2004年北京高考理科数学真题及答案

本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分。第I卷1至2页。第II卷3至9页。共150分。考试时间120分钟。

第I卷（选择题　共40分）

注意事项：

1. 答第I卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上。
2. 每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，不能答在试题卷上。
3. 考试结束，监考人将本试卷和答题卡一并收回。

参考公式：

三角函数的积化和差公式

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

正棱台、圆台的侧面积公式

$S_{台侧}=\frac{1}{2}(c'+c)l$

其中c'，c分别表示上、下底面周长，l表示斜高或母线长

球体的表面积公式$S_{球}=4\pi R^2$

其中R表示球的半径

一．选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

（1）设全集是实数集R，$M=\{x|-2\le x\le 2\}$，$N=\{x|x<1\}$，则$\overline{M}\cap N$等于

A. $\{x|x<-2\}$　　B. $\{x|-2<x<1\}$

C. $\{x|x<1\}$　　D. $\{x|-2\le x<1\}$

（2）满足条件$|z-i|=|3+4i|$的复数z在复平面上对应点的轨迹是

A. 一条直线　　B. 两条直线　　C. 圆　　D. 椭圆

（3）设m、n是两条不同的直线，α,β,γ是三个不同的平面，给出下列四个命题：

①若$m\perp\alpha$，$n//\alpha$，则$m\perp n$

②若$\alpha//\beta$，$\beta//\gamma$，$m\perp\alpha$，则$m\perp\gamma$

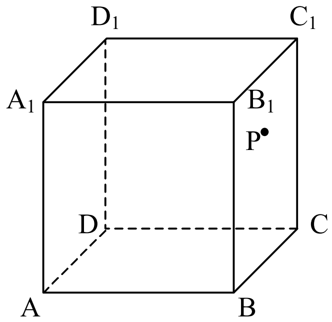
③若$m//\alpha$，$n//\alpha$，则$m//n$

④若$\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，则$\alpha//\beta$

其中正确命题的序号是

A. ①和②　　B. ②和③　　C. ③和④　　D. ①和④

（4）如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，P是侧面BB_1C_1C内一动点，若P到直线BC与直线C_1D_1的距离相等，则动点P的轨迹所在的曲线是



A. 直线　　B. 圆　　C. 双曲线　　D. 抛物线

（5）函数$f(x)=x^2-2ax-3$在区间［1，2］上存在反函数的充分必要条件是

A. $a\in(-\infty,1]$　　B. $a\in[2,+\infty)$　　C. $a\in[1,2]$　　D. $a\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$

（6）已知a、b、c满足$c<b<a$，且$ac<0$，那么下列选项中一定成立的是

A. $ab>ac$　　B. $c(b-a)<0$　　C. $cb^2<ab^2$　　D. $ac(a-c)>0$

（7）从长度分别为1，2，3，4，5的五条线段中，任取三条的不同取法共有n种。在这些取法中，以取出的三条线段为边可组成的钝角三角形的个数为m，则$\frac{m}{n}$等于

A. $\frac{1}{10}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{3}{10}$　　D. $\frac{2}{5}$

（8）函数$f(x)=\begin{cases}x, x\in P\\ -x, x\in M\end{cases}$，其中P、M为实数集R的两个非空子集，又规定$f(P)=\{y|y=f(x),x\in P\}$，$f(M)=\{y|y=f(x),x\in M\}$，给出下列四个判断：

①若$P\cap M=\varnothing$，则$f(P)\cap f(M)=\varnothing$

②若$P\cap M\neq\varnothing$，则$f(P)\cap f(M)\neq\varnothing$

③若$P\cup M=R$，则$f(P)\cup f(M)=R$

④若$P\cup M\neq R$，则$f(P)\cup f(M)\neq R$

其中正确判断有

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

第 II 卷（非选择题　共 110 分）

二. 填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。把答案填在题中横线上。

（9）函数 $f(x)=\cos 2x-2\sqrt{3}\sin x\cos x$ 的最小正周期是__________

（10）方程 $\lg(4^x+2)=\lg 2^x+\lg 3$ 的解是__________________

（11）某地球仪上北纬 30° 纬线的长度为 $12\pi\, cm$，该地球仪的半径是_________cm，表面积是_____________cm^2

（12）曲线 C：$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=-1+\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数）的普通方程是_________，如果曲线 C 与直线 $x+y+a=0$ 有公共点，那么实数 a 的取值范围是______________--

（13）在函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 中，若 a，b，c 成等比数列且 $f(0)=-4$，则 $f(x)$ 有最_____________值（填“大”或“小”），且该值为_____________

（14）定义“等和数列”：在一个数列中，如果每一项与它的后一项的和都为同一个常数，那么这个数列叫做等和数列，这个常数叫做该数列的公和。

已知数列 $\{a_n\}$ 是等和数列，且 $a_1=2$，公和为 5，那么 a_{18} 的值为_____________，这个数列的前 n 项和 S_n 的计算公式为_______________

三. 解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

（15）（本小题满分 13 分）

在 ΔABC 中，$\sin A+\cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$AC=2$，$AB=3$，求 tgA 的值和 ΔABC 的面积

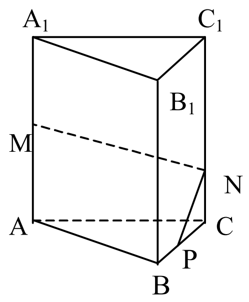
（16）（本小题满分 14 分）

如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，AB＝3，$AA_1=4$，M 为 AA_1 的中点，P 是 BC 上一点，且由 P 沿棱柱侧面经过棱 CC_1 到 M 的最短路线长为 $\sqrt{29}$，设这条最短路线与 CC_1 的交点为 N，求：

（I）该三棱柱的侧面展开图的对角线长

（II）PC 和 NC 的长

（III）平面 NMP 与平面 ABC 所成二面角（锐角）的大小（用反三角函数表示）

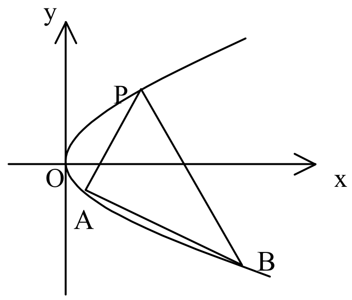


（17）（本小题满分 14 分）

如图，过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上一定点 P（x_0,y_0）（$y_0>0$），作两条直线分别交抛物线于 A（x_1,y_1），B（x_2,y_2）

（I）求该抛物线上纵坐标为 $\dfrac{p}{2}$ 的点到其焦点 F 的距离

（II）当 PA 与 PB 的斜率存在且倾斜角互补时，求 $\dfrac{y_1+y_2}{y_0}$ 的值，并证明直线 AB 的斜率是非零常数



（18）（本小题满分 14 分）

函数 $f(x)$ 是定义在［0，1］上的增函数，满足 $f(x)=2f(\dfrac{x}{2})$ 且 $f(1)=1$，在每个区间 $(\dfrac{1}{2^i},\dfrac{1}{2^{i-1}}]$（$i=1$，2……）上，$y=f(x)$ 的图象都是斜率为同一常数 k 的直线的一部分。

（I）求 $f(0)$ 及 $f(\dfrac{1}{2})$，$f(\dfrac{1}{4})$ 的值，并归纳出 $f(\dfrac{1}{2^i})(i=1,2,\cdots\cdots)$ 的表达式

（II）设直线 $x=\dfrac{1}{2^i}$，$x=\dfrac{1}{2^{i-1}}$，x 轴及 $y=f(x)$ 的图象围成的矩形的面积为 a_i（$i=1$，2……），记 $S(k)=\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$，求 $S(k)$ 的表达式，并写出其定义域和最小值

（19）（本小题满分 12 分）

某段城铁线路上依次有 A、B、C 三站，AB=5km，BC=3km，在列车运行时刻表上，规定列车 8 时整从 A 站发车，8 时 07 分到达 B 站并停车 1 分钟，8 时 12 分到达 C 站，在实际运行中，假设列车从 A 站正点发车，在 B 站停留 1 分钟，并在行驶时以同一速度 vkm/h 匀速行驶，列车从 A 站到达某站的时间与时刻表上相应时间之差的绝对值称为列车在该站的运行误差。

（I）分别写出列车在 B、C 两站的运行误差

（II）若要求列车在 B，C 两站的运行误差之和不超过 2 分钟，求 v 的取值范围

（20）（本小题满分 13 分）

给定有限个正数满足条件 T：每个数都不大于 50 且总和 L＝1275。现将这些数按下列要求进行分组，每组数之和不大于 150 且分组的步骤是：

首先，从这些数中选择这样一些数构成第一组，使得 150 与这组数之和的差r_1与所有可能的其他选择相比是最小的，r_1称为第一组余差；

然后，在去掉已选入第一组的数后，对余下的数按第一组的选择方式构成第二组，这时的余差为r_2；如此继续构成第三组（余差为r_3）、第四组（余差为r_4）、……，直至第 N 组（余差为r_N）把这些数全部分完为止。

（I）判断$r_1,r_2,\cdots,r_N$的大小关系，并指出除第 N 组外的每组至少含有几个数

（II）当构成第 n（n<N）组后，指出余下的每个数与r_n的大小关系，并证明$r_{n-1}>\dfrac{150n-L}{n-1}$

（III）对任何满足条件 T 的有限个正数，证明：$N\le 11$

2004年普通高等学校招生全国统一考试

数学试题（理工农医类）（北京卷）参考答案

一. 选择题：本大题主要考查基本知识和基本运算。每小题5分，满分40分。

（1）A （2）C （3）A （4）D

（5）D （6）C （7）B （8）B

二. 填空题：本大题主要考查基本知识和基本运算。每小题5分，满分30分。

（9）π （10）$x_1=0, x_2=1$

（11）$4\sqrt{3}$ 192π

（12）$x^2+(y+1)^2=1$ $1-\sqrt{2}\le a\le 1+\sqrt{2}$

（13）大 -3

（14）3 当n为偶数时，$S_n=\frac{5}{2}n$；当n为奇数时，$S_n=\frac{5}{2}n-\frac{1}{2}$

三. 解答题：本大题共6小题，共80分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

（15）本小题主要考查三角恒等变形、三角形面积公式等基本知识，考查运算能力。满分13分。

解法一：

$$\because \sin A+\cos A=\sqrt{2}\cos(A-45^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \cos(A-45^\circ)=\frac{1}{2}$$

又$0^\circ<A<180^\circ$

$$\therefore A-45^\circ=60^\circ, A=105^\circ$$

$$\therefore tgA=tg(45^\circ+60^\circ)=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=-2-\sqrt{3}$$

$$\sin A=\sin 105^\circ=\sin(45^\circ+60^\circ)=\sin 45^\circ\cos 60^\circ+\cos 45^\circ\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC\times AB\sin A=\frac{1}{2}\times 2\times 3\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}=\frac{3}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$$

解法二：

$$\because \sin A+\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (1)$$

$$\therefore (\sin A+\cos A)^2=\frac{1}{2}$$

$$\therefore 2\sin A\cos A=-\frac{1}{2}$$

$$\because 0^\circ<A<180^\circ, \therefore \sin A>0, \cos A<0$$

$\because (\sin A-\cos A)^2=1-2\sin A\cos A=\dfrac{3}{2}$

$\therefore \sin A-\cos A=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　（2）

（1）+（2）得：$\sin A=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

（1）－（2）得：$\cos A=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

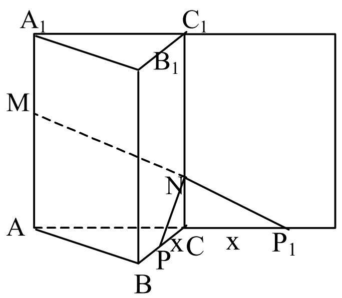
$\therefore tgA=\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\times\dfrac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}=-2-\sqrt{3}$

（以下同解法一）

（16）本小题主要考查直线与平面的位置关系、棱柱等基本知识，考查空间想象能力、逻辑思维能力和运算能力。满分 14 分。

解：（I）正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面展开图是一个长为 9，宽为 4 的矩形，其对角线长为 $\sqrt{9^2+4^2}=\sqrt{97}$

（II）如图 1，将侧面 BB_1C_1C 绕棱 CC_1 旋转 120° 使其与侧成 AA_1C_1C 在同一平面上，点 P 运动到点 P_1 的位置，连接 MP_1，则 MP_1 就是由点 P 沿棱柱侧面经过棱 CC_1 到点 M 的最短路线



设 $PC=x$，则 $P_1C=x$，在 $Rt\Delta MAP_1$ 中，由勾股定理得 $(3+x)^2+2^2=29$

求得 $x=2$

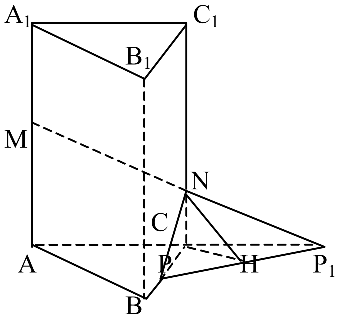
$\therefore PC=P_1C=2$

$\because \dfrac{NC}{MA}=\dfrac{P_1C}{P_1A}=\dfrac{2}{5}$

$\therefore NC=\dfrac{4}{5}$

（III）如图 2，连结 PP_1，则 PP_1 就是平面 NMP 与平面 ABC 的交线，作 $NH\perp PP_1$ 于 H，又 $CC_1\perp$ 平面

ABC，连结 CH，由三垂线定理得，$CH \perp PP_1$



$\therefore \angle NHC$ 就是平面 NMP 与平面 ABC 所成二面角的平面角（锐角）

在 $Rt\Delta PHC$ 中，$\because \angle PCH = \frac{1}{2}\angle PCP_1 = 60^\circ$

$\therefore CH = \frac{PC}{2} = 1$

在 $Rt\Delta NCH$ 中，$tg\angle NHC = \frac{NC}{CH} = \frac{\frac{4}{5}}{1} = \frac{4}{5}$

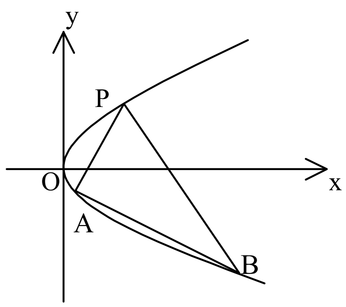
故平面 NMP 与平面 ABC 所成二面角（锐角）的大小为 $arctg\frac{4}{5}$

（17）本小题主要考查直线、抛物线等基本知识，考查运用解析几何的方法分析问题和解决问题的能力。满分 14 分

解：（I）当 $y = \frac{p}{2}$ 时，$x = \frac{p}{8}$

又抛物线 $y^2 = 2px$ 的准线方程为 $x = -\frac{p}{2}$

由抛物线定义得，所求距离为 $\frac{p}{8} - (-\frac{p}{2}) = \frac{5p}{8}$



（2）设直线 PA 的斜率为 k_{PA}，直线 PB 的斜率为 k_{PB}

由 $y_1{}^2 = 2px_1$，$y_0{}^2 = 2px_0$

相减得 $(y_1 - y_0)(y_1 + y_0) = 2p(x_1 - x_0)$

故 $k_{PA} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{2p}{y_1 + y_0}(x_1 \neq x_0)$

同理可得$k_{PB}=\dfrac{2p}{y_2+y_0}(x_2\neq x_0)$

由PA，PB倾斜角互补知$k_{PA}=-k_{PB}$

即$\dfrac{2p}{y_1+y_0}=-\dfrac{2p}{y_2+y_0}$

所以$y_1+y_2=-2y_0$

故$\dfrac{y_1+y_2}{y_0}=-2$

设直线AB的斜率为k_{AB}

由${y_2}^2=2px_2$，${y_1}^2=2px_1$

相减得$(y_2-y_1)(y_2+y_1)=2p(x_2-x_1)$

所以$k_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{2p}{y_1+y_2}(x_1\neq x_2)$

将$y_1+y_2=-2y_0(y_0>0)$代入得

$k_{AB}=\dfrac{2p}{y_1+y_2}=-\dfrac{p}{y_0}$，所以$k_{AB}$是非零常数

（18）本小题主要考查函数、数列等基本知识，考查分析问题和解决问题的能力。满分14分。

解：（I）由$f(0)=2f(0)$，得$f(0)=0$

由$f(1)=2f(\frac{1}{2})$及$f(1)=1$，得$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}f(1)=\frac{1}{2}$

同理，$f(\frac{1}{4})=\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$

归纳得$f(\frac{1}{2^i})=\frac{1}{2^i}(i=1,2,\cdots\cdots)$

（II）当$\frac{1}{2^i}<x\leq\frac{1}{2^{i-1}}$时

$f(x)=\frac{1}{2^{i-1}}+k(x-\frac{1}{2^{i-1}})$

$$a_i=\frac{1}{2}[\frac{1}{2^{i-1}}+\frac{1}{2^{i-1}}+k(\frac{1}{2^i}-\frac{1}{2^{i-1}})](\frac{1}{2^{i-1}}-\frac{1}{2^i})$$
$$=(1-\frac{k}{4})\frac{1}{2^{2i-1}}(i=1,2,\cdots\cdots)$$

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}(1-\frac{k}{4})$，公比为 $\frac{1}{4}$ 的等比数列

所以 $S(k)=\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\dfrac{\frac{1}{2}(1-\frac{k}{4})}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}(1-\frac{k}{4})$

$S(k)$ 的定义域为 $0<k\le 1$，当 $k=1$ 时取得最小值 $\frac{1}{2}$

（19）本小题主要考查解不等式等基本知识，考查应用数学知识分析问题和解决问题的能力。满分 12 分。

解：（I）列车在 B，C 两站的运行误差（单位：分钟）分别是

$|\frac{300}{v}-7|$ 和 $|\frac{480}{v}-11|$

（II）由于列车在 B，C 两站的运行误差之和不超过 2 分钟，所以

$|\frac{300}{v}-7|+|\frac{480}{v}-11|\le 2$　　　（*）

当 $0<v\le\frac{300}{7}$ 时，（*）式变形为 $\frac{300}{v}-7+\frac{480}{v}-11\le 2$

解得 $39\le v\le\frac{300}{7}$

当 $\frac{300}{7}<v\le\frac{480}{11}$ 时，（*）式变形为 $7-\frac{300}{v}+\frac{480}{v}-11\le 2$

解得 $\frac{300}{7}<v\le\frac{480}{11}$

当 $v>\frac{480}{11}$ 时，（*）式变形为 $7-\frac{300}{v}+11-\frac{480}{v}\le 2$

解得 $\frac{480}{11}<v\le\frac{195}{4}$

综上所述，v 的取值范围是 $[39,\ \frac{195}{4}]$

（20）本小题主要考查不等式的证明等基本知识，考查逻辑思维能力、分析问题和解决问题的能力。满分 13 分。

解：（I）$r_1\le r_2\le\cdots\le r_N$。除第 N 组外的每组至少含有 $\frac{150}{50}=3$ 个数

（II）当第 n 组形成后，因为 $n<N$，所以还有数没分完，这时余下的每个数必大于余差 r_n，余下数之和也大于第 n 组的余差 r_n，即

$L-[(150-r_1)+(150-r_2)+\cdots+(150-r_n)]>r_n$

由此可得 $r_1+r_2+\cdots+r_{n-1}>150n-L$

因为 $(n-1)r_{n-1}\ge r_1+r_2+\cdots+r_{n-1}$，所以 $r_{n-1}>\dfrac{150n-L}{n-1}$

（III）用反证法证明结论，假设 $N>11$，即第 11 组形成后，还有数没分完，由（I）和（II）可知，余下的每个数都大于第 11 组的余差 r_{11}，且 $r_{11}\geq r_{10}$

故余下的每个数 $>r_{11}\geq r_{10}>\dfrac{150\times 11-1275}{10}=37.5$ （*）

因为第 11 组数中至少含有 3 个数，所以第 11 组数之和大于 $37.5\times 3=112.5$

此时第 11 组的余差 $r_{11}=150-\text{第11组数之和}<150-112.5=37.5$

这与（*）式中 $r_{11}>37.5$ 矛盾，所以 $N\leq 11$