

2019 年北京市高考数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. (5 分) 已知复数 $z=2+i$ ，则 $z \cdot \bar{z} =$ ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{5}$ C. 3 D. 5

【分析】直接由 $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ 求解.

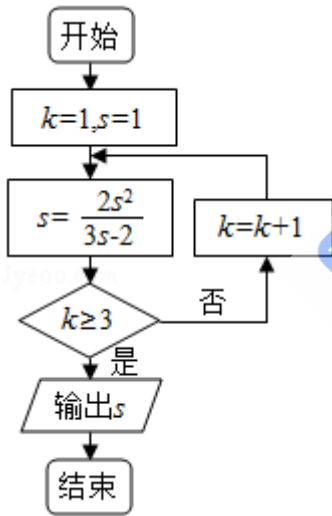
【解答】解: $\because z=2+i$,

$$\therefore z \cdot \bar{z} = |z|^2 = (\sqrt{2^2+1^2})^2 = 5.$$

故选: D.

【点评】本题考查复数及其运算性质, 是基础的计算题.

2. (5 分) 执行如图所示的程序框图, 输出的 s 值为 ()



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【分析】由已知中的程序语句可知: 该程序的功能是利用循环结构计算并输出变量 s 的值, 模拟程序的运行过程, 分析循环中各变量值的变化情况, 可得答案.

【解答】解: 模拟程序的运行, 可得

$$k=1, s=1$$

$$s=2$$

不满足条件 $k \geq 3$, 执行循环体, $k=2, s=2$

不满足条件 $k \geq 3$, 执行循环体, $k=3, s=2$

此时，满足条件 $k \geq 3$ ，退出循环，输出 s 的值为 2.

故选：B.

【点评】 本题考查了程序框图的应用问题，解题时应模拟程序框图的运行过程，以便得出正确的结论，是基础题.

3. (5分) 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+4t \end{cases}$ (t 为参数)，则点 $(1, 0)$ 到直线 l 的距

离是 ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{6}{5}$

【分析】 消参数 t 化参数方程为普通方程，再由点到直线的距离公式求解.

【解答】 解：由 $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+4t \end{cases}$ (t 为参数)，消去 t ，可得 $4x - 3y + 2 = 0$.

则点 $(1, 0)$ 到直线 l 的距离是 $d = \frac{|4 \times 1 - 3 \times 0 + 2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{6}{5}$.

故选：D.

【点评】 本题考查参数方程化普通方程，考查点到直线距离公式的应用，是基础题.

4. (5分) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，则 ()

- A. $a^2 = 2b^2$ B. $3a^2 = 4b^2$ C. $a = 2b$ D. $3a = 4b$

【分析】 由椭圆离心率及隐含条件 $a^2 = b^2 + c^2$ 得答案.

【解答】 解：由题意， $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ ，得 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{4}$ ，则 $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{1}{4}$ ，

$\therefore 4a^2 - 4b^2 = a^2$ ，即 $3a^2 = 4b^2$.

故选：B.

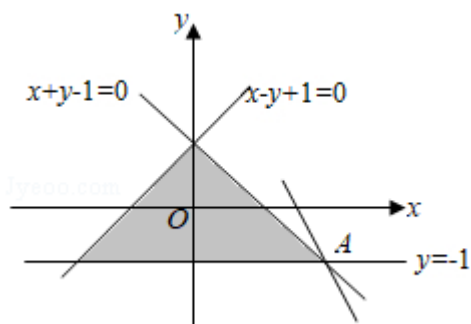
【点评】 本题考查椭圆的简单性质，熟记隐含条件是关键，是基础题.

5. (5分) 若 x, y 满足 $|x| \leq 1 - y$ ，且 $y \geq -1$ ，则 $3x + y$ 的最大值为 ()

- A. -7 B. 1 C. 5 D. 7

【分析】 由约束条件作出可行域，令 $z = 3x + y$ ，化为直线方程的斜截式，数形结合得到最优解，把最优解的坐标代入目标函数得答案.

【解答】 解：由 $\begin{cases} |x| \leq 1 - y \\ y \geq -1 \end{cases}$ 作出可行域如图，



联立 $\begin{cases} y=-1 \\ x+y-1=0 \end{cases}$, 解得 $A(2, -1)$,

令 $z=3x+y$, 化为 $y=-3x+z$,

由图可知, 当直线 $y=-3x+z$ 过点 A 时, z 有最大值为 $3 \times 2 - 1 = 5$.

故选: C.

【点评】 本题考查简单的线性规划, 考查数形结合的解题思想方法, 是中档题.

6. (5分) 在天文学中, 天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述. 两颗星的星等与亮度满

足 $m_2 - m_1 = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2}$, 其中星等为 m_k 的星的亮度为 E_k ($k=1, 2$). 已知太阳的星等是 -

26.7, 天狼星的星等是 -1.45, 则太阳与天狼星的亮度的比值为 ()

- A. $10^{10.1}$ B. 10.1 C. $\lg 10.1$ D. $10^{-10.1}$

【分析】 把已知熟记代入 $m_2 - m_1 = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2}$, 化简后利用对数的运算性质求解.

【解答】 解: 设太阳的星等是 $m_1 = -26.7$, 天狼星的星等是 $m_2 = -1.45$,

由题意可得: $-1.45 - (-26.7) = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2}$,

$\therefore \lg \frac{E_1}{E_2} = \frac{50.5}{5} = 10.1$, 则 $\frac{E_1}{E_2} = 10^{10.1}$.

故选: A.

【点评】 本题考查对数的运算性质, 是基础的计算题.

7. (5分) 设点 A, B, C 不共线, 则“ \vec{AB} 与 \vec{AC} 的夹角为锐角”是“ $|\vec{AB} + \vec{AC}| > |\vec{BC}|$ ”的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【分析】 “ \vec{AB} 与 \vec{AC} 的夹角为锐角” \Rightarrow “ $|\vec{AB} + \vec{AC}| > |\vec{BC}|$ ”, “ $|\vec{AB} + \vec{AC}| > |\vec{BC}|$ ” \Rightarrow “ \vec{AB} 与 \vec{AC} ”

的夹角为锐角”，由此能求出结果.

【解答】解：点 A, B, C 不共线，

“ \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{AC} 的夹角为锐角” \Rightarrow “ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| > |\overrightarrow{BC}|$ ”，

“ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| > |\overrightarrow{BC}|$ ” \Rightarrow “ \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{AC} 的夹角为锐角”，

\therefore 设点 A, B, C 不共线，则“ \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{AC} 的夹角为锐角”是“ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| > |\overrightarrow{BC}|$ ”的充分必要条件.

故选：C.

【点评】 本题考查充分条件、必要条件、充要条件的判断，考查向量等基础知识，考查推理能力与计算能力，属于基础题.

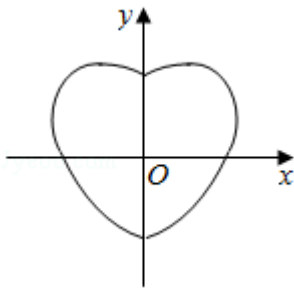
8. (5分) 数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线，曲线 $C: x^2 + y^2 = 1 + |x|y$ 就是其中之一 (如图). 给出下列三个结论:

① 曲线 C 恰好经过 6 个整点 (即横、纵坐标均为整数的点);

② 曲线 C 上任意一点到原点的距离都不超过 $\sqrt{2}$;

③ 曲线 C 所围成的“心形”区域的面积小于 3.

其中，所有正确结论的序号是 ()



A. ①

B. ②

C. ①②

D. ①②③

【分析】 将 x 换成 $-x$ 方程不变，所以图形关于 y 轴对称，根据对称性讨论 y 轴右边的图形可得.

【解答】 解：将 x 换成 $-x$ 方程不变，所以图形关于 y 轴对称，

当 $x=0$ 时，代入得 $y^2=1$ ， $\therefore y=\pm 1$ ，即曲线经过 $(0, 1), (0, -1)$;

当 $x>0$ 时，方程变为 $y^2 - xy + x^2 - 1 = 0$ ，所以 $\Delta = x^2 - 4(x^2 - 1) \geq 0$ ，解得 $x \in (0, \frac{2\sqrt{3}}{3}]$,

所以 x 只能取整数 1，当 $x=1$ 时， $y^2 - y = 0$ ，解得 $y=0$ 或 $y=1$ ，即曲线经过 $(1, 0)$,

(1, 1),

根据对称性可得曲线还经过 (-1, 0), (-1, 1),

故曲线一共经过 6 个整点, 故①正确.

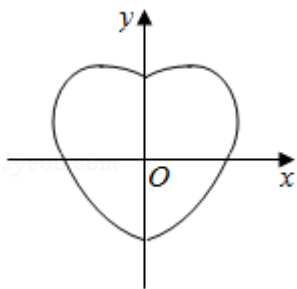
当 $x > 0$ 时, 由 $x^2 + y^2 = 1 + xy$ 得 $x^2 + y^2 - 1 = xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$, (当 $x = y$ 时取等),

$\therefore x^2 + y^2 \leq 2$, $\therefore \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2}$, 即曲线 C 上 y 轴右边的点到原点的距离不超过 $\sqrt{2}$, 根

据对称性可得: 曲线 C 上任意一点到原点的距离都不超过 $\sqrt{2}$; 故②正确.

在 x 轴上图形面积大于矩形面积 $= 1 \times 2 = 2$, x 轴下方的面积大于等腰直角三角形的面积 $= \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$, 因此曲线 C 所围成的“心形”区域的面积大于 $2 + 1 = 3$, 故③错误.

故选: C .



【点评】 本题考查了命题的真假判断与应用, 属中档题.

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

9. (5 分) 函数 $f(x) = \sin^2 2x$ 的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$.

【分析】 用二倍角公式可得 $f(x) = \frac{1}{2} \cos(4x) + \frac{1}{2}$, 然后用周期公式求出周期即可.

【解答】 解: $\because f(x) = \sin^2(2x)$,

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} \cos(4x) + \frac{1}{2},$$

$$\therefore f(x) \text{ 的周期 } T = \frac{\pi}{2},$$

故答案为: $\frac{\pi}{2}$.

【点评】 本题考查了三角函数的图象与性质, 关键是合理使用二倍角公式, 属基础题.

10. (5 分) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_2 = -3$, $S_5 = -10$, 则 $a_5 = 0$, S_n 的最小值为 -10 .

【分析】 利用等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式、通项公式列出方程组, 能求出 $a_1 = -4$, $d =$

1, 由此能求出 a_5 的 S_n 的最小值.

【解答】解: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_2 = -3$, $S_5 = -10$,

$$\therefore \begin{cases} a_1 + d = -3 \\ 5a_1 + \frac{5 \times 4}{2}d = -10 \end{cases},$$

解得 $a_1 = -4$, $d = 1$,

$$\therefore a_5 = a_1 + 4d = -4 + 4 \times 1 = 0,$$

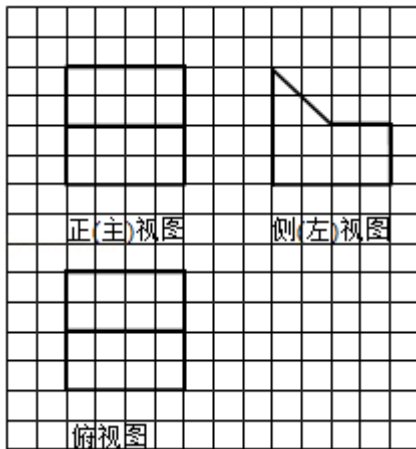
$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = -4n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2} \left(n - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{81}{8},$$

$\therefore n = 4$ 或 $n = 5$ 时, S_n 取最小值为 $S_4 = S_5 = -10$.

故答案为: 0, -10.

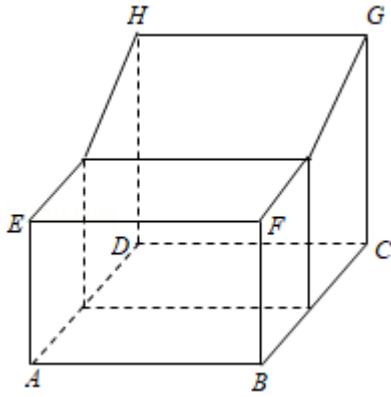
【点评】 本题考查等差数列的第 5 项的求法, 考查等差数列的前 n 项和的最小值的求法, 考查等差数列的性质等基础知识, 考查推理能力与计算能力, 属于基础题.

11. (5 分) 某几何体是由一个正方体去掉一个四棱柱所得, 其三视图如图所示. 如果网格纸上小正方形的边长为 1, 那么该几何体的体积为 40.



【分析】 由三视图还原原几何体, 然后利用一个长方体与一个棱柱的体积作和求解.

【解答】解: 由三视图还原原几何体如图,



该几何体是把棱长为 4 的正方体去掉一个四棱柱，

则该几何体的体积 $V = 4 \times 2 \times 2 + \frac{1}{2}(2+4) \times 2 \times 4 = 40$.

故答案为：40.

【点评】 本题考查由三视图求面积、体积，关键是由三视图还原原几何体，是中档题.

12. (5分) 已知 l, m 是平面 α 外的两条不同直线. 给出下列三个论断:

① $l \perp m$; ② $m \parallel \alpha$; ③ $l \perp \alpha$.

以其中的两个论断作为条件, 余下的一个论断作为结论, 写出一个正确的命题: 若 $l \perp \alpha, l \perp m$, 则 $m \parallel \alpha$.

【分析】 由 l, m 是平面 α 外的两条不同直线, 利用线面平行的判定定理得若 $l \perp \alpha, l \perp m$, 则 $m \parallel \alpha$.

【解答】 解: 由 l, m 是平面 α 外的两条不同直线, 知:

由线面平行的判定定理得:

若 $l \perp \alpha, l \perp m$, 则 $m \parallel \alpha$.

故答案为: 若 $l \perp \alpha, l \perp m$, 则 $m \parallel \alpha$.

【点评】 本题考查满足条件的真命题的判断, 考查空间中直线、线面、面面间的位置关系等基础知识, 考查推理能力与计算能力, 属于中档题.

13. (5分) 设函数 $f(x) = e^x + ae^{-x}$ (a 为常数). 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $a = \underline{-1}$; 若 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数, 则 a 的取值范围是 $(-\infty, 0]$.

【分析】 对于第一空: 由奇函数的定义可得 $f(-x) = -f(x)$, 即 $e^{-x} + ae^x = -(e^x + ae^{-x})$, 变形可得分析可得 a 的值, 即可得答案;

对于第二空: 求出函数的导数, 由函数的导数与单调性的关系分析可得 $f(x)$ 的导数 $f'(x) = e^x - ae^{-x} \geq 0$ 在 \mathbf{R} 上恒成立, 变形可得: $a \leq e^{2x}$ 恒成立, 据此分析可得答案.

【解答】解：根据题意，函数 $f(x) = e^x + ae^{-x}$ ，

若 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(-x) = -f(x)$ ，即 $e^{-x} + ae^x = -(e^x + ae^{-x})$ ，变形可得 $a = -1$ ，

函数 $f(x) = e^x + ae^{-x}$ ，导数 $f'(x) = e^x - ae^{-x}$

若 $f(x)$ 是 R 上的增函数，则 $f(x)$ 的导数 $f'(x) = e^x - ae^{-x} \geq 0$ 在 R 上恒成立，

变形可得： $a \leq e^{2x}$ 恒成立，分析可得 $a \leq 0$ ，即 a 的取值范围为 $(-\infty, 0]$ ；

故答案为： $-1, (-\infty, 0]$ 。

【点评】 本题考查函数的奇偶性与单调性的判定，关键是理解函数的奇偶性与单调性的定义，属于基础题。

14. (5分) 李明自主创业，在网上经营一家水果店，销售的水果中有草莓、京白梨、西瓜、桃，价格依次为 60 元/盒、65 元/盒、80 元/盒、90 元/盒。为增加销量，李明对这四种水果进行促销：一次购买水果的总价达到 120 元，顾客就少付 x 元。每笔订单顾客网上支付成功后，李明会得到支付款的 80%。

①当 $x=10$ 时，顾客一次购买草莓和西瓜各 1 盒，需要支付 130 元；

②在促销活动中，为保证李明每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折，则 x 的最大值为 15。

【分析】 ①由题意可得顾客一次购买的总金额，减去 x ，可得所求值；

②在促销活动中，设订单总金额为 m 元，可得 $(m-x) \times 80\% \geq m \times 70\%$ ，解不等式，结合恒成立思想，可得 x 的最大值。

【解答】解：①当 $x=10$ 时，顾客一次购买草莓和西瓜各 1 盒，可得 $60+80=140$ (元)，
即有顾客需要支付 $140-10=130$ (元)；

②在促销活动中，设订单总金额为 m 元，

可得 $(m-x) \times 80\% \geq m \times 70\%$ ，

即有 $x \leq \frac{m}{8}$ ，

由题意可得 $m \geq 120$ ，

可得 $x \leq \frac{120}{8} = 15$ ，

则 x 的最大值为 15 元。

故答案为：130, 15

【点评】 本题考查不等式在实际问题的应用，考查化简运算能力，属于中档题。

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15. (13 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $a=3$, $b-c=2$, $\cos B = -\frac{1}{2}$.

(I) 求 b, c 的值;

(II) 求 $\sin(B-C)$ 的值.

【分析】(I) 利用余弦定理可得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$, 代入已知条件即可得到关于 b 的方程, 解方程即可;

(II) $\sin(B-C) = \sin B \cos C - \cos B \sin C$, 根据正弦定理可求出 $\sin C$, 然后求出 $\cos C$, 代入即可得解.

【解答】解: (I) $\because a=3, b-c=2, \cos B = -\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \therefore \text{由余弦定理, 得 } b^2 &= a^2 + c^2 - 2accosB \\ &= 9 + (b-2)^2 - 2 \times 3 \times (b-2) \times \left(-\frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

$$\therefore b=7, \therefore c=b-2=5;$$

(II) 在 $\triangle ABC$ 中, $\because \cos B = -\frac{1}{2}, \therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

由正弦定理有: $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$,

$$\therefore \sin C = \frac{c \sin B}{b} = \frac{5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{7} = \frac{5\sqrt{3}}{14},$$

$\because b > c, \therefore B > C, \therefore C$ 为锐角,

$$\therefore \cos C = \frac{11}{14},$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin(B-C) &= \sin B \cos C - \cos B \sin C \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{11}{14} - \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{5\sqrt{3}}{14} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{7}. \end{aligned}$$

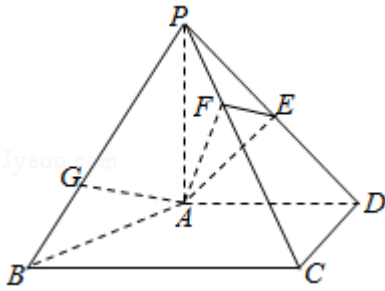
【点评】 本题考查了正弦定理余弦定理和两角差的正弦公式, 属基础题.

16. (14 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp CD$, $AD \parallel BC$, $PA = AD = CD = 2$, $BC = 3$. E 为 PD 的中点, 点 F 在 PC 上, 且 $\frac{PF}{PC} = \frac{1}{3}$.

(I) 求证: $CD \perp$ 平面 PAD ;

(II) 求二面角 $F-AE-P$ 的余弦值;

(III) 设点 G 在 PB 上, 且 $\frac{PG}{PB} = \frac{2}{3}$. 判断直线 AG 是否在平面 AEF 内, 说明理由.



【分析】(I) 推导出 $PA \perp CD$, $AD \perp CD$, 由此能证明 $CD \perp$ 平面 PAD .

(II) 以 A 为原点, 在平面 $ABCD$ 内过 A 作 CD 的平行线为 x 轴, AD 为 y 轴, AP 为 z 轴, 建立空间直角坐标系, 利用向量法能求出二面角 $F-AE-P$ 的余弦值.

(III) 求出 $\vec{AG} = (\frac{4}{3}, 0, \frac{2}{3})$, 平面 AEF 的法向量 $\vec{\pi} = (1, 1, -1)$, $\vec{m} \cdot \vec{AG} = 0$, 从而直线 AG 在平面 AEF 内.

【解答】证明: (I) $\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, $\therefore PA \perp CD$,

$\because AD \perp CD$, $PA \cap AD = A$,

$\therefore CD \perp$ 平面 PAD .

解: (II) 以 A 为原点, 在平面 $ABCD$ 内过 A 作 CD 的平行线为 x 轴, AD 为 y 轴, AP 为 z 轴, 建立空间直角坐标系,

$A(0, 0, 0)$, $E(0, 1, 1)$, $F(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$,

$P(0, 0, 2)$, $B(2, -1, 0)$,

$\vec{AE} = (0, 1, 1)$, $\vec{AF} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$,

平面 AEP 的法向量 $\vec{n} = (1, 0, 0)$,

设平面 AEF 的法向量 $\vec{\pi} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AE} = y + z = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{AF} = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}z = 0 \end{cases}, \text{取 } x=1, \text{ 得 } \vec{\pi} = (1, 1, -1),$$

设二面角 $F-AE-P$ 的平面角为 θ ,

$$\text{则 } \cos\theta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

\therefore 二面角 $F-AE-P$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(III) 直线 AG 在平面 AEF 内, 理由如下:

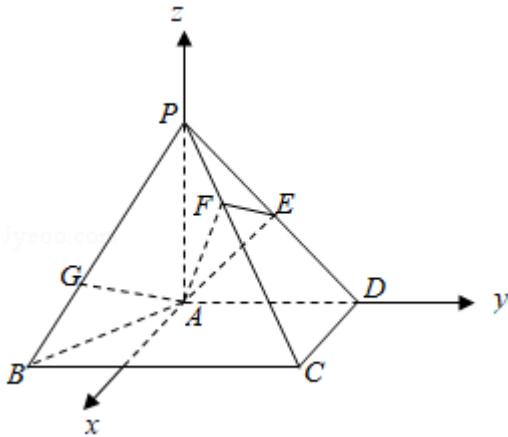
$$\because \text{点 } G \text{ 在 } PB \text{ 上, 且 } \frac{PG}{PB} = \frac{2}{3}, \therefore G \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right),$$

$$\therefore \vec{AG} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right),$$

$$\because \text{平面 } AEF \text{ 的法向量 } \vec{n} = (1, 1, -1),$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AG} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0,$$

故直线 AG 在平面 AEF 内.



【点评】 本题考查线面垂直的证明, 考查二面角的余弦值的求法, 考查直线是否在已知平面内的判断与求法, 考查空间中中线、线面、面面间的位置关系等基础知识, 考查推理能力与计算能力, 属于中档题.

17. (13分) 改革开放以来, 人们的支付方式发生了巨大转变. 近年来, 移动支付已成为主要支付方式之一. 为了解某校学生上个月 A, B 两种移动支付的使用情况, 从全校学生中随机抽取了 100 人, 发现样本中 A, B 两种支付方式都不使用的有 5 人, 样本中仅使用 A 和仅使用 B 的学生的支付金额分布情况如下:

支付方式 \ 支付金额 (元)	(0, 1000]	(1000, 2000]	大于 2000
仅使用 A	18 人	9 人	3 人
仅使用 B	10 人	14 人	1 人

(I) 从全校学生中随机抽取 1 人, 估计该学生上个月 A, B 两种支付方式都使用的概率;

(II) 从样本仅使用 A 和仅使用 B 的学生中各随机抽取 1 人, 以 X 表示这 2 人中上个月支付金额大于 1000 元的人数, 求 X 的分布列和数学期望;

(III) 已知上个月样本学生的支付方式在本月没有变化. 现从样本仅使用 A 的学生中, 随机抽查 3 人, 发现他们本月的支付金额都大于 2000 元. 根据抽查结果, 能否认为样本仅使用 A 的学生中本月支付金额大于 2000 元的人数有变化? 说明理由.

【分析】(I) 从全校所有的 1000 名学生中随机抽取的 100 人中, A, B 两种支付方式都不使用的有 5 人, 仅使用 A 的有 30 人, 仅使用 B 的有 25 人, 从而 A, B 两种支付方式都使用的人数有 40 人, 由此能求出从全校学生中随机抽取 1 人, 估计该学生上个月 A, B 两种支付方式都使用的概率.

(II) 从样本仅使用 A 和仅使用 B 的学生中各随机抽取 1 人, 以 X 表示这 2 人中上个月支付金额大于 1000 元的人数, 则 X 的可能取值为 0, 1, 2, 分别求出相应的概率, 由此能求出 X 的分布列和数学期望 $E(X)$.

(III) 从样本仅使用 A 的学生有 30 人, 其中 27 人月支付金额不大于 2000 元, 有 3 人月支付金额大于 2000 元, 随机抽查 3 人, 发现他们本月的支付金额都大于 2000 元的概率

为 $p = \frac{C_3^3}{C_{30}^3} = \frac{1}{4060}$, 不能认为认为样本仅使用 A 的学生中本月支付金额大于 2000 元的人数有变化.

【解答】解: (I) 由题意得:

从全校所有的 1000 名学生中随机抽取的 100 人中,

A, B 两种支付方式都不使用的有 5 人,

仅使用 A 的有 30 人, 仅使用 B 的有 25 人,

$\therefore A, B$ 两种支付方式都使用的人数有: $100 - 5 - 30 - 25 = 40$,

\therefore 从全校学生中随机抽取 1 人, 估计该学生上个月 A, B 两种支付方式都使用的概率 $p =$

$$\frac{40}{100} = 0.4.$$

(II) 从样本仅使用 A 和仅使用 B 的学生中各随机抽取 1 人, 以 X 表示这 2 人中上个月支付金额大于 1000 元的人数,

则 X 的可能取值为 0, 1, 2,

样本仅使用 A 的学生有 30 人, 其中支付金额在 $(0, 1000]$ 的有 18 人, 超过 1000 元的有 12 人,

样本仅使用 B 的学生有 25 人, 其中支付金额在 $(0, 1000]$ 的有 10 人, 超过 1000 元的有 15 人,

$$P(X=0) = \frac{18}{30} \times \frac{10}{25} = \frac{180}{750} = \frac{6}{25},$$

$$P(X=1) = \frac{18}{30} \times \frac{15}{25} + \frac{12}{30} \times \frac{10}{25} = \frac{390}{750} = \frac{13}{25},$$

$$P(X=2) = \frac{12}{30} \times \frac{15}{25} = \frac{180}{750} = \frac{6}{25},$$

∴ X 的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{6}{25}$	$\frac{13}{25}$	$\frac{6}{25}$

$$\text{数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{6}{25} + 1 \times \frac{13}{25} + 2 \times \frac{6}{25} = 1.$$

(III) 不能认为样本仅使用 A 的学生中本月支付金额大于 2000 元的人数有变化,

理由如下:

从样本仅使用 A 的学生有 30 人, 其中 27 人月支付金额不大于 2000 元, 有 3 人月支付金额大于 2000 元,

随机抽查 3 人, 发现他们本月的支付金额都大于 2000 元的概率为 $p = \frac{C_3^3}{C_{30}^3} = \frac{1}{4060}$,

虽然概率较小, 但发生的可能性为 $\frac{1}{4060}$.

故不能认为认为样本仅使用 A 的学生中本月支付金额大于 2000 元的人数有变化.

【点评】 本题考查概率、离散型随机变量的分布列、数学期望的求法, 考查古典概型、相互独立事件概率乘法公式等基础知识, 考查推理能力与计算能力, 是中档题.

18. (14 分) 已知抛物线 $C: x^2 = -2py$ 经过点 $(2, -1)$.

(I) 求抛物线 C 的方程及其准线方程;

(II) 设 O 为原点, 过抛物线 C 的焦点作斜率不为 0 的直线 l 交抛物线 C 于两点 M, N , 直线 $y = -1$ 分别交直线 OM, ON 于点 A 和点 B . 求证: 以 AB 为直径的圆经过 y 轴上的两个定点.

【分析】 (I) 代入点 $(2, -1)$, 解方程可得 p , 求得抛物线的方程和准线方程;

(II) 抛物线 $x^2 = -4y$ 的焦点为 $F(0, -1)$, 设直线方程为 $y = kx - 1$, 联立抛物线方程, 运用韦达定理, 以及直线的斜率和方程, 求得 A, B 的坐标, 可得 AB 为直径的圆方程, 可令 $x = 0$, 解方程, 即可得到所求定点.

【解答】 解: (I) 抛物线 $C: x^2 = -2py$ 经过点 $(2, -1)$. 可得 $4 = 2p$, 即 $p = 2$,

可得抛物线 C 的方程为 $x^2 = -4y$, 准线方程为 $y=1$;

(II) 证明: 抛物线 $x^2 = -4y$ 的焦点为 $F(0, -1)$,

设直线方程为 $y=kx-1$, 联立抛物线方程, 可得 $x^2+4kx-4=0$,

设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

可得 $x_1+x_2 = -4k$, $x_1x_2 = -4$,

直线 OM 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1}x$, 即 $y = -\frac{x_1}{4}x$,

直线 ON 的方程为 $y = \frac{y_2}{x_2}x$, 即 $y = -\frac{x_2}{4}x$,

可得 $A(\frac{4}{x_1}, -1)$, $B(\frac{4}{x_2}, -1)$,

可得 AB 的中点的横坐标为 $2(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}) = 2 \cdot \frac{-4k}{-4} = 2k$,

即有 AB 为直径的圆心为 $(2k, -1)$,

半径为 $\frac{|AB|}{2} = \frac{1}{2}|\frac{4}{x_1} - \frac{4}{x_2}| = 2 \cdot \frac{\sqrt{16k^2+16}}{4} = 2\sqrt{1+k^2}$,

可得圆的方程为 $(x-2k)^2 + (y+1)^2 = 4(1+k^2)$,

化为 $x^2 - 4kx + (y+1)^2 = 4$,

由 $x=0$, 可得 $y=1$ 或 -3 .

则以 AB 为直径的圆经过 y 轴上的两个定点 $(0, 1)$, $(0, -3)$.

【点评】 本题考查抛物线的定义和方程、性质, 以及圆方程的求法, 考查直线和抛物线方程联立, 运用韦达定理, 考查化简整理的运算能力, 属于中档题.

19. (13分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$.

(I) 求曲线 $y=f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程;

(II) 当 $x \in [-2, 4]$ 时, 求证: $x-6 \leq f(x) \leq x$;

(III) 设 $F(x) = |f(x) - (x+a)|$ ($a \in \mathbf{R}$), 记 $F(x)$ 在区间 $[-2, 4]$ 上的最大值为 M

(a). 当 $M(a)$ 最小时, 求 a 的值.

【分析】 (I) 求导数 $f'(x)$, 由 $f'(x) = 1$ 求得切点, 即可得点斜式方程;

(II) 把所证不等式转化为 $-6 \leq f(x) - x \leq 0$, 再令 $g(x) = f(x) - x$, 利用导数研究 $g(x)$ 在 $[-2, 4]$ 的单调性和极值点即可得证;

(III) 先把 $F(x)$ 化为 $|g(x) - a|$, 再利用 (II) 的结论, 引进函数 $h(t) = |t - a|$, 结

合绝对值函数的对称性，单调性，通过对称轴 $t=a$ 与 -3 的关系分析即可。

【解答】解：(I) $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 1$,

由 $f'(x) = 1$ 得 $x(x - \frac{8}{3}) = 0$,

得 $x_1 = 0, x_2 = \frac{8}{3}$.

又 $f(0) = 0, f(\frac{8}{3}) = \frac{8}{27}$,

$\therefore y=x$ 和 $y - \frac{8}{27} = x - \frac{8}{3}$,

即 $y=x$ 和 $y=x - \frac{64}{27}$;

(II) 证明：欲证 $x - 6 \leq f(x) \leq x$,

只需证 $-6 \leq f(x) - x \leq 0$,

令 $g(x) = f(x) - x = \frac{1}{4}x^3 - x^2, x \in [-2, 4]$,

则 $g'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x = \frac{3}{4}x(x - \frac{8}{3})$,

可知 $g'(x)$ 在 $[-2, 0]$ 为正，在 $(0, \frac{8}{3})$ 为负，在 $[\frac{8}{3}, 4]$ 为正，

$\therefore g(x)$ 在 $[-2, 0]$ 递增，在 $[0, \frac{8}{3}]$ 递减，在 $[\frac{8}{3}, 4]$ 递增，

又 $g(-2) = -6, g(0) = 0, g(\frac{8}{3}) = -\frac{64}{27} > -6, g(4) = 0$,

$\therefore -6 \leq g(x) \leq 0$,

$\therefore x - 6 \leq f(x) \leq x$;

(III) 由 (II) 可得，

$$F(x) = |f(x) - (x+a)|$$

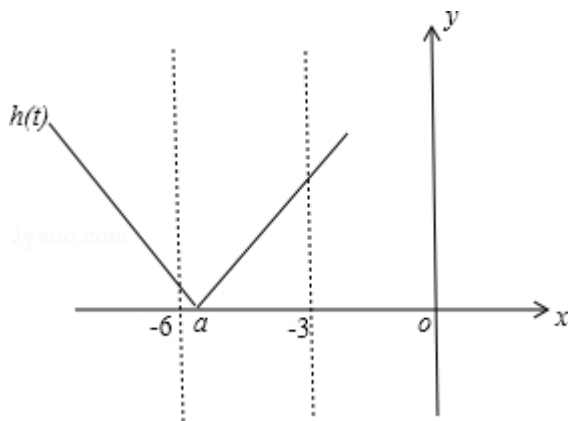
$$= |f(x) - x - a|$$

$$= |g(x) - a|$$

\therefore 在 $[-2, 4]$ 上， $-6 \leq g(x) \leq 0$,

令 $t = g(x), h(t) = |t - a|$,

则问题转化为当 $t \in [-6, 0]$ 时， $h(t)$ 的最大值 $M(a)$ 的问题了，



①当 $a \leq -3$ 时, $M(a) = h(0) = |a| = -a$,

此时 $-a \geq 3$, 当 $a = -3$ 时, $M(a)$ 取得最小值 3;

②当 $a \geq -3$ 时, $M(a) = h(-6) = |-6 - a| = |6 + a|$,

$\because 6 + a \geq 3, \therefore M(a) = 6 + a$,

也是 $a = -3$ 时, $M(a)$ 最小为 3.

综上, 当 $M(a)$ 取最小值时 a 的值为 -3 .

【点评】 此题考查了导数的综合应用, 构造法, 转化法, 数形结合法等, 难度较大.

20. (13分) 已知数列 $\{a_n\}$, 从中选取第 i_1 项、第 i_2 项、 \dots 、第 i_m 项 ($i_1 < i_2 < \dots < i_m$), 若 $a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_m}$, 则称新数列 $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}$ 为 $\{a_n\}$ 的长度为 m 的递增子列. 规定: 数列 $\{a_n\}$ 的任意一项都是 $\{a_n\}$ 的长度为 1 的递增子列.

(I) 写出数列 1, 8, 3, 7, 5, 6, 9 的一个长度为 4 的递增子列;

(II) 已知数列 $\{a_n\}$ 的长度为 p 的递增子列的末项的最小值为 a_{m_0} , 长度为 q 的递增子列的末项的最小值为 a_{n_0} . 若 $p < q$, 求证: $a_{m_0} < a_{n_0}$;

(III) 设无穷数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正整数, 且任意两项均不相等. 若 $\{a_n\}$ 的长度为 s 的递增子列末项的最小值为 $2s - 1$, 且长度为 s 末项为 $2s - 1$ 的递增子列恰有 2^{s-1} 个 ($s = 1, 2, \dots$), 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【分析】 (I) 1, 3, 5, 6. 答案不唯一.

(II) 考虑长度为 q 的递增子列的前 p 项可以组成长度为 p 的一个递增子列, 可得 $a_{n_0} >$ 该数列的第 p 项 $\geq a_{m_0}$, 即可证明结论.

(III) 考虑 $2s - 1$ 与 $2s$ 这一组数在数列中的位置. 若 $\{a_n\}$ 中有 $2s$, 在 $2s$ 在 $2s - 1$ 之后, 则必然在长度为 $s+1$, 且末项为 $2s$ 的递增子列, 这与长度为 s 的递增子列末项的最小值为 $2s - 1$ 矛盾, 可得 $2s$ 必在 $2s - 1$ 之前. 继续考虑末项为 $2s+1$ 的长度为 $s+1$ 的递增子

列. 因此对于数列 $2n - 1, 2n$, 由于 $2n$ 在 $2n - 1$ 之前, 可得研究递增子列时, 不可同时取 $2n$ 与 $2n - 1$, 即可得出: 递增子列最多有 2^s 个. 由题意, 这 s 组数列对全部存在于原数列中, 并且全在 $2s+1$ 之前. 可得 $2, 1, 4, 3, 6, 5, \dots$, 是唯一构造.

【解答】解: (I) $1, 3, 5, 6$.

(II) 证明: 考虑长度为 q 的递增子列的前 p 项可以组成长度为 p 的一个递增子列,

$$\therefore a_{n_0} > \text{该数列的第 } p \text{ 项} \geq a_{m_0},$$

$$\therefore a_{m_0} < a_{n_0}.$$

(III) 解: 考虑 $2s - 1$ 与 $2s$ 这一组数在数列中的位置.

若 $\{a_n\}$ 中有 $2s$, 在 $2s$ 在 $2s - 1$ 之后, 则必然在长度为 $s+1$, 且末项为 $2s$ 的递增子列, 这与长度为 s 的递增子列末项的最小值为 $2s - 1$ 矛盾, $\therefore 2s$ 必在 $2s - 1$ 之前.

继续考虑末项为 $2s+1$ 的长度为 $s+1$ 的递增子列.

\therefore 对于数列 $2n - 1, 2n$, 由于 $2n$ 在 $2n - 1$ 之前, \therefore 研究递增子列时, 不可同时取 $2n$ 与 $2n - 1$,

\therefore 对于 1 至 $2s$ 的所有整数, 研究长度为 $s+1$ 的递增子列时, 第 1 项是 1 与 2 二选 1 , 第 2 项是 3 与 4 二选 1 , \dots , 第 s 项是 $2s - 1$ 与 $2s$ 二选 1 ,

故递增子列最多有 2^s 个. 由题意, 这 s 组数列对全部存在于原数列中, 并且全在 $2s+1$ 之前.

$\therefore 2, 1, 4, 3, 6, 5, \dots$, 是唯一构造.

即 $a_{2k} = 2k - 1, a_{2k-1} = 2k, k \in \mathbf{N}^*$.

【点评】 本题考查了数列递推关系、数列的单调性, 考查了逻辑推理能力、分析问题与解决问题的能力, 属于难题.