

1996年湖南高考理科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 共150分, 考试时间120分钟.

第 I 卷(选择题共65分)

一、选择题: 本大题共15小题; 第(1) (10)题每小题4分, 第(11) (15)题每小题5分, 共65分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

(1) 已知全集 $I = \mathbb{N}$, 集合 $A = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 4n, n \in \mathbb{N}\}$, 则

(A) $I = A \cup B$ (B) $I = \bar{A} \cup B$ (C) $I = A \cup \bar{B}$ (D) $I = \bar{A} \cup \bar{B}$

[Key] C

(1) 已知全集 $I = \mathbb{N}$, 集合 $A = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 4n, n \in \mathbb{N}\}$, 则

(A) $I = A \cup B$ (B) $I = \bar{A} \cup B$ (C) $I = A \cup \bar{B}$ (D) $I = \bar{A} \cup \bar{B}$

[Key] C

(3) 若 $\sin^2 x > \cos^2 x$, 则 x 的取值范围是

(A) $\{x \mid 2k\pi - \frac{3}{4}\pi < x < 2k\pi + \frac{1}{4}\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

(B) $\{x \mid 2k\pi + \frac{1}{4}\pi < x < 2k\pi + \frac{5}{4}\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

(C) $\{x \mid k\pi - \frac{1}{4}\pi < x < k\pi + \frac{3}{4}\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

(D) $\{x \mid 2k\pi + \frac{1}{4}\pi < x < k\pi + \frac{3}{4}\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

[Key] D

(4) 复数 $\frac{(2+2i)^4}{(1-\sqrt{3}i)}$ 等于

(A) $1 + \sqrt{3}i$ (B) $-1 + \sqrt{3}i$ (C) $1 - \sqrt{3}i$ (D) $-1 - \sqrt{3}i$

[Key] B

5) 如果直线 l 、 m 与平面 α 、 β 、 γ 满足: $l = \beta \cap \gamma$, $l // \alpha$, $m \subset \alpha$ 和 $m \perp \gamma$ 那么必有

(A) $\alpha \perp \gamma$ 且 $l \perp m$ (B) $\alpha \perp \gamma$ 且 $m // \beta$

(C) $m // \beta$ 且 $l \perp m$ (D) $\alpha // \beta$ 且 $\alpha \perp \gamma$

[Key] A

(6) 当 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, 函数 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ 的

(A) 最大值是1, 最小值是-1

(B) 最大值是1, 最小值是 $-(1/2)$

(C) 最大值是2, 最小值是-2

(D) 最大值是2, 最小值是-1

[Key] D

(7) 椭圆 $\begin{cases} x = 3 + 3 \cos \varphi \\ y = -1 + 5 \sin \varphi \end{cases}$ 的两个焦点坐标是(B)

- (A) $(-3, 5), (-3, -3)$ (B) $(3, 3), (3, -5)$
 (C) $(1, 1), (-7, 1)$ (D) $(7, -1), (-1, -1)$

(8) 若 $0 < a < \frac{\pi}{2}$, 则 $\arcsin[\cos(\frac{\pi}{2} + a)] + \arccos[\sin(\pi + a)]$ 等于

- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $-\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{2} - 2a$ (D) $-\frac{\pi}{2} - 2a$

[Key] A

(9) 将边长为a的正方形ABCD沿对角线AC折起, 使得BD=a, 则三棱锥D-ABC的体积为

- (A) $\frac{a^3}{6}$ (B) $\frac{a^3}{12}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

[Key] D

(10) 等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = -1$, 前n项的和为 S_n , 若 $\frac{S_{10}}{S_5} = \frac{31}{32}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 等于

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $-\frac{2}{3}$ (C) 2 (D) -2

[Key] B

(11) 椭圆的极坐标方程为 $\rho = \frac{3}{2 - \cos \theta}$, 则它在短轴上的两个顶点的极坐标是

- (A) $(3, 0), (1, \pi)$ (B) $(\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}), (\sqrt{3}, \frac{3\pi}{2})$
 (B) $(2, \frac{\pi}{3}), (2, \frac{5\pi}{3})$ (B) $(\sqrt{7}, \arctg \frac{\sqrt{3}}{2}), (\sqrt{7}, 2\pi - \arctg \frac{\sqrt{3}}{2})$

[Key] C

(12) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前m项和为30, 前2m项和为100, 则它的前3m项和为

- (A) 130 (B) 170 (C) 210 (D) 260

[Key] C

(13) 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < a < b)$ 的半焦距为c, 直线l过两点(a, 0) (0, b)。已知原点到直线l的距离为

$\frac{\sqrt{3}}{4}c$, 则双曲线的离心率为

(A)2 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

[Key] A

(14) 母线长为1的圆锥体积最大时, 其侧面展开图圆心角 ψ 等于

(A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ (C) $\sqrt{2}\pi$ (D) $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

[Key] D

(15) 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数, $f(x+2)=f(x)$, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x)=x$, 则 $f(7.5)$ 等于

(A)0.5 (B)-0.5
(C)1.5 (D)-1.5

[Key] B

(16) 已知圆 $x^2+y^2-6x-7=0$ 与抛物线 $y^2=2px$ ($p>0$) 的准线相切. 则 $P=$ _____.

[Key] 2

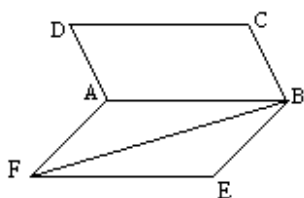
(17) 正六边形的中心和顶点共7个点, 以其中3个点为顶点的三角形共有_____个(用数字作答).

[Key] 32

(18) $\text{tg}20^\circ + \text{tg}40^\circ + \sqrt{3} \text{tg}20^\circ \text{tg}40^\circ$ 的值是_____

[Key] $\sqrt{3}$

(19) 如图,



正方形ABCD所在平面与正方形ABEF所在平面成 60° 的二面角, 则异面直线AD与BF所成角的余弦值是_____

[Key] $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(20) 解不等式 $\log_a \left(1 - \frac{1}{x}\right) > 1$ 。

[Key]

本小题考查对数函数性质, 对数不等式的解法, 分类讨论的方法和运算能力. 满分11分.

解: (I) 当 $a > 1$ 时, 原不等式等价于不等式组:

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{x} > 0 \\ 1 - \frac{1}{x} > a \end{cases} \quad \text{2分}$$

由此得 $1 - a > \frac{1}{x}$

因为 $1 - a < 0$, 所以 $x < 0$,

$$\therefore \frac{1}{1-a} < x < 0 \quad \text{5分}$$

(II) 当 $0 < a < 1$ 时, 原不等式等价于不等式组:

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{x} > 0 & (1) \\ 1 - \frac{1}{x} < a & (2) \end{cases} \quad \text{7分}$$

由①得, $x > 1$ 或 $x < 0$,

由(2)得, $0 < x < \frac{1}{1-a}$, $\therefore 1 < x < \frac{1}{1-a}$ 10分

综上, 当 $a > 1$ 时, 不等式的解集为 $\{x \mid \frac{1}{1-a} < x < 0\}$

当 $0 < a < 1$ 时, 不等式的解集为 $\{x \mid 1 < x < \frac{1}{1-a}\}$ 11分

(21) 已知 $\triangle ABC$ 的三个角 A, B, C 满足 $A+C=2B$, $\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos C} = -\frac{\sqrt{2}}{\cos B}$, 求 $\cos \frac{A-C}{2}$ 的值

[Key]

本小题考查三角函数基础知识, 利用三角公式进行恒等变形和运算的能力. 满分12分.

解法一: 由题设条件知 $B=60^\circ$, $A+C=120^\circ$. 2分

$$\therefore \frac{-\sqrt{2}}{\cos 60^\circ} = -2\sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos C} = -2\sqrt{2}$$

将上式化为 $\cos A + \cos C = -2\sqrt{2} \cos A \cos C$

利用和差化积及积化和差公式, 上式可化为

$$2 \cos \frac{A+C}{2} + \cos \frac{A-C}{2} = -2\sqrt{2}[\cos(A+C) + \cos(A-C)]$$

将 $\cos \frac{A+C}{2} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos(A+C) = -\frac{1}{2}$ 代入上式得

$$\cos\left(\frac{A+C}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} \cos(A-C) \quad 6分$$

将 $\cos(A-C) = 2 \cos^2\left(\frac{A-C}{2}\right) - 1$ 代入上式并整理得

$$4\sqrt{2} \cos^2\left(\frac{A-C}{2}\right) + 2 \cos\left(\frac{A-C}{2}\right) - 3\sqrt{2} = 0, \quad 9分$$

$$2 \cos\left(\frac{A-C}{2} - \sqrt{2}\right)(2\sqrt{2} \cos \frac{A-C}{2} + 3) = 0$$

$$\because 2\sqrt{2} \cos \frac{A-C}{2} + 3 \neq 0$$

$$\therefore 2 \cos \frac{A-C}{2} - \sqrt{2} = 0$$

$$\text{从而得 } \cos \frac{A-C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 12分$$

解法二: 由题设条件知 $B=60^\circ$, $A+C=120^\circ$.

设 $\alpha = \frac{A-C}{2}$ 则 $A-C=2\alpha$, 可得 $A=60^\circ+\alpha$, $C=60^\circ-\alpha$ (3分)

$$\text{所以 } \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos C} = \frac{1}{\cos(60^\circ+\alpha)} + \frac{1}{\cos(60^\circ-\alpha)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha} + \frac{1}{\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha}$$

$$= \frac{\cos \alpha}{\frac{1}{4} \cos^2 \alpha - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha}$$

$$= \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \frac{3}{4}} \quad (7分)$$

$$\text{依题设条件有 } \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\cos B}$$

$$\therefore \cos B = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \frac{3}{4}} = -2\sqrt{2}$$

$$\text{整理得 } 4\sqrt{2} \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha - 3\sqrt{2} = 0 \quad (9分)$$

$$(2 \cos \alpha - \sqrt{2})(2\sqrt{2} \cos \alpha + 3) = 0$$

$$\because 2\sqrt{2} \cos \alpha + 3 \neq 0$$

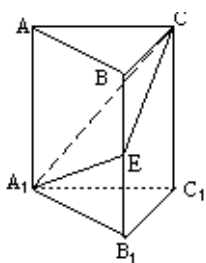
$$\therefore (2 \cos \alpha - \sqrt{2}) = 0$$

$$\text{从而得 } \cos \frac{A-C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (12分)}$$

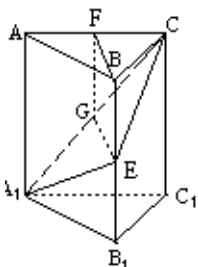
(22) 如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $E \in BB_1$, 截面 $A_1EC \perp$ 侧面 AC_1 .

(I) 求证: $BE=EB_1$;

(II) 若 $AA_1=A_1B_1$; 求平面 A_1EC 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成二面角(锐角)的度数.



注意: 在下面横线上填写适当内容, 使之成为 (I) 的完整证明, 并解答 (II).



[Key]

(I) 证明: 在截面 A_1EC 内, 过 E 作 $EG \perp A_1C$, G 是垂足.

① \because _____

$\therefore EG \perp$ 侧面 AC_1 ; 取 AC 的中点 F , 连结 BF, FG , 由 $AB=BC$ 得 $BF \perp AC$,

② \because _____

$\therefore BF \perp$ 侧面 AC_1 ; 得 $BF \parallel EG$, BF, EG 确定一个平面, 交侧面 AC_1 于 FG .

③ \because _____

$\therefore BE \parallel FG$, 四边形 $BEGF$ 是平行四边形, $BE=FG$,

④ \because _____

$\therefore FG \parallel AA_1, \triangle AA_1C \sim \triangle FGC$,

⑤ \because _____

$\therefore FG = \frac{1}{2} AA_1 = \frac{1}{2} BB_1$, 即 $BE = \frac{1}{2} BB_1$, 故 $BE = EB_1$

(II)解

本小题考查空间线面关系, 正三棱柱的性质, 逻辑思维能力, 空间想象能力及运算能力. 满分12分.

(I)①∵面 $A_1EC \perp$ 侧面 AC_1 , 2分

②∵面 $ABC \perp$ 侧面 AC_1 , 3分

③∵ $BE \parallel$ 侧面 AC_1 , 4分

④∵ $BE \parallel AA_1$, 5分

⑤∵ $AF=FC$, 6分

(II)解: 分别延长 CE 、 C_1B_1 交于点 D , 连结 A_1D .

$$\because EB_1 \parallel CC_1, EB_1 = \frac{1}{2}BB_1 = \frac{1}{2}CC_1$$

$$\therefore EB_1 = \frac{1}{2}DC_1 = B_1C_1 = A_1B_1$$

$$\because \angle A_1B_1C_1 = \angle B_1C_1A_1 = 60^\circ$$

$$\angle DA_1B_1 = \angle A_1DB_1 = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle DB_1A_1) = 30^\circ$$

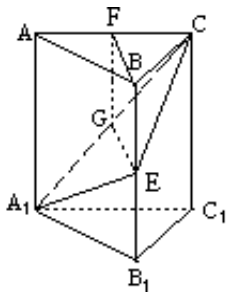
$$\angle DA_1C_1 = \angle DA_1B_1 + \angle B_1A_1C_1 = 90^\circ, \text{即 } DA_1 \perp A_1C_1 \text{ (9分)}$$

∵ $CC_1 \perp$ 面 $A_1C_1B_1$, 即 A_1C_1 是 A_1C 在平面 A_1C_1D 上的射影, 根据三垂线定理得 $DA_1 \perp A_1C$,

所以 $\angle CA_1C_1$ 所求二面角的平面角. 11分

$$\because CC_1 = AA_1 = A_1B_1 = A_1C_1, \angle A_1C_1C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CA_1C_1 = 45^\circ, \text{即所求二面角为 } 45^\circ. \text{ 12分}$$



23. 某地现有耕地10000公顷, 规划10年后粮食单产比现在增加22%, 人均粮食占有量比现在提高10%. 如果人口年增长率为1%, 那么耕地平均每年至多只能减少多少公顷 (精确到1公顷)?

$$\left(\begin{array}{l} \text{粮食单产} = \frac{\text{总产量}}{\text{耕地面积}}, \text{人均粮食占有量} = \frac{\text{总产量}}{\text{总人口数}} \end{array} \right)$$

[Key]

本小题主要考查运用数学知识和方法解决实际问题的能力,指数函数和二项式定理的应用,近似计算的方法和能力.满分10分.

解:设耕地平均每年至多只能减少 x 公顷,又设该地区现有人口为 P 人,粮食单产为 M 吨/公顷.

依题意得不等式

$$\frac{M \times (1 + 22\%) \times (10^4 - 10x)}{P \times (1 + 1\%)^{10}} \geq \frac{M \times 10^4}{P} \times (1 + 10\%) \quad (5\text{分})$$

$$\text{化简得 } x \leq 10^3 \times \left[1 - \frac{1.1 \times (1 + 0.01)^{10}}{1.22} \right]$$

$$\therefore 10^3 \times \left[1 - \frac{1.1 \times (1 + 0.01)^{10}}{1.22} \right]$$

$$= 10^3 \times \left[1 - \frac{1.1}{1.22} \times (1 + C_{10}^1 \times 0.01 + C_{10}^2 \times 0.01^2 \dots) \right]$$

$$\approx 10^3 \times \left[1 - \frac{1.1}{1.22} \times (1.1045) \right]$$

$$\approx 4.1$$

$$\therefore x \leq 4.1 \text{ (公顷)} \quad (9\text{分})$$

答:按规划该地区耕地平均每年至多只能减少4公顷. 10分

(24) 已知 l_1 、 l_2 是过点 $P(-\sqrt{2}, 0)$ 的两条互相垂直的直线,且 l_1 、 l_2 与双曲线 $y^2 - x^2 = 1$ 各有两个交点,分别为 A_1 、 B_1 和 A_2 、 B_2

(I) 求 l_1 的斜率 k_1 的取值范围;

(II) 若 $|A_1B_1| = \sqrt{5} |A_2B_2|$, 求 l_1 、 l_2 的方程

(24) 本小题主要考查直线与双曲线的性质,解析几何的基本思想,以及综合运用知识的能力.满分12分.

解: (I) 依题设, l_1 、 l_2 的斜率都存在, 因为 l_1 过点 $P(-\sqrt{2}, 0)$ 且与双曲线有两个交点, 故方程组

$$\begin{cases} y = k_1(x + \sqrt{2}) \quad (k_1 \neq 0) \\ y^2 - x^2 = 1 \end{cases} \quad (1) \quad (1\text{分})$$

有两个不同的解. 在方程组①中消去 y , 整理得

$$(k_1^2 - 1)x^2 + 2\sqrt{2}k_1^2x + 2k_1^2 - 1 = 0 \quad (2)$$

若 $k_1^2 - 1 = 0$, 则方程组①只有一个解, 即 l_1 与双曲线只有一个交点, 与题设矛盾, 故 $k_1^2 - 1 \neq 0$ 即 $|k_1| \neq 1$
方程②的判别式为

$$\Delta_1 = (2\sqrt{2}k_1^2)^2 - 4(k_1^2 - 1)(2k_1^2 - 1) = 4(3k_1^2 - 1)$$

设的斜率为 k_2 , 因为 l_2 过点 $P(-\sqrt{2}, 0)$ 且与双曲线有两个交点, 故方程组

$$\begin{cases} y = k_2(x + \sqrt{2}) (k_2 \neq 0) \\ y^2 - x^2 = 1 \end{cases} \quad (3)$$

有两个不同的解. 在方程组③中消去 y , 整理得

$$(k_2^2 - 1)x^2 + 2\sqrt{2}k_2^2x + 2k_2^2 - 1 = 0 \quad (4)$$

同理有 $k_2^2 - 1 \neq 0, \Delta_2 = 4(3k_2^2 - 1)$

又因为 $l_1 \perp l_2$, 所以有 $k_1 \cdot k_2 = -1$. 4分

于是, l_1, l_2 与双曲线各有两个交点, 等价于

$$\begin{cases} 3k_1^2 - 1 > 0 \\ 3k_2^2 - 1 > 0 \\ k_1 \cdot k_2 = -1 \\ |k_1| \neq 1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3} < k_1 < \sqrt{3} \\ |k_1| \neq 1 \end{cases} \quad (6分)$$

$$\therefore k_1 \in (-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, \frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, 1) \cup (1, \frac{\sqrt{3}}{3}) \quad (7分)$$

(II) 设 $A_1(x_1y_1), B_1(x_2y_2)$. 由方程②知

$$x_1 + x_2 = \frac{-2\sqrt{2}k_1^2}{k_1^2 - 1}, x_1 \cdot x_2 = \frac{2k_1^2 - 1}{k_1^2 - 1},$$

$$\therefore |A_1B_1|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$= (1 + k_1^2)(x_1 - x_2)^2$$

$$= 4 \frac{(1 + k_1^2)(3k_1^2 - 1)}{(k_1^2 - 1)^2} \quad (5) \quad (9分)$$

$$\text{同理, 由方程④可求得, } |A_2B_2|^2 = 4 \frac{(1 + k_1^2)(3 - k_1^2)}{(1 - k_1^2)} \quad (6)$$

$$\text{由 } |A_1B_1| = \sqrt{5} |A_2B_2|, \text{ 得 } |A_1B_1|^2 = 5 |A_2B_2|^2$$

将⑤、⑥代入上式得

$$\frac{4(1 + k_1^2)(3k_1^2 - 1)}{(k_1^2 - 1)^2} = 5 \times \frac{4(1 + k_1^2)(3 - k_1^2)}{(1 - k_1^2)^2}$$

解得 $k_1 \pm \sqrt{2}$

取 $k_1 = \sqrt{2}$ 时, $l_1 : y = \sqrt{2}(x + \sqrt{2}), l_2 : y = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x + \sqrt{2})$

取 $k_1 = -\sqrt{2}$ 时, $l_1 : y = -\sqrt{2}(x + \sqrt{2}), l_2 : y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + \sqrt{2})$ (12分)

25. 已知 a, b, c 是实数, 函数 $f(x) = ax^2 + bx + c, g(x) = ax + b$, 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $|f(x)| \leq 1$.

(I) 证明: $|c| \leq 1$;

(II) 证明: 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $|g(x)| \leq 2$;

(III) 设 $a > 0$, 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $g(x)$ 的最大值为2, 求 $f(x)$.

[Key] 本小题主要考查函数的性质、含有绝对值的不等式的性质, 以及综合运用数学知识分析问题与解决问题的能力。满分12分。

(I) 证明: 由条件当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $|f(x)| \leq 1$, 取 $x=0$ 得

$$|c| = |f(0)| \leq 1,$$

即 $|c| \leq 1$. 2分

(II) 证法一:

当 $a > 0$ 时, $g(x) = ax + b$ 在 $[-1, 1]$ 上是增函数,

$$\therefore g(-1) \leq g(x) \leq g(1),$$

$$\therefore |f(x)| \leq 1 (-1 \leq x \leq 1), |c| \leq 1,$$

$$\therefore g(1) = a + b = f(1) - c \leq |f(1)| + |c| \leq 2,$$

$$g(-1) = -a + b = -f(-1) + c \geq -(|f(-1)| + |c|) \geq -2,$$

由此得 $|g(x)| \leq 2$; 5分

当 $a < 0$ 时, $g(x) = ax + b$ 在 $[-1, 1]$ 上是减函数,

$$\therefore g(-1) \geq g(x) \geq g(1),$$

$$\therefore |f(x)| \leq 1 (-1 \leq x \leq 1), |c| \leq 1,$$

$$\therefore g(-1) = -a + b = -f(-1) + c \leq |f(-1)| + |c| \leq 2,$$

$$g(1) = a + b = f(1) - c \geq -(|f(1)| + |c|) \geq -2,$$

由此得 $|g(x)| \leq 2$; 7分

当 $a = 0$ 时, $g(x) = b, f(x) = bx + c$.

$$\therefore -1 \leq x \leq 1,$$

$$\therefore |g(x)| = |f(1) - c| \leq |f(1)| + |c| \leq 2.$$

综上得 $|g(x)| \leq 2$. 8分

证法二

由 $x = \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{4}$ 可得

$$g(x) = ax + b$$

$$\begin{aligned} &= a\left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right] + b\left(\frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{2}\right) \\ &= \left[a\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + b\left(\frac{x+1}{2}\right) + c\right] - \left[a\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + b\left(\frac{x-1}{2}\right) + c\right] \\ &= f\left(\frac{x+1}{2}\right) - f\left(\frac{x-1}{2}\right) \quad (6\text{分}) \end{aligned}$$

当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, 有 $0 \leq \frac{x+1}{2} \leq 1, -1 \leq \frac{x-1}{2} \leq 0$

根据含绝对值的不等式的性质, 得

$$\left| f\left(\frac{x+1}{2}\right) - f\left(\frac{x-1}{2}\right) \right| \leq \left| f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right| + \left| f\left(\frac{x-1}{2}\right) \right| \leq 2$$

即 $|g(x)| \leq 2$. 8分

(III) 因为 $a > 0$, $g(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是增函数, 当 $x=1$ 时取得最大值 2,

即 $g(1) = a + b = f(1) - f(0) = 2$. ①

$\because -1 \leq f(0) = f(1) - 2 \leq 1 - 2 = -1$,

$\therefore c = f(0) = -1$. 10分

因为当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) \geq -1$, 即 $f(x) \geq f(0)$,

根据二次函数的性质, 直线 $x=0$ 为 $f(x)$ 的图象的对称轴, 由此得

$$-\frac{b}{2a} = 0 \text{ 即 } b = 0$$

由① 得 $a=2$.

所以 $f(x) = 2x^2 - 1$. 12分