2004年福建高考理科数学真题及答案

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1．（5分）复数$(\frac{1-i}{1+i})^{10}$的值是(　　)

A．-1　　B．1　　C．-32　　D．32

2．（5分）$\tan 15^{\circ}+\cot 15^{\circ}$等于(　　)

A．2　　B．$2+\sqrt{3}$　　C．4　　D．$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

3．（5分）命题p：若a、$b\in R$，则$|a|+|b|>1$是$|a+b|>1$的充分而不必要条件；命题q：函数$y=\sqrt{|x-1|-2}$的定义域是$(-\infty$，$-1]\bigcup[3$，$+\infty)$，则(　　)

A．“p或q”为假　　B．“p且q”为真　　C．p真q假　　D．p假q真

4．（5分）已知F_1，F_2是椭圆的两个焦点，过F_1且与椭圆长轴垂直的直线交椭圆于A，B两点，若ΔABF_2是正三角形，则这个椭圆的离心率是(　　)

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

5．（5分）已知m、n是不重合的直线，α、β是不重合的平面，有下列命题：

①若$m\subset\alpha$，$n//\alpha$，则$m//n$；

②若$m//\alpha$，$m//\beta$，则$\alpha//\beta$；

③若$\alpha\bigcap\beta=n$，$m//n$，则$m//\alpha$且$m//\beta$；

④若$m\perp\alpha$，$m\perp\beta$，则$\alpha//\beta$．

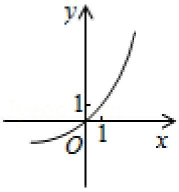
其中真命题的个数是(　　)

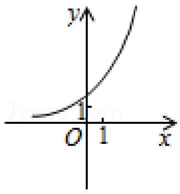
A．0　　B．1　　C．2　　D．3

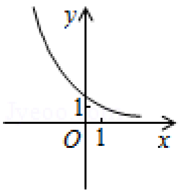
6．（5分）某校高二年级共有六个班级，现从外地转入4名学生，要安排到该年级的两个班级且每班安排2名，则不同的安排方案种数为(　　)

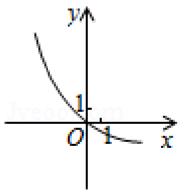
A．$A_6^2C_4^2$　　B．$\frac{1}{2}A_6^2C_4^2$　　C．$A_6^2A_4^2$　　D．$2A_6^2$

7．（5分）已知函数$y=\log_2 x$的反函数是$y=f^{-1}(x)$，则函数$y=f^{-1}(1-x)$的图象是(　　)

A. 

B. 

C. 

D. 

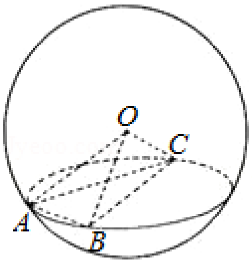
8.（5 分）已知 $\vec{a},\vec{b}$ 是非零向量且满足 $(3\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{a},(4\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{b}$，则 $\vec{a}$与$\vec{b}$ 的夹角是(　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

9.（5 分）若 $(1-2^x)^9$ 展开式的第 3 项为 288，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{1}{x^n})$ 的值是(　　)

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{5}$

10.（5 分）如图，A、B、C 是表面积为 48π 的球面上三点，$AB=2$，$BC=4$，$\angle ABC=60^\circ$，O 为球心，则直线 OA 与截面 ABC 所成的角是(　　)



A. $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}$　　B. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$　　C. $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$

11.（5 分）定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(x+2)$，当 $x\in[3，5]$ 时，$f(x)=2-|x-4|$，则(　　)

A. $f(\sin\frac{\pi}{6})<f(\cos\frac{\pi}{6})$　　B. $f(\sin 1)>f(\cos 1)$

C. $f(\cos\frac{2\pi}{3})<f(\sin\frac{2\pi}{3})$　　D. $f(\cos 2)>f(\sin 2)$

12.（5 分）把标有号码 1，2，3，…，10 的 10 个乒乓球放在一个箱子中，摇匀后，从中任意取一个，号码为小于 7 的奇数的概率是(　　)

A. $\frac{3}{10}$　　B. $\frac{7}{10}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{3}{5}$

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13.（4 分）直线 $x+2y=0$ 被曲线 $x^2+y^2-6x-2y-15=0$ 所截得的弦长等于_____.

14.（4 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & ,(x\neq 0)\\ a & ,(x=0)\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则实数 a 的值为 _____.

15.（4 分）某射手射击 1 次，击中目标的概率是 0.9．他连续射击 4 次，且各次射击是否击中目标相互之间没有影响．有下列结论：

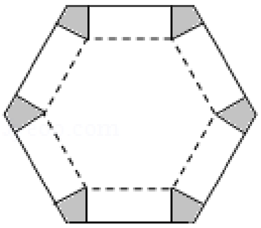
①他第 3 次击中目标的概率是 0.9；

②他恰好击中目标 3 次的概率是 $0.9^3\times 0.1$；

③他至少击中目标 1 次的概率是 $1-0.1^4$．

其中正确结论的序号是_____（写出所有正确结论的序号）．

16.（4 分）如图，将边长为 1 的正六边形铁皮的六个角各切去一个全等的四边形，再沿虚线折起，做成一个无盖的正六棱柱容器．当这个正六棱柱容器的底面边长为_____时，其容积最大．



三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17.（12 分）设函数 $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$，其中向量 $\vec{a}=(2\cos x,1)$，$\vec{b}=(\cos x,\sqrt{3}\sin 2x)$，$x\in R$．

（1）若 $f(x)=1-\sqrt{3}$，且 $x\in[-\dfrac{\pi}{3}，\dfrac{\pi}{3}]$，求 x；

（2）若函数 $y=2\sin 2x$ 的图象按向量 $\vec{c}=(m,n)$，$(|m|<\dfrac{\pi}{2})$ 平移后得到函数 $y=f(x)$ 的图象，求实数 m、n 的值．

18.（12 分）甲、乙两人同时参加奥运志愿者选拔赛的考试，已知在备选的 10 道题中，甲能答对其中的 6 道题，乙能答对其中的 8 道题．规定每次考试都从备选题中随机抽出 3 道题进行测试，至少答对 2 道题才能入选．

(I) 求甲答对试题数 ξ 的分布列及数学期望；

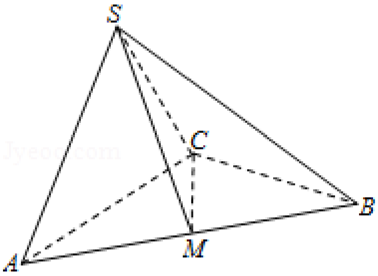
(II) 求甲、乙两人至少有一人入选的概率．

19．（12 分）在三棱锥 $S-ABC$ 中，ΔABC 是边长为 4 的正三角形，平面 $SAC\perp$ 平面 ABC，$SA=SC=2\sqrt{2}$，M 为 AB 的中点．

（Ⅰ）证明：$AC\perp SB$；

（Ⅱ）求二面角 $S-CM-B$ 的大小；

（Ⅲ）求点 B 到平面 SCM 的距离．



20．（12 分）某企业 2003 年的纯利润为 500 万元，因设备老化等原因，企业的生产能力将逐年下降．若不能进行技术改造，预测从今年起每年比上一年纯利润减少 20 万元，今年初该企业一次性投入资金 600 万元进行技术改造，预测在未扣除技术改造资金的情况下，第 n 年（今年为第一年）的利润为 $500(1+\dfrac{1}{2^n})$ 万元（n 为正整数）．

（Ⅰ）设从今年起的前 n 年，若该企业不进行技术改造的累计纯利润为 A_n 万元，进行技术改造后的累计纯利润为 B_n 万元（须扣除技术改造资金），求 A_n、B_n 的表达式；

（Ⅱ）依上述预测，从今年起该企业至少经过多少年，进行技术改造后的累计纯利润超过不进行技术改造的累计纯利润？

21．（14 分）已知 $f(x)=\dfrac{2x-a}{x^2+2}(x\in R)$ 在区间 $[-1，1]$ 上是增函数．

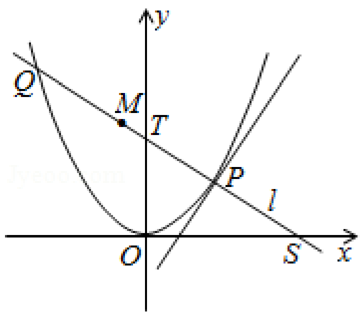
（Ⅰ）求实数 a 的值组成的集合 A；

（Ⅱ）设关于 x 的方程 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的两个非零实根为 x_1、x_2．试问：是否存在实数 m，使得不等式 $m^2+tm+1\ldots |x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1，1]$ 恒成立？若存在，求 m 的取值范围；若不存在，请说明理由．

22．（12 分）如图，P 是抛物线 $C: y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上一点，直线 l 过点 P 且与抛物线 C 交于另一点 Q．

（Ⅰ）若直线 l 与过点 P 的切线垂直，求线段 PQ 中点 M 的轨迹方程；

（Ⅱ）若直线 l 不过原点且与 x 轴交于点 S，与 y 轴交于点 T，试求 $\dfrac{|ST|}{|SP|}+\dfrac{|ST|}{|SQ|}$ 的取值范围．


y
Q
M
T
P
l
O
S
x

2004年福建省高考数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1．（5分）复数$(\frac{1-i}{1+i})^{10}$的值是$($　　$)$

A．-1　　B．1　　C．-32　　D．32

【解答】解：$(\frac{1-i}{1+i})^{2}=\frac{-2i}{2i}=-1$所以$(\frac{1-i}{1+i})^{10}=(-1)^{5}=-1$

故选：A．

2．（5分）$\tan 15^{\circ}+\cot 15^{\circ}$等于$($　　$)$

A．2　　B．$2+\sqrt{3}$　　C．4　　D．$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【解答】解：解法1：$\tan 15^{\circ}+\cot 15^{\circ}=\frac{\sin 15^{\circ}}{\cos 15^{\circ}}+\frac{\cos 15^{\circ}}{\sin 15^{\circ}}=\frac{\sin^{2}15^{\circ}+\cos^{2}15^{\circ}}{\cos 15^{\circ}\sin 15^{\circ}}=\frac{1}{\frac{1}{2}\bullet\sin 30^{\circ}}=4$．

解法2：由$\tan 15^{\circ}=\tan(45^{\circ}-30^{\circ})=\frac{\tan 45^{\circ}-\tan 30^{\circ}}{1+\tan 45^{\circ}\tan 30^{\circ}}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$．

$\therefore$原式$=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=4$．

故选：C．

3．（5分）命题p：若a、$b\in R$，则$|a|+|b|>1$是$|a+b|>1$的充分而不必要条件；命题q：函数$y=\sqrt{|x-1|-2}$的定义域是$(-\infty,\ -1]\bigcup[3,\ +\infty)$，则$($　　$)$

A．“p或q”为假　　B．“p且q”为真　　C．p真q假　　D．p假q真

【解答】解：$\because|a+b|\leqslant|a|+|b|$，

若$|a|+|b|>1$，不能推出$|a+b|>1$，而$|a+b|>1$，一定有$|a|+|b|>1$，故命题p为假．

又由函数$y=\sqrt{|x-1|-2}$的定义域为$|x-1|-2\geqslant 0$，即$|x-1|\geqslant 2$，即$x-1\geqslant 2$或$x-1\leqslant -2$．

故有$x\in(-\infty,\ -1]\bigcup[3,\ +\infty)$．

$\therefore q$为真命题．

故选：D.

4．（5 分）已知F_1，F_2是椭圆的两个焦点，过F_1且与椭圆长轴垂直的直线交椭圆于A，B两点，若ΔABF_2是正三角形，则这个椭圆的离心率是(　　)

A．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【解答】解：由题$|AF_1|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}|F_1F_2|$，$\therefore \dfrac{b^2}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\bullet 2c$即$a^2-c^2=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}ac$

$\therefore c^2+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}ac-a^2=0$，

$\therefore e^2+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}e-1=0$，

解之得：$e=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$（负值舍去）.

故选：C.

5．（5 分）已知m、n是不重合的直线，α、β是不重合的平面，有下列命题：

①若$m\subset\alpha$，$n//\alpha$，则$m//n$；

②若$m//\alpha$，$m//\beta$，则$\alpha//\beta$；

③若$\alpha\bigcap\beta=n$，$m//n$，则$m//\alpha$且$m//\beta$；

④若$m\perp\alpha$，$m\perp\beta$，则$\alpha//\beta$.

其中真命题的个数是(　　)

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

【解答】解：①若$m\subset\alpha$，$n//\alpha$，则m与n平行或异面，故不正确；

②若$m//\alpha$，$m//\beta$，则α与β可能相交或平行，故不正确；

③若$\alpha\bigcap\beta=n$，$m//n$，则$m//\alpha$且$m//\beta$，m也可能在平面内，故不正确；

④若$m\perp\alpha$，$m\perp\beta$，则$\alpha//\beta$，垂直与同一直线的两平面平行，故正确

故选：B.

6．（5 分）某校高二年级共有六个班级，现从外地转入 4 名学生，要安排到该年级的两个班级且每班安排 2 名，则不同的安排方案种数为(　　)

A．$A_6^2C_4^2$　　B．$\dfrac{1}{2}A_6^2C_4^2$　　C．$A_6^2A_4^2$　　D．$2A_6^2$

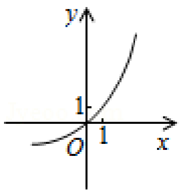
【解答】解：先将 4 名学生均分成两组方法数为$\frac{1}{2}C_4^2$，

再分配给 6 个年级中的 2 个分配方法数为 A_6^2，

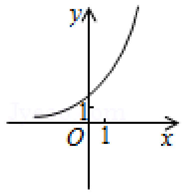
$\therefore$根据分步计数原理合要求的安排方法数为$\frac{1}{2}C_4^2 \bullet A_6^2$.

故选：B .

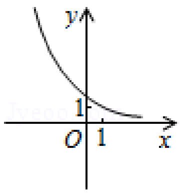
7.（5 分）已知函数 $y=\log_2 x$ 的反函数是 $y=f^{-1}(x)$，则函数 $y=f^{-1}(1-x)$ 的图象是(　　)



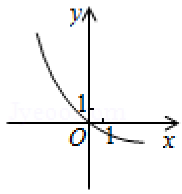
A.



B.



C.



D.

【解答】解：$\because y=\log_2 x \Leftrightarrow x=2^y \Rightarrow f^{-1}(x)=2^x \Rightarrow f^{-1}(1-x)=2^{1-x}$ ．$\therefore$函数 $y=f^{-1}(1-x)$ 的图象是C .

故选：C .

8.（5 分）已知 $\vec{a},\vec{b}$ 是非零向量且满足 $(3\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{a},(4\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{b}$，则 $\vec{a}$与$\vec{b}$ 的夹角是(　　)

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

【解答】解：设 $\vec{a}$与$\vec{b}$ 的夹角是α

$\because (3\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{a},(4\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{b}$

$\therefore (3\vec{a}-\vec{b})\bullet\vec{a}=0,(4\vec{a}-\vec{b})\bullet\vec{b}=0$

即$3\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0;4\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^2=0$

$\vec{a}\bullet\vec{b}=3\vec{a}^2;\vec{b}^2=12\vec{a}^2$

$\therefore \cos\alpha=\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{3\vec{a}^2}{2\sqrt{3}\,\vec{a}^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \alpha=\frac{\pi}{6}$

故选：A .

9．（5 分）若 $(1-2^{x})^{9}$ 展开式的第 3 项为 288，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{2}}+\ldots+\frac{1}{x^{n}})$ 的值是 (　　)

A．2　　　B．1　　　C．$\frac{1}{2}$　　　D．$\frac{2}{5}$

【解答】解：根据题意，$(1-2^{x})^{9}$ 展开式的第 3 项为 $T_{9}^{2}=C_{9}^{2}\bullet(-2^{x})^{2}=36\bullet(-2^{x})^{2}=288$，

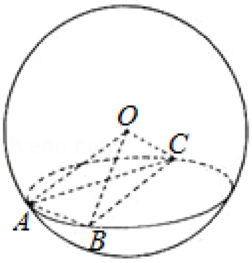
化简可得，$2^{x}=\sqrt{8}$，

解可得，$x=\frac{3}{2}$；

则 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{2}}+\ldots+\frac{1}{x^{n}})=2$；

故选：A．

10．（5 分）如图，A、B、C 是表面积为 48π 的球面上三点，$AB=2$，$BC=4$，$\angle ABC=60^{\circ}$，O 为球心，则直线 OA 与截面 ABC 所成的角是 (　　)



A．$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}$　　　B．$\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$　　　C．$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$　　　D．$\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解答】解：表面积为 48π 的球面，它的半径是 R，则 $48\pi=4\pi R^{2}$，$R=2\sqrt{3}$，

因为 $AB=2$，$BC=4$，$\angle ABC=60^{\circ}$，所以 $\angle BAC=90^{\circ}$，BC 为小圆的直径，

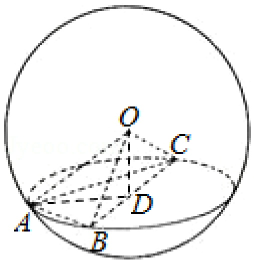
则平面 $OBC\perp$ 平面 ABC，D 为小圆的圆心，

所以 $OD\perp$ 平面 ABC，$\angle OAD$ 就是直线 OA 与截面 ABC 所成的角，

$OD=\sqrt{(2\sqrt{3})^{2}-2^{2}}=2\sqrt{2}$，

$\therefore AD=2$，$\cos\angle OAD=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

故选：D．



11．（5 分）定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(x+2)$，当 $x\in[3,5]$ 时，$f(x)=2-|x-4|$，则(　　)

A．$f(\sin\frac{\pi}{6})<f(\cos\frac{\pi}{6})$　　　　B．$f(\sin1)>f(\cos1)$

C．$f(\cos\frac{2\pi}{3})<f(\sin\frac{2\pi}{3})$　　　　D．$f(\cos2)>f(\sin2)$

【解答】解：由 $f(x)=f(x+2)$ 知 $T=2$，

又$\because x\in[3,5]$ 时，$f(x)=2-|x-4|$，

可知当 $3\leqslant x\leqslant 4$ 时，$f(x)=-2+x$．

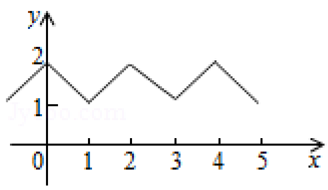
当 $4<x\leqslant 5$ 时，$f(x)=6-x$．其图如下，

故在 $(-1,0)$ 上是增函数，在 $(0,1)$ 上是减函数．

又由 $|\cos2|<|\sin2|$，

$\therefore f(\cos2)>f(\sin2)$．

故选：D．



12．（5 分）把标有号码 1，2，3，…，10 的 10 个乒乓球放在一个箱子中，摇匀后，从中任意取一个，号码为小于 7 的奇数的概率是(　　)

A．$\frac{3}{10}$　　B．$\frac{7}{10}$　　C．$\frac{2}{5}$　　D．$\frac{3}{5}$

【解答】解：因为所有机会均等的可能共有 10 种，而号码小于 7 的奇数有 1，3，5 共 3 种，

所以抽到号码为小于 7 的奇数的概率是 $\frac{3}{10}$．

故选：A．

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13.（4 分）直线 $x+2y=0$ 被曲线 $x^2+y^2-6x-2y-15=0$ 所截得的弦长等于__ $4\sqrt{5}$ __.

【解答】

解：过点 A 作 $AC\perp$ 弦 BD，垂足为 C，连接 AB，可得 C 为 BD 的中点.

由 $x^2+y^2-6x-2y-15=0$，得 $(x-3)^2+(y-1)^2=25$.

知圆心 A 为 $(3,1)$，$r=5$.

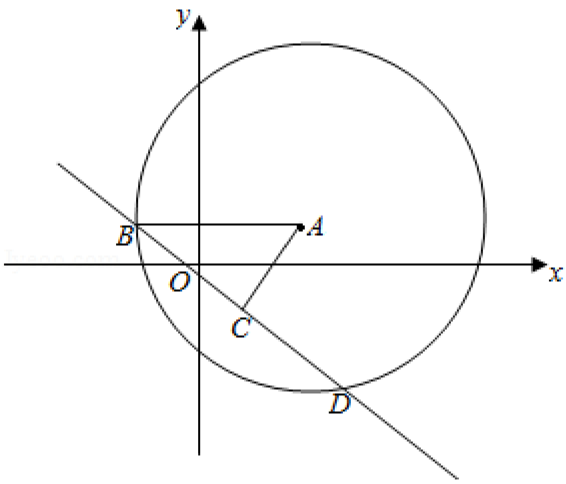
由点 $A(3,1)$ 到直线 $x+2y=0$ 的距离 $AC=\dfrac{|3+2|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

在直角三角形 ABC 中，$AB=5$，$AC=\sqrt{5}$，

根据勾股定理可得 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{5^2-(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{5}$，

则弦长 $BD=2BC=4\sqrt{5}$.

故答案为：$4\sqrt{5}$



14.（4 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & ,(x\neq 0)\\ a & ,(x=0)\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则实数 a 的值为 __ $\dfrac{1}{2}$ __.

【解答】解：因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=f(0)=a$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\dfrac{1}{2}$，所以 $a=\dfrac{1}{2}$.

故答案为：$\dfrac{1}{2}$

15.（4 分）某射手射击 1 次，击中目标的概率是 0.9．他连续射击 4 次，且各次射击是否击中目标相互之

间没有影响．有下列结论：

①他第 3 次击中目标的概率是 0.9；

②他恰好击中目标 3 次的概率是 $0.9^3\times 0.1$；

③他至少击中目标 1 次的概率是 $1-0.1^4$．

其中正确结论的序号是__①③__（写出所有正确结论的序号）．

【解答】解：$\because$ 射击一次击中目标的概率是 0.9，

$\therefore$ 第 3 次击中目标的概率是 0.9，

$\therefore$ ①正确，

$\because$ 连续射击 4 次，且各次射击是否击中目标相互之间没有影响，

$\therefore$ 本题是一个独立重复试验，

根据独立重复试验的公式得到恰好击中目标 3 次的概率是 $C_4^3\times 0.9^3\times 0.1$

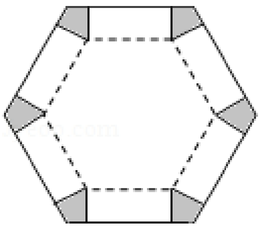
$\therefore$ ②不正确，

$\because$ 至少击中目标 1 次的概率用对立事件表示是 $1-0.1^4$．

$\therefore$ ③正确，

故答案为：①③

16．（4 分）如图，将边长为 1 的正六边形铁皮的六个角各切去一个全等的四边形，再沿虚线折起，做成一个无盖的正六棱柱容器．当这个正六棱柱容器的底面边长为__$\dfrac{2}{3}$__时，其容积最大．



【解答】解：如图，设底面六边形的边长为 x，高为 d，则

$d=\sqrt{3}\bullet\dfrac{1}{2}(1-x)$；　又底面六边形的面积为：

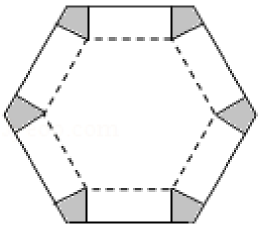
$S=6\bullet\dfrac{1}{2}\bullet X^2\bullet\sin 60^\circ=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}x^2$；所以，这个正六棱柱容器的容积为：

$V=Sd=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}x^2\bullet\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-x)=\dfrac{9}{4}(x^2-x^3)$，则对 V 求导，则

$V'=\dfrac{9}{4}(2x-3x^2)$，令 $V'=0$，得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{2}{3}$，

当 $0<x<\dfrac{2}{3}$ 时，$V'>0$，V 是增函数；当 $x>\dfrac{2}{3}$ 时，$V'<0$，V 是减函数；$\therefore x=\dfrac{2}{3}$ 时，V 有最大值．

故答案为：$\dfrac{2}{3}$



三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17.（12 分）设函数 $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$，其中向量 $\vec{a}=(2\cos x,1)$，$\vec{b}=(\cos x,\sqrt{3}\sin 2x)$，$x\in R$.

（1）若 $f(x)=1-\sqrt{3}$，且 $x\in[-\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{3}]$，求 x；

（2）若函数 $y=2\sin 2x$ 的图象按向量 $\vec{c}=(m,n)$，$(|m|<\dfrac{\pi}{2})$ 平移后得到函数 $y=f(x)$ 的图象，求实数 m 、n 的值.

【解答】解：（1）依题设 $f(x)=2\cos^2 x+\sqrt{3}\sin 2x=1+2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$，

由 $1+2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})=1-\sqrt{3}$，

得 $\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because -\dfrac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{3}$，

$\therefore -\dfrac{\pi}{2}\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{5\pi}{6}$，

$\therefore 2x+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{3}$，即 $x=-\dfrac{\pi}{4}$.

（2）函数 $y=2\sin 2x$ 的图象按向量 $\vec{c}=(m,n)$ 平移后得到函数 $y=2\sin 2(x-m)+n$ 的图象，

即函数 $y=f(x)$ 的图象.

由（1）得 $f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})+1$，

$\because |m|<\dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore m=-\dfrac{\pi}{12}$，$n=1$.

18.（12 分）甲、乙两人同时参加奥运志愿者选拔赛的考试，已知在备选的 10 道题中，甲能答对其中的 6 道题，乙能答对其中的 8 道题．规定每次考试都从备选题中随机抽出 3 道题进行测试，至少答对 2 道题才能入选.

(I) 求甲答对试题数ξ的分布列及数学期望；

(II) 求甲、乙两人至少有一人入选的概率．

【解答】解：(I) 依题意，甲答对试题数ξ的可能取值为0，1，2，3，

则 $P(\xi=0)=\dfrac{C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{30}$，

$P(\xi=1)=\dfrac{C_6^1\bullet C_4^2}{C_{10}^3}=\dfrac{3}{10}$，

$P(\xi=2)=\dfrac{C_6^2\bullet C_4^1}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{2}$，

$P(\xi=3)=\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{6}$. .

$\therefore\xi$的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{30}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{6}$

甲答对试题数ξ的数学期望为$E\xi=0\times\dfrac{1}{30}+1\times\dfrac{3}{10}+2\times\dfrac{1}{2}+3\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{9}{5}$.

(II) 设甲、乙两人考试合格的事件分别为A、B，则$P(A)=P(\xi=2)+P(\xi=3)=\dfrac{2}{3}$，

$P(B)=\dfrac{C_8^2C_2^1+C_8^3}{C_{10}^3}=\dfrac{56+56}{120}=\dfrac{14}{15}$.

因为事件A、B相互独立，

$\therefore$甲、乙两人考试均不合格的概率为$P(\overline{A}\bullet\overline{B})=P(\overline{A})\bullet P(\overline{B})=[1-\dfrac{2}{3}][1-\dfrac{14}{15}]=\dfrac{1}{45}$.

$\therefore$甲、乙两人至少有一人考试合格的概率为$P=1-P(\overline{A}\bullet\overline{B})=1-\dfrac{1}{45}=\dfrac{44}{45}$.

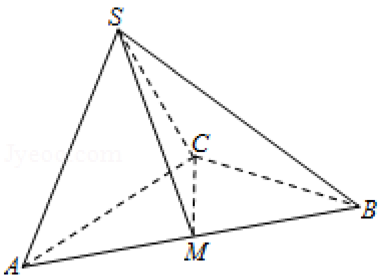
故甲、乙两人于少有一人考试合格的概率为$\dfrac{44}{45}$. .

19．（12分）在三棱锥$S-ABC$中，ΔABC是边长为4的正三角形，平面$SAC\perp$平面ABC，$SA=SC=2\sqrt{2}$，M为AB的中点．

（Ⅰ）证明：$AC\perp SB$；

（Ⅱ）求二面角$S-CM-B$的大小；

（III）求点 B 到平面 SCM 的距离．



【解答】证明：（Ⅰ）取 AC 中点 D，连接 DS 、 DB .

$\because SA=SC$， $BA=BC$，

$\therefore AC\perp SD$ 且 $AC\perp DB$，

$\therefore AC\perp$ 平面 SDB，又 $SB\subset$ 平面 SDB，

$\therefore AC\perp SB$.

（Ⅱ）解：$\because SD\perp AC$，平面 $SAC\perp$ 平面 ABC，

$\therefore SD\perp$ 平面 ABC .

过 D 作 $DE\perp CM$ 于 E，连接 SE，则 $SE\perp CM$，

$\therefore \angle SED$ 为二面角 $S-CM-A$ 的平面角．

由已知有 $DE\overset{//}{=}\frac{1}{2}AM$，所以 $DE=1$，又 $SA=SC=2\sqrt{2}$， $AC=4$， $\therefore SD=2$.

在 $Rt\Delta SDE$ 中， $\tan\angle SED=\frac{SD}{DE}=2$，

$\therefore$ 二面角 $S-CM-A$ 的大小为 $\arctan 2$，

$\therefore$ 二面角 $S-CM-B$ 的大小为 $\pi-\arctan 2$.

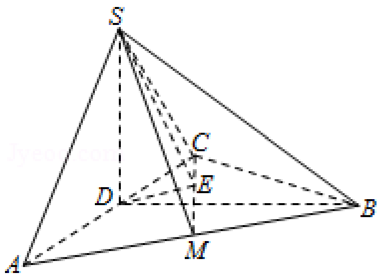
（III）解：在 $Rt\Delta SDE$ 中， $SE=\sqrt{SD^2+DE^2}=\sqrt{5}$， CM 是边长为 4 正 ΔABC 的中线， $CM=2\sqrt{3}$.

$\therefore S_{\Delta SCM}=\frac{1}{2}CM\bullet SE=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{15}$，

设点 B 到平面 SCM 的距离为 h，

由 $V_{B-SCM}=V_{S-CMB}$， $SD\perp$ 平面 ABC，得 $\frac{1}{3}S_{\Delta SCM}\bullet h=\frac{1}{3}S_{\Delta CMB}\bullet SD$，

$\therefore h=\frac{S_{\Delta CMB}\bullet SD}{S_{\Delta SCM}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$. 即点 B 到平面 SCM 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.



20．（12 分）某企业 2003 年的纯利润为 500 万元，因设备老化等原因，企业的生产能力将逐年下降．若不能进行技术改造，预测从今年起每年比上一年纯利润减少 20 万元，今年初该企业一次性投入资金 600 万元进行技术改造，预测在未扣除技术改造资金的情况下，第 n 年（今年为第一年）的利润为 $500(1+\dfrac{1}{2^{n}})$ 万元（n 为正整数）．

（Ⅰ）设从今年起的前 n 年，若该企业不进行技术改造的累计纯利润为 A_n 万元，进行技术改造后的累计纯利润为 B_n 万元（须扣除技术改造资金），求 A_n、B_n 的表达式；

（Ⅱ）依上述预测，从今年起该企业至少经过多少年，进行技术改造后的累计纯利润超过不进行技术改造的累计纯利润？

【解答】解：（Ⅰ）依题设，$A_n=(500-20)+(500-40)+\ldots+(500-20n)=490n-10n^{2}$；

$B_n=500[(1+\dfrac{1}{2})+(1+\dfrac{1}{2^{2}})+\ldots+(1+\dfrac{1}{2^{n}})]-600=500n-\dfrac{500}{2^{n}}-100$．

（Ⅱ）$B_n-A_n=(500n-\dfrac{500}{2^{n}}-100)-(490n-10n^{2})$

$=10n^{2}+10n-\dfrac{500}{2^{n}}-100=10[n(n+1)-\dfrac{50}{2^{n}}-10]$．

因为函数 $y=x(x+1)-\dfrac{50}{2^{n}}-10$ 在 $(\dfrac{1}{2}$，$+\infty)$ 上为增函数，

当 $1\leqslant n\leqslant 3$ 时，$n(n+1)-\dfrac{50}{2^{n}}-10\leqslant 12-\dfrac{50}{8}-10<0$；

当 $n\geqslant 4$ 时，$n(n+1)-\dfrac{50}{2^{n}}-10\geqslant 20-\dfrac{50}{16}-10>0$．

$\therefore$ 仅当 $n\geqslant 4$ 时，$B_n>A_n$．

答：至少经过 4 年，该企业进行技术改造后的累计纯利润超过不进行技术改造的累计纯利润．

21．（14 分）已知 $f(x)=\dfrac{2x-a}{x^{2}+2}(x\in R)$ 在区间 $[-1$，$1]$ 上是增函数．

（Ⅰ）求实数 a 的值组成的集合 A；

（Ⅱ）设关于 x 的方程 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的两个非零实根为 x_1、x_2．试问：是否存在实数 m，使得不等式

$m^2+tm+1\geqslant |x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1，1]$ 恒成立？若存在，求 m 的取值范围；若不存在，请说明理由．

【解答】解：（Ⅰ） $f'(x)=\dfrac{4+2ax-2x^2}{(x^2+2)^2}=\dfrac{-2(x^2-ax-2)}{(x^2+2)^2}$，

$\because f(x)$ 在 $[-1，1]$ 上是增函数，

$\therefore f'(x)\geqslant 0$ 对 $x\in[-1，1]$ 恒成立，

即 $x^2-ax-2\leqslant 0$ 对 $x\in[-1，1]$ 恒成立．①

设 $\varphi(x)=x^2-ax-2$，

方法一：φ

$$①\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi(1)=1-a-2\leqslant 0\\ \varphi(-1)=1+a-2\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow -1\leqslant a\leqslant 1，$$

$\because$ 对 $x\in[-1，1]$，$f(x)$ 是连续函数，且只有当 $a=1$ 时，$f'(-1)=0$ 以及当 $a=-1$ 时，f'（1）$=0$

$\therefore A=\{a\,|\,-1\leqslant a\leqslant 1\}$．方法二：

$$①\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{2}\geqslant 0\\ \varphi(-1)=1+a-2\leqslant 0\end{cases}\text{或}\begin{cases}\dfrac{a}{2}<0\\ \varphi(1)=1-a-2\leqslant 0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow 0\leqslant a\leqslant 1$ 或 $-1\leqslant a\leqslant 0$

$\Leftrightarrow -1\leqslant a\leqslant 1$．

$\because$ 对 $x\in[-1，1]$，$f(x)$ 是连续函数，且只有当 $a=1$ 时，$f'(-1)=0$ 以及当 $a=-1$ 时，f'（1）$=0$

$\therefore A=\{a\,|\,-1\leqslant a\leqslant 1\}$．

（Ⅱ）由 $\dfrac{2x-a}{x^2+2}=\dfrac{1}{x}$，得 $x^2-ax-2=0$，$\because \triangle=a^2+8>0$

$\therefore x_1$，x_2 是方程 $x^2-ax-2=0$ 的两非零实根，$x_1+x_2=a$，$x_1x_2=-2$，

从而 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{a^2+8}$．

$\because -1\leqslant a\leqslant 1$，$\therefore |x_1-x_2|=\sqrt{a^2+8}\leqslant 3$．

要使不等式 $m^2+tm+1\geqslant |x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1，1]$ 恒成立，

当且仅当 $m^2+tm+1\geqslant 3$ 对任意 $t\in[-1，1]$ 恒成立，

即 $m^2+tm-2\geqslant 0$ 对任意 $t\in[-1，1]$ 恒成立．②

设 $g(t)=m^2+tm-2=mt+(m^2-2)$，

方法一：

②$\Leftrightarrow g(-1)=m^2-m-2\geqslant 0$，$g$（1）$=m^2+m-2\geqslant 0$，

$\Leftrightarrow m\geqslant 2$ 或 $m\leqslant -2$．

所以，存在实数 m，使不等式 $m^2+tm+1\geqslant |x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1，1]$ 恒成立，其取值范围是 $\{m|m\geqslant 2$，或 $m\leqslant -2\}$．

方法二：

当 $m=0$ 时，②显然不成立；

当 $m\neq 0$ 时，

②$\Leftrightarrow m>0$，$g(-1)=m^2-m-2\geqslant 0$ 或 $m<0$，g（1）$=m^2+m-2\geqslant 0$

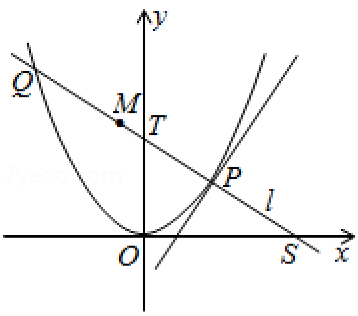
$\Leftrightarrow m\geqslant 2$ 或 $m\leqslant -2$．

所以，存在实数 m，使不等式 $m^2+tm+1\geqslant |x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1，1]$ 恒成立，其取值范围是 $\{m|m\geqslant 2$，或 $m\leqslant -2\}$．

22．（12 分）如图，P 是抛物线 $C:y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上一点，直线 l 过点 P 且与抛物线 C 交于另一点 Q．

（Ⅰ）若直线 l 与过点 P 的切线垂直，求线段 PQ 中点 M 的轨迹方程；

（Ⅱ）若直线 l 不过原点且与 x 轴交于点 S，与 y 轴交于点 T，试求 $\dfrac{|ST|}{|SP|}+\dfrac{|ST|}{|SQ|}$ 的取值范围．



【解答】解：（Ⅰ）设 $P(x_1，y_1)$，$Q(x_2，y_2)$，$M(x_0，y_0)$，依题意 $x_1\neq 0$，$y_1>0$，$y_2>0$．

由 $y=\dfrac{1}{2}x^2$，①

得 $y'=x$.

$\therefore$ 过点 P 的切线的斜率 $k=x_1$,

$\therefore$ 直线 l 的斜率 $k_l=-\dfrac{1}{k}=-\dfrac{1}{x_1}$,

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y-\dfrac{1}{2}x_1^2=-\dfrac{1}{x_1}(x-x_1)$, ②

联立①②消去 y ，得 $x^2+\dfrac{2}{x_1}x-x_1^2-2=0$.

$\because M$ 是 PQ 的中点

$\therefore x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{1}{x_1}$, $y_0=\dfrac{1}{2}x_1^2-\dfrac{1}{x_1}(x_0-x_1)$

消去 x_1 ，得 $y_0=x_0^2+\dfrac{1}{2\,x_0^2}+1(x_0\neq 0)$,

$\therefore PQ$ 中点 M 的轨迹方程为 $y=x^2+\dfrac{1}{2x^2}+1(x\neq 0)$.

（Ⅱ）设直线 $l:y=kx+b$ ，依题意 $k\neq 0$, $b\neq 0$ ，则 $T(0,b)$.

分别过 P 、 Q 作 $PP'\perp x$ 轴， $QQ'\perp x$ 轴，垂足分别为 P' 、 Q' ，则 $\dfrac{|ST|}{|SP|}+\dfrac{|ST|}{|SQ|}=\dfrac{|OT|}{|P'P|}+\dfrac{|OT|}{|Q'Q|}=\dfrac{|b|}{|y_1|}+\dfrac{|b|}{|y_2|}$.

由 $y=\dfrac{1}{2}x^2$, $y=kx+b$ 消去 x ，得 $y^2-2(k^2+b)y+b^2=0$. ③

则 $y_1+y_2=2(k^2+b)$, $y_1y_2=b^2$.

$\therefore \dfrac{|ST|}{|SP|}+\dfrac{|ST|}{|SQ|}=|b|(\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2})\ldots 2|b|\sqrt{\dfrac{1}{y_1y_2}}=2|b|\sqrt{\dfrac{1}{b^2}}=2$.

$\because y_1$ 、 y_2 可取一切不相等的正数,

$\therefore \dfrac{|ST|}{|SP|}+\dfrac{|ST|}{|SQ|}$ 的取值范围是 $(2,+\infty)$.