2003年北京高考文科数学真题及答案

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共150分，考试时间120分钟.

第Ⅰ卷（选择题 共50分）

注意事项：

1．答第Ⅰ卷前，考生务必将自己姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上.

2．每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案，不能答在试题卷上.

3．考试结束，监考人将本试卷和答题卡一并收回.

参考公式：

三角函数的积化和差公式：

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

正棱台、圆台的侧面积公式

$$S_{台侧}=\frac{1}{2}(c'+c)l$$

其中c'、c分别表示上、下底面周长，l表示斜高或母线长.

球体的体积公式：

$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$，其中R表示球的半径.

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的.

1．设集合$A=\{x\,|\,x^2-1>0\},B=\{x\,|\log_2 x>0|\}$,则$A\cap B$等于　（　　）

A．$\{x\,|\,x>1\}$　　B．$\{x\,|\,x>0\}$

C．$\{x\,|\,x<-1\}$　　D．$\{x\,|\,x<-1或x>1\}$

2．设$y_1=4^{0.9},y_2=8^{0.44},y_3=(\frac{1}{2})^{-1.5}$，则　（　　）

A．$y_3>y_1>y_2$　　B．$y_2>y_1>y_3$　　C．$y_1>y_2>y_3$　　D．$y_1>y_3>y_2$

3．“$\cos2\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$”是“$\alpha=2k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in Z$”的　（　　）

A．必要非充分条件　　B．充分非必要条件

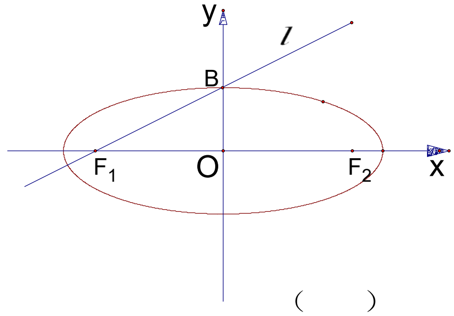
C．充分必要条件　　D．既非充分又非必要条件

4．已知α，β是平面，m，n是直线.下列命题中不正确的是　（　　）

A．若m∥α，α∩β=n，则m//n　　B．若m∥n，α∩β=n，则n⊥α

C．若m⊥α，m⊥β，则α∥β　　D．若m⊥α，$m\subset\beta$，则α⊥β

5．如图，直线$l: x-2y+2=0$过椭圆的左焦点F_1和一个顶点B，该椭圆的离心率为（　　）



A．$\dfrac{1}{5}$　　B．$\dfrac{2}{5}$

C．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　D．$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

6．若$z\in C$且$|z+2-2i|=1$，则$|z-2-2i|$的最小值是（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

7．如果圆台的母线与底面成60°角，那么这个圆台的侧面积与轴截面面积的比为（　　）

A．2π　　B．$\dfrac{3}{2}\pi$　　C．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$　　D．$\dfrac{1}{2}\pi$

8．若数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=\dfrac{3^{-n}+(-1)^n3^{-n}}{2}, n=1,2,\cdots$，则$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$等于（　　）

A．$\dfrac{1}{24}$　　B．$\dfrac{1}{8}$　　C．$\dfrac{1}{6}$　　D．$\dfrac{1}{2}$

9．从黄瓜、白菜、油菜、扁豆4种蔬菜品种中选出3种，分别种在不同土质的三块土地上，其中黄瓜必须种植，不同的种植方法共有（　　）

A．24种　　B．18种　　C．12种　　D．6种

10．某班试用电子投票系统选举班干部候选人．全班k名同学都有选举权和被选举权，他们的编号分别为1，2，…，k，规定：同意按“1”，不同意（含弃权）按“0”，令

$$a_{ij}=\begin{cases}1,\text{第}i\text{号同学同意第}j\text{号同学当选.}\\0,\text{第}i\text{号同学不同意第}j\text{号同学当选.}\end{cases}$$

其中i=1，2，…，k，且j=1，2，…，k，则同时同意第1，2号同学当选的人数为（　　）

A．$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1k}+a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2k}$

B．$a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{k1}+a_{12}+a_{22}+\cdots+a_{k2}$

C．$a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+\cdots+a_{k1}a_{k2}$　　D．$a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+\cdots+a_{1k}a_{2k}$

第II卷（非选择题　共100分）

二、填空题：本大题共4小题，每小题4分，共16分，把答案填在题中横线上.

11．已知某球体的体积与其表面积的数值相等，则此球体的半径为________.

12．函数$f(x)=\lg(1+x^2), g(x)=2-|x|, h(x)=tg2x$中，________是偶函数.

13．以双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$右顶点为顶点，左焦点为焦点的抛物线的方程是__________.

14．将长度为 1 的铁丝分成两段，分别围成一个正方形和一个圆形，要使正方形与圆的面积之和最小，正方形的周长应为____________________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 84 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15．（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\cos^4 x-2\sin x\cos x-\sin^4 x.$

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的最大值、最小值.

16．（本小题满分 13 分）

已知数列$\{a_n\}$是等差数列，且$a_1=2,a_1+a_2+a_3=12.$

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）令$b_n=a_n3^n(x\in R).$求数列$\{b_n\}$前 n 项和的公式.

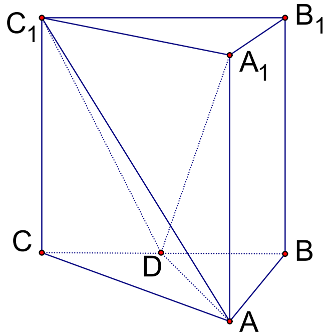
17．（本小题满分 15 分）

如图，正三棱柱 ABC—$A_1B_1C_1$中，D 是 BC 的中点，AB=a.

（Ⅰ）求证：直线 $A_1D\perp B_1C_1$；

（Ⅱ）求点 D 到平面 ACC_1 的距离；

（Ⅲ）判断 A_1B 与平面 ADC 的位置关系，并证明你的结论.



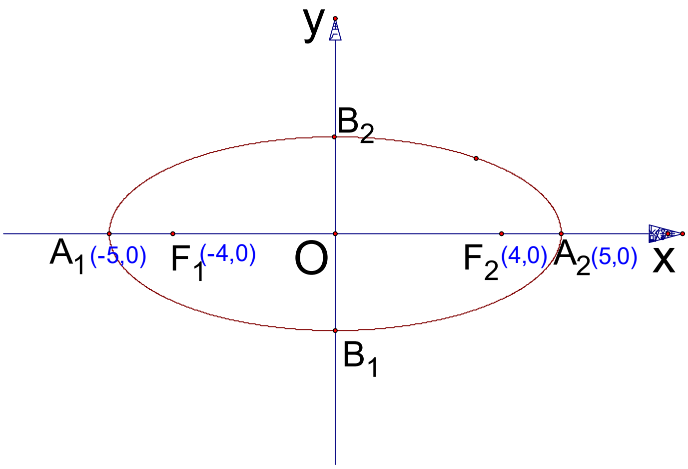
18．（本小题满分 15 分）

如图，A_1，A 为椭圆的两个顶点，F_1，F_2 为椭圆的两个焦点.

（Ⅰ）写出椭圆的方程及准线方程；

（Ⅱ）过线段 OA 上异于 O，A 的任一点 K 作 OA 的垂线，交椭圆于 P，P_1 两点，直线 A_1P 与 AP_1 交于点 M.

求证：点 M 在双曲线 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 上.



19．（本小题满分 14 分）

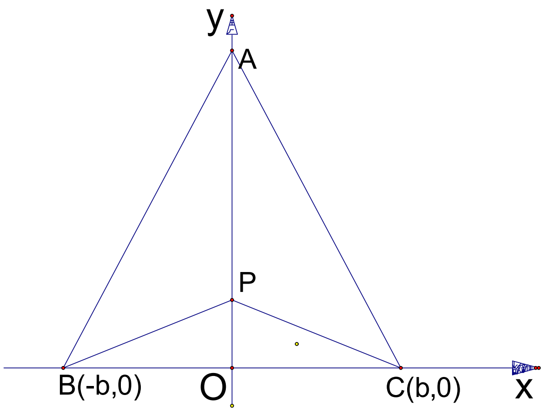
有三个新兴城镇，分别位于 A，B，C 三点处，且 AB=AC=13km，BC=10km. 今计划合建一个中心医院，为同时方便三镇，准备建在 BC 的垂直平分线上的 P 点处，（建立坐标系如图）

（Ⅰ）若希望点 P 到三镇距离的平方和为最小，

点 P 应位于何处？

（Ⅱ）若希望点 P 到三镇的最远距离为最小，

点 P 应位于何处？



20.（本小题满分 14 分）

设 $y=f(x)$ 是定义在区间 $[-1,1]$ 上的函数，且满足条件：

（i） $f(-1)=f(1)=0;$

（ii）对任意的 $u,v\in[-1,1]$, 都有 $|f(u)-f(v)|\le|u-v|$.

（Ⅰ）证明：对任意的 $x\in[-1,1]$, 都有 $x-1\le f(x)\le 1-x;$

（Ⅱ）判断函数 $g(x)=\begin{cases}1+x, x\in[-1,0)\\1-x, x\in[0,1]\end{cases}$ 是否满足题设条件；

（Ⅲ）在区间[－1，1]上是否存在满足题设条件的函数 $y=f(x)$，且使得对任意的

$u,v\in[-1,1]$, 都有 $|f(u)-f(v)|=u-v.$

若存在，请举一例：若不存在，请说明理由.

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算．每小题 5 分，满分 50 分.

1．A　2．D　3．A　4．A　5．D　6．B　7．C　8．B　9．B　10．C

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算. 每小题 4 分, 满分 16 分.

11．3　　12． $f(x);g(x)$　　13． $y^2=-36(x-4)$　　14． $\dfrac{4}{\pi+4}$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 84 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15．本小题主要考查三角函数的倍角、和角公式，以及三角函数的性质等基本知识，考查运

算能力，满分 13 分.　（Ⅰ）解：因为 $f(x)=\cos^4 x-2\sin x\cos x-\sin^4 x$

$$=(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)-\sin 2x$$

$$=\cos 2x-\sin 2x=\sqrt{2}\cos(2x+\frac{\pi}{4})$$

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi.$

（Ⅱ）解：因为 $f(x)=\sqrt{2}\cos(2x+\frac{\pi}{4})$, 所以 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$，最小值为 $-\sqrt{2}$

16．本小题主要考查等差、等比数列等基本知识，考查综合运用数学知识和方法解决问题的能力. 满分 13 分.

（Ⅰ）解：设数列 $\{a_n\}$ 公差为 d，则 $a_1+a_2+a_3=3a_1+3d=12$, 又 $a_1=2, d=2.$

所以 $a_n=2n.$

（Ⅱ）解：由 $b_n=a_n 3^n=2n3^n$, 得

$S_n=2\cdot 3+4\cdot 3^2+\cdots(2n-2)3^{n-1}+2n\cdot 3^n$, ①

$3S_n=2\cdot 3^2+4\cdot 3^3+\cdots+(2n-2)\cdot 3^n+2n\cdot 3^{n+1}$. ②

将①式减去②式，得 $-2S_n=-2(3+3^2+\cdots 3^n)-2n\cdot 3^{n+1}=3(3^n-1)-2n\cdot 3^{n+1}.$

所以 $S_n=\frac{3(1-3^n)}{2}+n\cdot 3^{n+1}.$

17．本小题主要考查直线与平面的位置关系，正棱柱的性质，棱锥的体积等基本知识，考查空间想象能力和逻辑推理能力. 满分 15 分.

（Ⅰ）证法一：∵点 D 是正△ABC 中 BC 边的中点，∴AD⊥BC，

又 A_1A⊥底面 ABC，∴A_1D⊥BC，∵BC∥B_1C_1，∴A_1D⊥B_1C_1.

证法二：连结 A_1C_1，则 $A_1C=A_1B$.　∵点 D 是正△A_1CB 的底边中 BC 的中点，

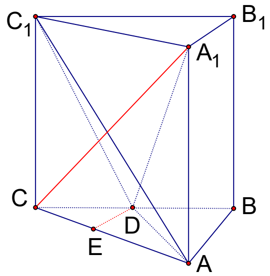
∴A_1D⊥BC，∵BC∥B_1C_1，∴A_1D⊥B_1C_1.

（Ⅱ）解法一：作 DE⊥AC 于 E，∵平面 ACC_1⊥平面 ABC，

∴DE⊥平面 ACC_1 于 E，即 DE 的长为点 D 到平面 ACC_1 的

距离.　在 Rt△ADC 中，AC=2CD=$a, AD=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$

∴所求的距离 $DE=\frac{CD\cdot AD}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a.$



解法二：设点 D 到平面 ACC_1 的距离为 x，

$\because$体积 $V_{C_1-ACD_1}=V_{D-ACC_1}$　　$\therefore \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{8}a^2\cdot CC_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a\cdot CC_1\cdot x.$

$\therefore x=\frac{\sqrt{3}}{4}a,$ 即点 D 到平面 ACC_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{4}a$.

（III）答：直线 A_1B//平面 ADC_1，证明如下：

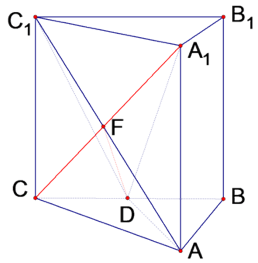
证法一：如图 1，连结 A_1C 交 AC_1 于 F，则 F 为 A_1C 的中点，∵D 是 BC 的中点，∴DF∥A_1B，

又 DF$\subset$ 平面 ADC_1，$A_1B\not\subset$平面 ADC_1，∴A_1B∥平面 ADC_1.

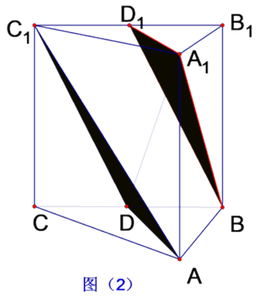
证法二：如图 2，取 C_1B_1 的中点 D_1，则 AD∥A_1D_1，C_1D∥D_1B，

∴AD∥平面 A_1D_1B，且 C_1D∥平面 A_1D_1B，

∴平面 ADC_1∥平面 A_1D_1B，∵$A_1B\subset$平面 A_1D_1B，∴A_1B∥平面 ADC_1.



图（1）



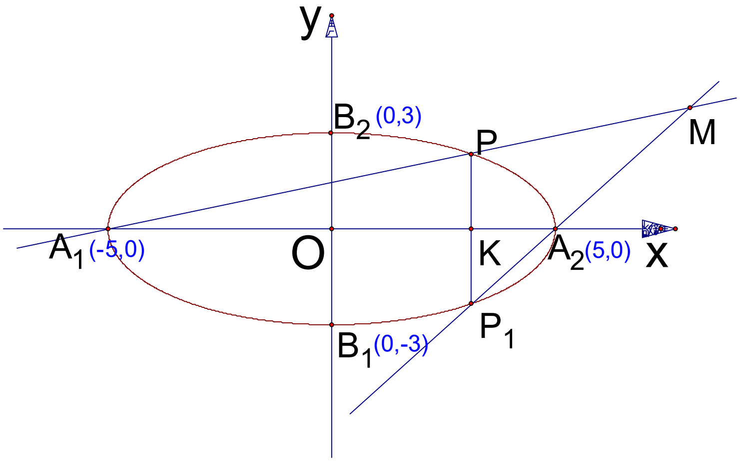
图（2）

18．本小主要考查直线、椭圆和双曲线等基本知识，考查分析问题和解决问题的能力. 满分 15 分.

（Ⅰ）解：由图可知，$a=5, c=4,$ 所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=3.$

该椭圆的方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1,$

准线方程为 $x=\pm\frac{25}{4}.$



（Ⅱ）证明：设 K 点坐标 $(x_0,0)$，点 P、P_1 的坐标分别记为 $(x_0,y_0),(x_0,-y_0)$，

其中 $0<x_0<5$，则 $\frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{9}=1$，……① 直线 A_1P，P_1A 的方程分别为：

$(x_0+5)y=y_0(x+5)$，……② $(5-x_0)y=y_0(x-5)$．……③

②式除以③式得 $\frac{x_0+5}{5-x_0}=\frac{x+5}{x-5}$，化简上式得 $x=\frac{25}{x_0}$，代入②式得 $y=\frac{5y_0}{x_0}$，

于是，直线 A_1P 与 AP_1 的交点 M 的坐标为 $(\frac{25}{x_0},\frac{5y_0}{x_0})$．

因为 $\frac{1}{25}(\frac{25}{x_0})^2-\frac{1}{9}(\frac{5y_0}{x_0})^2=\frac{25}{x_0^2}-\frac{25}{x_0^2}(1-\frac{x_0^2}{25})=1$．

所以，直线 A_1P 与 AP_1 的交点 M 在双曲线 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上．

19．本小题主要考查函数，不等式等基本知识，考查运用数学知识分析问题和解决问题的能力．满分 14 分．

（Ⅰ）解：设 P 的坐标为（0，y），则 P 至三镇距离的平方和为

$$f(y)=2(25+y^2)+(12-y)^2=3(y-4)^2+146.$$

所以，当 $y=4$ 时，函数 $f(y)$ 取得最小值． 答：点 P 的坐标是 $(0,4)$．

（Ⅱ）解法一：P 至三镇的最远距离为 $g(x)=\begin{cases}\sqrt{25+y^2},当\sqrt{25+y^2}\ge|12-y|,\\ |12-y|,当\sqrt{25+y^2}<|12-y|.\end{cases}$

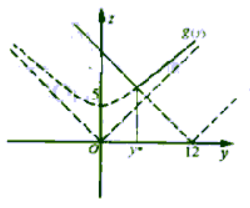
由 $\sqrt{25+y^2}\geq|12-y|$ 解得 $y\geq\frac{119}{24}$, 记 $y^*=\frac{119}{24}$, 于是

$g(x)=\begin{cases}\sqrt{25+y^2},当y\geq y^*,\\ |12-y|,当y<y^*.\end{cases}$ 因为 $\sqrt{25+y^2}$ 在$[y^*,+\infty)$上是增函数，而$|12-y|$在$(-\infty,y^*]$

上是减函数. 所以 $y=y^*$ 时, 函数 $g(y)$ 取得最小值. 答:点 P 的坐标是 $(0,\frac{119}{24})$;

解法二：P 至三镇的最远距离为 $g(x)=\begin{cases}\sqrt{25+y^2},当\sqrt{25+y^2}\geq|12-y|,\\ |12-y|,当\sqrt{25+y^2}<|12-y|.\end{cases}$

由 $\sqrt{25+y^2}\geq|12-y|$ 解得 $y\geq\frac{119}{24}$, 记 $y^*=\frac{119}{24}$, 于是



图(a)

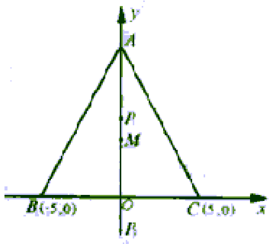
$g(x)=\begin{cases}\sqrt{25+y^2},当y\geq y^*,\\ |12-y|,当y<y^*.\end{cases}$

函数 $x=g(y)$ 的图象如图(a)，因此，

当 $y=y^*$ 时，函数 $g(y)$ 取得最小值. 答:点 P 的坐标是 $(0,\frac{119}{24})$;

解法三：因为在△ABC 中，AB=AC=13,且，$\sqrt{AC^2-OC^2}=12>5=OC,\angle ACB=\frac{\pi}{4}$,如图(b).

所以△ABC 的外心 M 在线段 AO 上,其坐标为$(0,\frac{119}{24}$



图(b)

且 AM=BM=CM. 当 P 在射线 MA 上，记 P 为 P_1；当 P 在射
MA 的反向延长线上，记 P 为 P_2，
这时 P 到 A、B、C 三点的最远距离为
P_1C 和 P_2A，且 $P_1C\geqslant MC$，$P_2A\geqslant MA$，所以点 P 与外心 M
重合时，P 到三镇的最远距离最小.

答:点 P 的坐标是 $(0,\frac{119}{24})$;

20．本小题考查函数、不等式等基本知识，考查综合运用数学知识分析问题和解决问题的能力．满分 14 分．（Ⅰ）证明：由题设条件可知，当 $x\in[-1,1]$时，有

$|f(x)|=|f(x)-f(1)|\leq|x-1|=1-x,$

即 $x-1\leq f(x)\leq 1-x.$

（Ⅱ）答：函数 $g(x)$ 满足题设条件. 验证如下：$g(-1)=0=g(1).$

对任意的$u,v\in[-1,1]$，

当$u,v\in[0,1]$时,有$|g(u)-g(v)|=|(1-u)-(1-v)|=|u-v|$;

当$u,v\in[-1,0]$时,同理有$|g(u)-g(v)|=|u-v|$;

当$u\cdot v<0$, 不妨设$u\in[-1,0),v\in(0,1]$,

有$|g(u)-g(v)|=|(1+u)-(1-v)|=|u+v|\le|v-u|$.

所以，函数$g(x)$满足题设条件.

（III）答：这样满足的函数不存在. 理由如下：

假设存在函数$f(x)$满足条件，则由$f(-1)=f(1)=0$, 得$|f(1)-f(-1)|=0$,①

由于对任意的$u,v\in[-1,1]$，都有$|f(u)-f(v)|=|u-v|$.

所以，$|f(1)-f(-1)|=|1-(-1)|=2$.② ①与②矛盾，因此假设不成立，即这样的函数不存在.