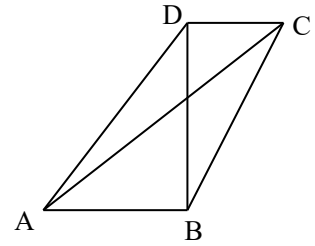


10、如右图，在四边形 ABCD 中，
 $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BD}| + |\overrightarrow{DC}| = 4$ ， $|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BD}| + |\overrightarrow{BD}| \cdot |\overrightarrow{DC}| = 4$ ，
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$ ，则 $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) \cdot \overrightarrow{AC}$ 的值为 ()



- A、2 B、 $2\sqrt{2}$ C、4 D、 $4\sqrt{2}$

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填写在答卷相应位置上。

11、复数 $\frac{2i}{2+i^3}$ 的虚部为_____。

12、已知 x, y 满足 $\begin{cases} x - y \leq 1, \\ 2x + y \leq 4, \\ x \geq 1, \end{cases}$ 则函数 $z = x + 3y$ 的最大值是_____。

13、若函数 $f(x) = \sqrt{2^{x^2+2ax-a}} - 1$ 的定义域为 \mathbb{R} ，则 a 的取值范围为_____。

14、设 $\{a_n\}$ 为公比 $q > 1$ 的等比数列，若 a_{2004} 和 a_{2006} 是方程 $4x^2 - 8x + 3 = 0$ 的两根，则 $a_{2006} + a_{2007} =$ _____。

15、某校要求每位学生从 7 门课程中选修 4 门，其中甲、乙两门课程不能都选，则不同的选课方案有_____种。（以数字作答）

16、过双曲线 $x^2 - y^2 = 4$ 的右焦点 F 作倾斜角为 105° 的直线，交双曲线于 P、Q 两点，则 $|FP| \cdot |FQ|$ 的值为_____。

三、解答题：本大题共 6 小题，共 76 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17（本小题满分 13 分，其中（I）小问 9 分，（II）小问 4 分）

$$\text{设 } f(x) = 6 \cos^2 x - \sqrt{3} \sin 2x.$$

（I）求 $f(x)$ 的最大值及最小正周期；

（II）若锐角 α 满足 $f(\alpha) = 3 - 2\sqrt{3}$ ，求 $\tan \frac{4}{5}\alpha$ 的值。

18（本小题满分 13 分，其中（I）小问 4 分，（II）小问 9 分）

某单位有三辆汽车参加某种事故保险。单位年初向保险公司缴纳每辆 900 元的保险金，对在一年内发生此种事故的每辆汽车，单位可获 9000 元的赔偿（假设每辆车最多只赔偿一次）。设这三辆车在一年内发生此种事故的概率分别为 $1/9$ 、 $1/10$ 、 $1/11$ ，且各车是否发生事故相互独立。求一年内该单位在此保险中：

（I）获赔的概率；

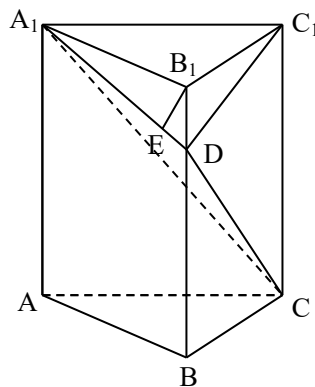
(II) 获赔金额 ξ 的分布列与期望.

19 (本小题满分 13 分, 其中 (I) 小问 8 分, (II) 小问 5 分)

如右图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 = 2, AB = 1, \angle ABC = 90^\circ$; 点 D 、 E 分别在 BB_1 、 A_1D 上, 且 $B_1E \perp A_1D$, 四棱锥 $C - ABDA_1$ 与直三棱柱的体积之比为 $3:5$.

(I) 求异面直线 DE 与 B_1C_1 的距离;

(II) 若 $BC = \sqrt{2}$, 求二面角 $A_1 - DC_1 - B_1$ 的平面角的正切值.



20 (本小题满分 13 分, 其中 (I)、(II)、(III) 小问分别为 6、4、3 分)

已知函数 $f(x) = ax^4 \ln x + bx^4 - c (x > 0)$ 在 $x = 1$ 处取得极值 $-3 - a$, 其中 a 、 b 为常数.

(I) 试确定 a 、 b 的值;

(II) 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间;

(III) 若对任意 $x > 0$, 不等式 $f(x) \geq -2c^2$ 恒成立, 求 c 的取值范围.

21 (本小题满分 12 分, 其中 (I) 小问 5 分, (II) 小问 7 分)

已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_1 > 1$, 且

$$6S_n = (a_n + 1)(a_n + 2), n \in N_+.$$

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n(2^{b_n} - 1) = 1$, 并记 T_n 为 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求证:

$$3T_n + 1 > \log_2(a_n + 3), n \in N_+.$$

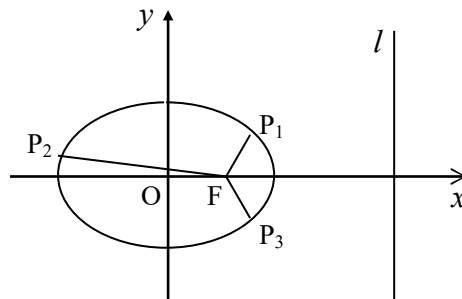
22 (本小题满分 12 分, 其中 (I) 小问 4 分, (II) 小问 8 分)

如右图, 中心在原点 O 的椭圆的右焦点为 $F(3,0)$, 右准线 l 的方程为: $x = 12$.

(I) 求椭圆的方程;

(II) 在椭圆上任取三个不同点 P_1, P_2, P_3 , 使 $\angle P_1FP_2 = \angle P_2FP_3 = \angle P_3FP_1$, 证明:

$\frac{1}{|FP_1|} + \frac{1}{|FP_2|} + \frac{1}{|FP_3|}$ 为定值, 并求此定值.



参考答案 (理工科)

一、选择题

ADCBA CBBDC

二、填空题:

11、 $\frac{4}{5}$ 12、7 13、 $[-1,0]$

14、18 15、25 16、 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

三、解答题:

17、解: (I) $f(x) = 6 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} - \sqrt{3} \sin 2x = 3 \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x + 3$

$$= 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + 3 = 2\sqrt{3} \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + 3$$

故 $f(x)$ 的最大值为 $2\sqrt{3} + 3$; 最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

(II) 由 $f(\alpha) = 3 - 2\sqrt{3}$ 得 $2\sqrt{3} \cos \left(2\alpha + \frac{\pi}{6} \right) + 3 = 3 - 2\sqrt{3}$, 故 $\cos \left(2\alpha + \frac{\pi}{6} \right) = -1$.

又由 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 得 $\frac{\pi}{6} < 2\alpha + \frac{\pi}{6} < \pi + \frac{\pi}{6}$, 故 $2\alpha + \frac{\pi}{6} = \pi$, 解得 $\alpha = \frac{5\pi}{12}$.

从而 $\tan \frac{4}{5} \alpha = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

18、解: 设 A_k 表示第 k 辆车在一年内发生此种事故, $k = 1, 2, 3$.

由题意知 A_1, A_2, A_3 独立, 且 $P(A_1) = \frac{1}{9}, P(A_2) = \frac{1}{10}, P(A_3) = \frac{1}{11}$.

(I) 该单位一年内获赔的概率为

$$1 - P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 1 - \frac{8}{9} \times \frac{9}{10} \times \frac{10}{11} = \frac{3}{11}.$$

(II) ξ 的所有可能值为 0, 9000, 18000, 27000.

$$P(\xi = 0) = P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = \frac{8}{9} \times \frac{9}{10} \times \frac{10}{11} = \frac{8}{11},$$

$$\begin{aligned} P(\xi = 9000) &= P(A_1 \overline{A_2} \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} A_2 \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} \overline{A_2} A_3) \\ &= P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3) \\ &= \frac{1}{9} \times \frac{9}{10} \times \frac{10}{11} + \frac{8}{9} \times \frac{1}{10} \times \frac{10}{11} + \frac{8}{9} \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{11} = \frac{242}{990} = \frac{11}{45}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\xi = 18000) &= P(A_1 A_2 \overline{A_3}) + P(A_1 \overline{A_2} A_3) + P(\overline{A_1} A_2 A_3) \\ &= P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{9} \times \frac{1}{10} \times \frac{10}{11} + \frac{1}{9} \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{11} + \frac{8}{9} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{11} = \frac{27}{990} = \frac{3}{110},$$

$$P(\xi = 27000) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{9} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{11} = \frac{1}{990}.$$

综上知, ξ 的分布列为

ξ	0	9000	18000	27000
P	$\frac{8}{11}$	$\frac{11}{45}$	$\frac{3}{110}$	$\frac{1}{990}$

求 ξ 的期望有两种解法:

解法一: 由 ξ 的分布列得

$$E\xi = 0 \times \frac{8}{11} + 9000 \times \frac{11}{45} + 18000 \times \frac{3}{110} + 27000 \times \frac{1}{990} = \frac{29900}{11} \approx 2718.18$$

(元)

解法二: 设 ξ_k 表示第 k 辆车一年内的获赔金额, $k = 1, 2, 3$,

则 ξ_1 有分布列

ξ_1	0	9000
P	$\frac{8}{9}$	$\frac{1}{9}$

$$\text{故 } E\xi_1 = 9000 \times \frac{1}{9} = 1000.$$

$$\text{同理得 } E\xi_2 = 9000 \times \frac{1}{10} = 900, E\xi_3 = 9000 \times \frac{1}{11} \approx 818.18.$$

综上有

$$E\xi = E\xi_1 + E\xi_2 + E\xi_3 \approx 1000 + 900 + 818.18 = 2718.18 \text{ (元)}.$$

19、解法一:

(I) 因 $B_1C_1 \perp A_1B_1$, 且 $B_1C_1 \perp BB_1$, 故 $B_1C_1 \perp$ 面 A_1ABB_1 , 从而 $B_1C_1 \perp B_1E$, 又 $B_1E \perp DE$, 故 B_1E 是异面直线 B_1C_1 与 DE 的公垂线.

设 BD 的长度为 x , 则四棱锥 $C - ABDA_1$ 的体积 V_1 为

$$V_1 = \frac{1}{3} S_{ABDA_1} \cdot BC = \frac{1}{6} (DB + A_1A) \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{6} (x + 2) \cdot BC.$$

而直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积 V_2 为

$$V_2 = S_{\triangle ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot AA_1 = BC.$$

解得 $c \geq \frac{3}{2}$ 或 $c \leq -1$.

所以 c 的取值范围为 $(-\infty, -1] \cup [\frac{3}{2}, +\infty)$

21、(I) 解 由 $a_1 = S_1 = \frac{1}{6}(a_1 + 1)(a_1 + 2)$, 解得 $a_1 = 1$ 或 $a_1 = 2$. 由假设 $a_1 = S_1 > 1$,

因 此 $a_1 = 2$.

又由 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = \frac{1}{6}(a_{n+1} + 1)(a_{n+1} + 2) - \frac{1}{6}(a_n + 1)(a_n + 2)$, 得

$$(a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n - 3) = 0, \text{ 即 } a_{n+1} - a_n - 3 = 0 \text{ 或 } a_{n+1} = -a_n.$$

因 $a_n > 0$, 故 $a_{n+1} = -a_n$ 不成立, 舍去.

因此 $a_{n+1} - a_n = 3$, 从而 $\{a_n\}$ 是公差为 3, 首项为 2 的等差数列, 故 $\{a_n\}$ 的通项

为

$$a_n = 3n - 1.$$

(II) 证法一: 由 $a_n(2^{b_n} - 1) = 1$ 可解得 $b_n = \log_2(1 + \frac{1}{a_n}) = \log_2 \frac{3n}{3n-1}$

$$\text{从而 } T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \log_2 \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{3n}{3n-1} \right).$$

$$\text{因此 } 3T_n + 1 - \log_2(a_n + 3) = \log_2 \left[\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{3n}{3n-1} \right)^3 \cdot \frac{2}{3n+2} \right].$$

$$\text{令 } f(n) = \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{3n}{3n-1} \right)^3 \cdot \frac{2}{3n+2}, \text{ 则}$$

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{3n+2}{3n+5} \cdot \left(\frac{3n+3}{3n+2} \right)^3 = \frac{(3n+3)^3}{(3n+5)(3n+2)^2}.$$

因 $(3n+3)^3 - (3n+5)(3n+2)^2 = 9n+7 > 0$, 故 $f(n+1) > f(n)$.

特别地 $f(n) \geq f(1) = \frac{27}{20} > 1$, 从而 $3T_n + 1 - \log_2(a_n + 3) = \log_2 f(n) > 0$,

即 $3T_n + 1 > \log_2(a_n + 3)$.

证法二: 同证法一求得 b_n 及 T_n .

由二项式定理知, 当 $c > 0$ 时, 不等式 $(1+c)^3 > 1+3c$ 成立.

由此不等式有 $3T_n + 1 = \log_2 2(1 + \frac{1}{2})^3(1 + \frac{1}{5})^3 \cdots (1 + \frac{1}{3n-1})^3$

$$> \log_2 2\left(1 + \frac{3}{2}\right)\left(1 + \frac{3}{5}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{3n-1}\right) = \log_2\left(2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{8}{5} \cdots \frac{3n+2}{3n-1}\right) = \log_2(3n+2) = \log_2(a_n + 3)$$

证法三：同证法一求得 b_n 及 T_n 。

$$\text{令 } A_n = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{3n}{3n-1}, B_n = \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{6} \cdots \frac{3n+1}{3n}, C_n = \frac{5}{4} \cdot \frac{8}{7} \cdots \frac{3n+2}{3n+1}.$$

$$\text{因 } \frac{3n}{3n-1} > \frac{3n+1}{3n} > \frac{3n+2}{3n+1}, \text{ 因此 } A_n^3 > A_n B_n C_n = \frac{3n+2}{2}.$$

从而

$$3T_n + 1 = \log_2 2\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{3n}{3n-1}\right)^3 = \log_2 2A_n^3 > \log_2 2A_n B_n C_n = \log_2(3n+2) = \log_2(a_n + 3)$$

证法四：同证法一求得 b_n 及 T_n 。

下面用数学归纳法证明： $3T_n + 1 > \log_2(a_n + 3)$ 。

当 $n=1$ 时， $3T_1 + 1 = \log_2 \frac{27}{4}$ ， $\log_2(a_1 + 3) = \log_2 5$ ，因此 $3T_n + 1 > \log_2(a_n + 3)$ ，结论成立。

假设结论当 $n=k$ 时成立，即 $3T_k + 1 > \log_2(a_k + 3)$ ，则当 $n=k+1$ 时，

$$3T_{k+1} + 1 - \log_2(a_{k+1} + 3) = 3T_k + 1 + 3b_{k+1} - \log_2(a_{k+1} + 3)$$

$$> \log_2(a_k + 3) - \log_2(a_{k+1} + 3) + 3b_{k+1} = \log_2 \frac{(3k+3)^3}{(3k+5)(3k+2)^2}.$$

$$\text{因 } (3k+3)^3 - (3k+5)(3k+2)^2 = 9k+7 > 0, \text{ 故 } \log_2 \frac{(3k+3)^3}{(3k+5)(3k+2)^2} > 0.$$

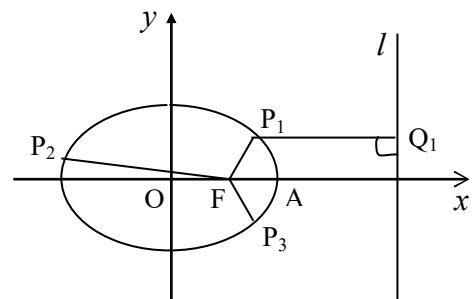
从而 $3T_{n+1} + 1 > \log_2(a_{k+1} + 3)$ 。这就是说当 $n=k+1$ 时结论也成立。

综上 $3T_n + 1 > \log_2(a_n + 3)$ 对任何 $n \in N_+$ 成立。

22、解：(I) 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。

因焦点为 $F(3,0)$ ，故半焦距 $c=3$ 。又右

准线 l 的方程为 $x = \frac{a^2}{c}$ ，从而由已知



$$\frac{a^2}{c} = 12, a^2 = 36,$$

$$\text{因此 } a = 6, b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

$$\text{故所求椭圆方程为 } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1.$$

(II) 记椭圆的右顶点为 A, 并设 $\angle AFP_i = \alpha_i (i = 1, 2, 3)$, 不失一般性, 假设

$$0 \leq \alpha_1 < \frac{2\pi}{3}, \text{ 且 } \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{2\pi}{3}, \alpha_3 = \alpha_1 + \frac{4\pi}{3}.$$

$$\text{又设 } P_i \text{ 在 } l \text{ 上的射影为 } Q_i, \text{ 因椭圆的离心率 } e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2},$$

从 而 有

$$|FP_i| = |P_iQ_i| \cdot e = \left(\frac{a^2}{c} - c - |FP_i| \cos \alpha_i\right) e = \frac{1}{2}(9 - |FP_i| \cos \alpha_i) \quad (i = 1, 2, 3).$$

$$\text{解得 } \frac{1}{|FP_i|} = \frac{2}{9} \left(1 + \frac{1}{2} \cos \alpha_i\right) \quad (i = 1, 2, 3). \quad \text{因此}$$

$$\frac{1}{|FP_1|} + \frac{1}{|FP_2|} + \frac{1}{|FP_3|} = \frac{2}{9} \left[3 + \frac{1}{2} \left(\cos \alpha_1 + \cos\left(\alpha_1 + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\alpha_1 + \frac{4\pi}{3}\right)\right)\right],$$

而

$$\cos \alpha_1 + \cos\left(\alpha_1 + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\alpha_1 + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos \alpha_1 - \frac{1}{2} \cos \alpha_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha_1 - \frac{1}{2} \cos \alpha_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha_1 = 0,$$

$$\text{故 } \frac{1}{|FP_1|} + \frac{1}{|FP_2|} + \frac{1}{|FP_3|} = \frac{2}{3} \text{ 为定值.}$$