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上有唯一零点.

(II) (i)  $\because f(x)$  单调增,  $1 < a \leq 2$ , 设  $x_0$  的最大值为  $t$ , 则  $c^t = 2+t$ ,

$\therefore f(1) = c-1-2 < 0$ , 则  $t > 1$ ,

右边: 由于  $x \geq 0$  时,  $e^x \geq 1+x+\frac{1}{2}x^2$ , 且  $e^{x_0} - x_0 - a = 0$ ,

则  $a \geq 1+\frac{1}{2}x_0^2, \therefore x_0 \leq \sqrt{2(a-1)}$ .

左边: 要证明  $x_0^2 \geq a-1 = e^{x_0} - x_0 - 1$ , 只需证明  $e^{x_0} - x_0^2 - x_0 - 1 \leq 0$ ,

记  $h(x) = e^x - 1 - x - x^2 (0 \leq x \leq t)$ , 则  $h'(x) = e^x - 1 - 2x$ ,

$h''(x) = e^x - 2, \therefore h'(x)$  在  $(0, \ln 2)$  上单调减, 在  $(\ln 2, +\infty)$  上单调增,

$\therefore h'(x) = e^x - 1 - 2x \leq \max\{h'(0), h'(t)\} = 0$ ,

$\therefore h(x)$  在  $0 \leq x \leq t$  时单调减,  $h(x) = e^x - 1 - x - x^2 \leq h(0) = 0$ ,

$\therefore \sqrt{a-1} \leq x_0 \leq \sqrt{2(a-1)}$ .

(ii) 要证明  $x_0 f(\epsilon \mathbf{x}_0) \geq (e-1)(a-1)a$ , 只需证  $x_0 f(x_0+a) \geq (e-1)(a-1)a$ ,

$$\text{只需证 } e^{\sqrt{a-1}+a} - \sqrt{a-1} - 2a \geq (e-1)a\sqrt{a-1},$$

$$\because e^x \geq 1+x+\frac{1}{2}x^2, \therefore \text{只需证 } 1+\frac{1}{2}(\sqrt{a-1}+a)^2 - a \geq (e-1)a\sqrt{a-1},$$

$$\text{只需证 } a^2 - (\sqrt{a-1})^2 - 2(e-2)a\sqrt{a-1} \geq 0, \text{ 即证 } \frac{a}{\sqrt{a-1}} - \frac{\sqrt{a-1}}{a} \geq 2(e-2),$$

$$\because \frac{a}{\sqrt{a-1}} = \frac{1}{\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-1} \in (2, +\infty),$$

$$\therefore \frac{a}{\sqrt{a-1}} - \frac{\sqrt{a-1}}{a} \geq 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \gg (2e-2),$$

$$\therefore x_0 f(\epsilon \mathbf{x}_0) \geq (e-1)(a-1)a.$$