

2016年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标 I）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. (5分) 设集合 $A=\{x|x^2-4x+3<0\}$, $B=\{x|2x-3>0\}$, 则 $A\cap B=(\quad)$

- A. $(-3, -\frac{3}{2})$ B. $(-3, \frac{3}{2})$ C. $(1, \frac{3}{2})$ D. $(\frac{3}{2}, 3)$

【考点】 1E: 交集及其运算.

【专题】 11: 计算题; 40: 定义法; 5J: 集合.

【分析】 解不等式求出集合A, B, 结合交集的定义, 可得答案.

【解答】 解: \because 集合 $A=\{x|x^2-4x+3<0\}=(1, 3)$,

$B=\{x|2x-3>0\}=(\frac{3}{2}, +\infty)$,

$\therefore A\cap B=(\frac{3}{2}, 3)$,

故选: D.

【点评】 本题考查的知识点是集合的交集及其运算, 难度不大, 属于基础题.

2. (5分) 设 $(1+i)x=1+yi$, 其中x, y是实数, 则 $|x+yi|=(\quad)$

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

【考点】 A8: 复数的模.

【专题】 34: 方程思想; 40: 定义法; 5N: 数系的扩充和复数.

【分析】 根据复数相等求出x, y的值, 结合复数的模长公式进行计算即可.

【解答】 解: $\because (1+i)x=1+yi$,

$\therefore x+xi=1+yi$,

即 $\begin{cases} x=1 \\ y=x \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$, 即 $|x+yi|=|1+i|=\sqrt{2}$,

故选: B.

【点评】 本题主要考查复数模长的计算, 根据复数相等求出x, y的值是解决本

题的关键.

3. (5分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 前9项的和为27, $a_{10}=8$, 则 $a_{100}=(\quad)$

- A. 100 B. 99 C. 98 D. 97

【考点】83: 等差数列的性质.

【专题】11: 计算题; 40: 定义法; 54: 等差数列与等比数列.

【分析】根据已知可得 $a_5=3$, 进而求出公差, 可得答案.

【解答】解: \because 等差数列 $\{a_n\}$ 前9项的和为27, $S_9 = \frac{9(a_1+a_9)}{2} = \frac{9 \times 2a_5}{2} = 9a_5$.

$$\therefore 9a_5=27, a_5=3,$$

$$\text{又} \because a_{10}=8,$$

$$\therefore d=1,$$

$$\therefore a_{100}=a_5+95d=98,$$

故选: C.

【点评】本题考查的知识点是数列的性质, 熟练掌握等差数列的性质, 是解答的关键.

4. (5分) 某公司的班车在7: 00, 8: 00, 8: 30发车, 小明在7: 50至8: 30之间到达发车站乘坐班车, 且到达发车站的时刻是随机的, 则他等车时间不超过10分钟的概率是 (\quad)

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

【考点】CF: 几何概型.

【专题】5I: 概率与统计.

【分析】求出小明等车时间不超过10分钟的时间长度, 代入几何概型概率计算公式, 可得答案.

【解答】解: 设小明到达时间为 y ,

当 y 在7: 50至8: 00, 或8: 20至8: 30时,

小明等车时间不超过10分钟,

$$\text{故 } P = \frac{20}{40} = \frac{1}{2},$$

故选：B.

【点评】 本题考查的知识点是几何概型，难度不大，属于基础题.

5. (5分) 已知方程 $\frac{x^2}{m^2+n} - \frac{y^2}{3m^2-n} = 1$ 表示双曲线，且该双曲线两焦点间的距离为4，则n的取值范围是 ()

离为4，则n的取值范围是 ()

- A. (-1, 3) B. (-1, $\sqrt{3}$) C. (0, 3) D. (0, $\sqrt{3}$)

【考点】 KB: 双曲线的标准方程.

【专题】 11: 计算题; 35: 转化思想; 4R: 转化法; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】 由已知可得 $c=2$ ，利用 $4 = (m^2+n) + (3m^2-n)$ ，解得 $m^2=1$ ，又 $(m^2+n)(3m^2-n) > 0$ ，从而可求n的取值范围.

【解答】 解：∵双曲线两焦点间的距离为4，∴ $c=2$ ，

当焦点在x轴上时，

可得： $4 = (m^2+n) + (3m^2-n)$ ，解得： $m^2=1$ ，

∵方程 $\frac{x^2}{m^2+n} - \frac{y^2}{3m^2-n} = 1$ 表示双曲线，

∴ $(m^2+n)(3m^2-n) > 0$ ，可得： $(n+1)(3-n) > 0$ ，

解得： $-1 < n < 3$ ，即n的取值范围是： $(-1, 3)$.

当焦点在y轴上时，

可得： $-4 = (m^2+n) + (3m^2-n)$ ，解得： $m^2 = -1$ ，

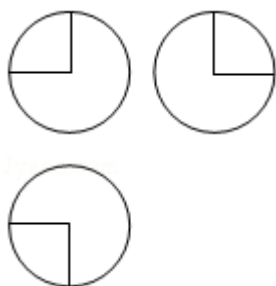
无解.

故选：A.

【点评】 本题主要考查了双曲线方程的应用，考查了不等式的解法，属于基础题.

6. (5分) 如图，某几何体的三视图是三个半径相等的圆及每个圆中两条相互

垂直的半径. 若该几何体的体积是 $\frac{28\pi}{3}$, 则它的表面积是 ()



- A. 17π B. 18π C. 20π D. 28π

【考点】 L1: 由三视图求面积、体积.

【专题】 11: 计算题; 29: 规律型; 31: 数形结合; 35: 转化思想; 5F: 空间位置关系与距离.

【分析】 判断三视图复原的几何体的形状, 利用体积求出几何体的半径, 然后求解几何体的表面积.

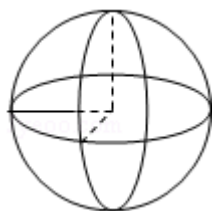
【解答】 解: 由题意可知三视图复原的几何体是一个球去掉 $\frac{1}{8}$ 后的几何体, 如

图:

$$\text{可得: } \frac{7}{8} \times \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{28\pi}{3}, R=2.$$

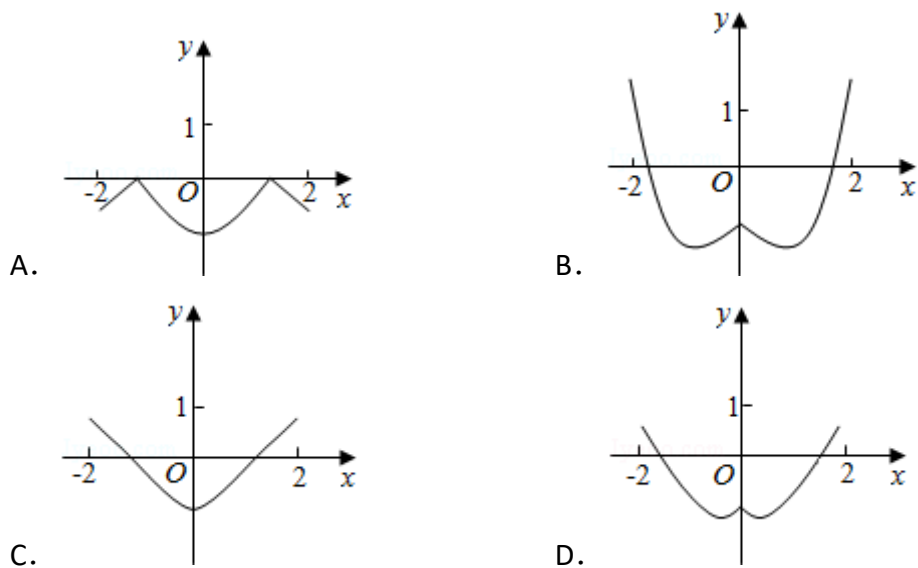
$$\text{它的表面积是: } \frac{7}{8} \times 4\pi \cdot 2^2 + \frac{3}{4} \times \pi \cdot 2^2 = 17\pi.$$

故选: A.



【点评】 本题考查三视图求解几何体的体积与表面积, 考查计算能力以及空间想象能力.

7. (5分) 函数 $y=2x^2 - e^{|x|}$ 在 $[-2, 2]$ 的图象大致为 ()



【考点】3A: 函数的图象与图象的变换.

【专题】27: 图表型; 48: 分析法; 51: 函数的性质及应用.

【分析】根据已知中函数的解析式, 分析函数的奇偶性, 最大值及单调性, 利用排除法, 可得答案.

【解答】解: $\because f(x) = y = 2x^2 - e^{|x|}$,

$$\therefore f(-x) = 2(-x)^2 - e^{|-x|} = 2x^2 - e^{|x|},$$

故函数为偶函数,

当 $x = \pm 2$ 时, $y = 8 - e^2 \in (0, 1)$, 故排除 A, B;

当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = y = 2x^2 - e^x$,

$$\therefore f'(x) = 4x - e^x = 0 \text{ 有解,}$$

故函数 $y = 2x^2 - e^{|x|}$ 在 $[0, 2]$ 不是单调的, 故排除 C,

故选: D.

【点评】本题考查的知识点是函数的图象, 对于超越函数的图象, 一般采用排除法解答.

8. (5分) 若 $a > b > 1$, $0 < c < 1$, 则 ()

A. $a^c < b^c$

B. $ab^c < ba^c$

C. $a \log_b c < b \log_a c$

D. $\log_a c < \log_b c$

【考点】 R3: 不等式的基本性质.

【专题】 33: 函数思想; 35: 转化思想; 4R: 转化法; 51: 函数的性质及应用;
5T: 不等式.

【分析】 根据已知中 $a > b > 1$, $0 < c < 1$, 结合对数函数和幂函数的单调性, 分析各个结论的真假, 可得答案.

【解答】 解: $\because a > b > 1$, $0 < c < 1$,

\therefore 函数 $f(x) = x^c$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 故 $a^c > b^c$, 故A错误;

函数 $f(x) = x^{c-1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数, 故 $a^{c-1} < b^{c-1}$, 故 $ba^c < ab^c$, 即 $ab^c > ba^c$; 故B错误;

$\log_a c < 0$, 且 $\log_b c < 0$, $\log_a b < 1$, 即 $\frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log_a c}{\log_b c} < 1$, 即 $\log_a c > \log_b c$. 故D错

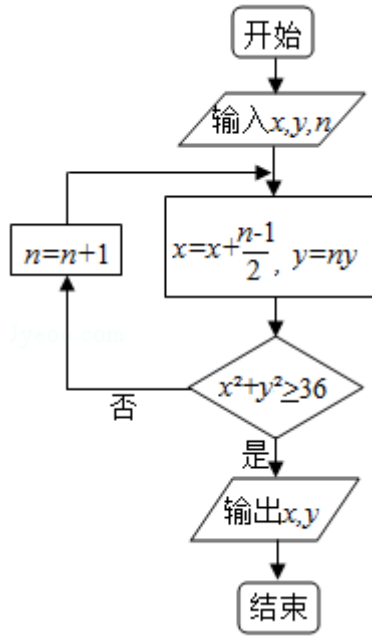
误;

$0 < -\log_a c < -\log_b c$, 故 $-b\log_a c < -a\log_b c$, 即 $b\log_a c > a\log_b c$, 即 $a\log_b c < b\log_a c$, 故C正确;

故选: C.

【点评】 本题考查的知识点是不等式的比较大小, 熟练掌握对数函数和幂函数的单调性, 是解答的关键.

9. (5分) 执行下面的程序框图, 如果输入的 $x=0$, $y=1$, $n=1$, 则输出 x , y 的值满足 ()



A. $y=2x$

B. $y=3x$

C. $y=4x$

D. $y=5x$

【考点】EF：程序框图.

【专题】11：计算题；28：操作型；5K：算法和程序框图.

【分析】由已知中的程序框图可知：该程序的功能是利用循环结构计算并输出变量 x ， y 的值，模拟程序的运行过程，分析循环中各变量值的变化情况，可得答案.

【解答】解：输入 $x=0$ ， $y=1$ ， $n=1$ ，

则 $x=0$ ， $y=1$ ，不满足 $x^2+y^2 \geq 36$ ，故 $n=2$ ，

则 $x=\frac{1}{2}$ ， $y=2$ ，不满足 $x^2+y^2 \geq 36$ ，故 $n=3$ ，

则 $x=\frac{3}{2}$ ， $y=6$ ，满足 $x^2+y^2 \geq 36$ ，

故 $y=4x$ ，

故选：C.

【点评】本题考查的知识点是程序框图，当循环的次数不多，或有规律时，常采用模拟循环的方法解答.

10. (5分) 以抛物线 C 的顶点为圆心的圆交 C 于 A 、 B 两点，交 C 的准线于 D 、 E 两点. 已知 $|AB|=4\sqrt{2}$ ， $|DE|=2\sqrt{5}$ ，则 C 的焦点到准线的距离为 ()

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

【考点】K8: 抛物线的性质; KJ: 圆与圆锥曲线的综合.

【专题】11: 计算题; 29: 规律型; 31: 数形结合; 35: 转化思想; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】画出图形, 设出抛物线方程, 利用勾股定理以及圆的半径列出方程求解即可.

【解答】解: 设抛物线为 $y^2=2px$, 如图: $|AB|=4\sqrt{2}$, $|AM|=2\sqrt{2}$,

$$|DE|=2\sqrt{5}, |DN|=\sqrt{5}, |ON|=\frac{p}{2},$$

$$x_A = \frac{(2\sqrt{2})^2}{2p} = \frac{4}{p},$$

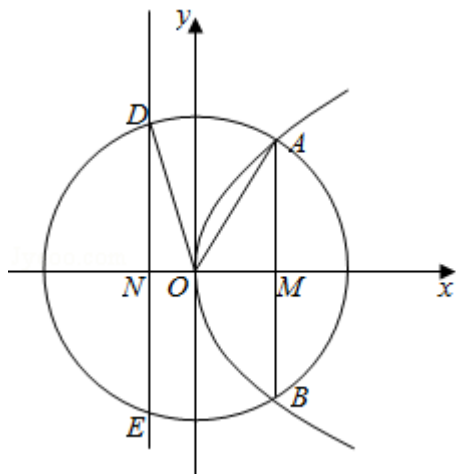
$$|OD|=|OA|,$$

$$\frac{16}{p^2} + 8 = \frac{p^2}{4} + 5,$$

解得: $p=4$.

C的焦点到准线的距离为: 4.

故选: B.



【点评】本题考查抛物线的简单性质的应用, 抛物线与圆的方程的应用, 考查计算能力. 转化思想的应用.

11. (5分) 平面 α 过正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的顶点A, $\alpha \parallel$ 平面 CB_1D_1 , $\alpha \cap$ 平面AB

$CD=m$, $\alpha \cap \text{平面} ABB_1A_1=n$, 则 m 、 n 所成角的正弦值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

【考点】 LM: 异面直线及其所成的角.

【专题】 11: 计算题; 29: 规律型; 31: 数形结合; 35: 转化思想; 5G: 空间角.

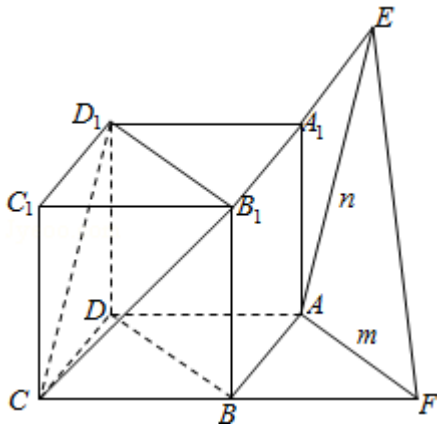
【分析】 画出图形, 判断出 m 、 n 所成角, 求解即可.

【解答】 解: 如图: $\alpha \parallel \text{平面} CB_1D_1$, $\alpha \cap \text{平面} ABCD=m$, $\alpha \cap \text{平面} ABA_1B_1=n$,

可知: $n \parallel CD_1$, $m \parallel B_1D_1$, $\therefore \triangle CB_1D_1$ 是正三角形. m 、 n 所成角就是 $\angle CD_1B_1=60^\circ$.

则 m 、 n 所成角的正弦值为: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选: A.



【点评】 本题考查异面直线所成角的求法, 考查空间想象能力以及计算能力.

12. (5分) 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \phi)$ ($\omega > 0$, $|\phi| \leq \frac{\pi}{2}$), $x = -\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点, $x = \frac{\pi}{4}$ 为 $y = f(x)$ 图象的对称轴, 且 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36})$ 上单调, 则 ω 的最大值为 ()

- A. 11 B. 9 C. 7 D. 5

【考点】 H6: 正弦函数的奇偶性和对称性.

【专题】 35: 转化思想; 4R: 转化法; 57: 三角函数的图像与性质.

【分析】 根据已知可得 ω 为正奇数，且 $\omega \leq 12$ ，结合 $x = -\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点， $x = \frac{\pi}{4}$ 为 $y=f(x)$ 图象的对称轴，求出满足条件的解析式，并结合 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36})$ 上单调，可得 ω 的最大值。

【解答】 解：∵ $x = -\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点， $x = \frac{\pi}{4}$ 为 $y=f(x)$ 图象的对称轴，
 $\therefore \frac{2n+1}{4} \cdot T = \frac{\pi}{2}$ ，即 $\frac{2n+1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$ ， ($n \in \mathbb{N}$)

即 $\omega = 2n+1$ ， ($n \in \mathbb{N}$)

即 ω 为正奇数，

∵ $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36})$ 上单调，则 $\frac{5\pi}{36} - \frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{12} < \frac{T}{2}$ ，

即 $T = \frac{2\pi}{\omega} \geq \frac{\pi}{6}$ ，解得： $\omega \leq 12$ ，

当 $\omega = 11$ 时， $-\frac{11\pi}{4} + \phi = k\pi$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，

∵ $|\phi| \leq \frac{\pi}{2}$ ，

∴ $\phi = -\frac{\pi}{4}$ ，

此时 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36})$ 不单调，不满足题意；

当 $\omega = 9$ 时， $-\frac{9\pi}{4} + \phi = k\pi$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，

∵ $|\phi| \leq \frac{\pi}{2}$ ，

∴ $\phi = \frac{\pi}{4}$ ，

此时 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36})$ 单调，满足题意；

故 ω 的最大值为9，

故选：B.

【点评】 本题考查的知识点是正弦型函数的图象和性质，本题转化困难，难度较大。

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13. (5分) 设向量 $\vec{a} = (m, 1)$ ， $\vec{b} = (1, 2)$ ，且 $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$ ，则 $m = \underline{\quad}$

- 2.

【考点】90：平面向量数量积的性质及其运算.

【专题】11：计算题；29：规律型；35：转化思想；5A：平面向量及应用.

【分析】利用已知条件，通过数量积判断两个向量垂直，然后列出方程求解即可.

【解答】解： $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$,

可得 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

向量 $\vec{a}=(m, 1)$ ， $\vec{b}=(1, 2)$ ，

可得 $m+2=0$ ，解得 $m=-2$.

故答案为：-2.

【点评】本题考查向量的数量积的应用，向量的垂直条件的应用，考查计算能力.

14. (5分) $(2x+\sqrt{x})^5$ 的展开式中， x^3 的系数是10. (用数字填写答案)

【考点】DA：二项式定理.

【专题】11：计算题；34：方程思想；49：综合法；5P：二项式定理.

【分析】利用二项展开式的通项公式求出第 $r+1$ 项，令 x 的指数为3，求出 r ，即可求出展开式中 x^3 的系数.

【解答】解： $(2x+\sqrt{x})^5$ 的展开式中，通项公式为： $T_{r+1}=\binom{5}{r}(2x)^{5-r}(\sqrt{x})^r=2^{5-r}$

$$\binom{5}{r}x^{5-\frac{r}{2}},$$

令 $5-\frac{r}{2}=3$ ，解得 $r=4$

$\therefore x^3$ 的系数 $2\binom{5}{4}=10$.

故答案为：10.

【点评】本题考查了二项式定理的应用，考查了推理能力与计算能力，属于基

础题.

15. (5分) 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_3=10$, $a_2+a_4=5$, 则 $a_1a_2\dots a_n$ 的最大值为 64.

【考点】87: 等比数列的性质; 81: 数列与函数的综合.

【专题】11: 计算题; 29: 规律型; 35: 转化思想; 54: 等差数列与等比数列

【分析】求出数列的等比与首项, 化简 $a_1a_2\dots a_n$, 然后求解最值.

【解答】解: 等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_3=10$, $a_2+a_4=5$,

可得 $q(a_1+a_3)=5$, 解得 $q=\frac{1}{2}$.

$a_1+q^2a_1=10$, 解得 $a_1=8$.

则 $a_1a_2\dots a_n=a_1^n \cdot q^{1+2+3+\dots+(n-1)}=8^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}=2^{3n-\frac{n^2-n}{2}}=2^{\frac{7n-n^2}{2}}$,

当 $n=3$ 或 4 时, 表达式取得最大值: $2^{\frac{12}{2}}=2^6=64$.

故答案为: 64.

【点评】本题考查数列的性质数列与函数相结合的应用, 转化思想的应用, 考查计算能力.

16. (5分) 某高科技企业生产产品A和产品B需要甲、乙两种新型材料. 生产一件产品A需要甲材料1.5kg, 乙材料1kg, 用5个工时; 生产一件产品B需要甲材料0.5kg, 乙材料0.3kg, 用3个工时, 生产一件产品A的利润为2100元, 生产一件产品B的利润为900元. 该企业现有甲材料150kg, 乙材料90kg, 则在不超过600个工时的条件下, 生产产品A、产品B的利润之和的最大值为216000元.

【考点】7C: 简单线性规划.

【专题】11: 计算题; 29: 规律型; 31: 数形结合; 33: 函数思想; 35: 转化思想.

【分析】 设A、B两种产品分别是x件和y件，根据题干的等量关系建立不等式组以及目标函数，利用线性规划作出可行域，通过目标函数的几何意义，求出其最大值即可；

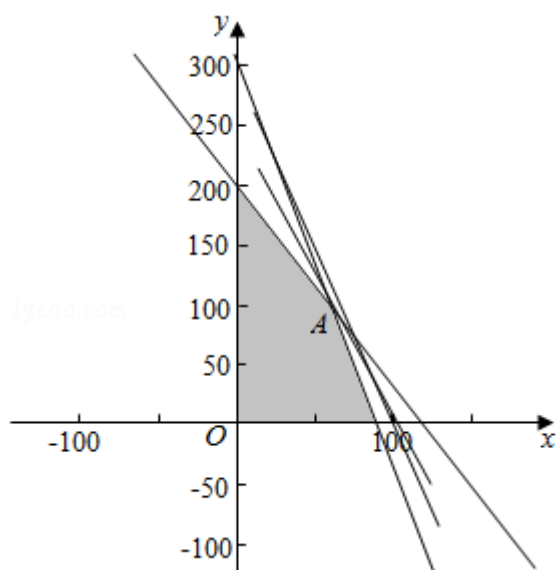
【解答】 解：（1）设A、B两种产品分别是x件和y件，获利为z元.

$$\text{由题意，得} \begin{cases} x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N} \\ 1.5x + 0.5y \leq 150 \\ x + 0.3y \leq 90 \\ 5x + 3y \leq 600 \end{cases}, z = 2100x + 900y.$$

不等式组表示的可行域如图：由题意可得 $\begin{cases} x + 0.3y = 90 \\ 5x + 3y = 600 \end{cases}$ ，解得： $\begin{cases} x = 60 \\ y = 100 \end{cases}$ ，A（60，100），

目标函数 $z = 2100x + 900y$. 经过A时，直线的截距最大，目标函数取得最大值： $2100 \times 60 + 900 \times 100 = 216000$ 元.

故答案为：216000.



【点评】 本题考查了列二元一次方程组解实际问题的运用，二元一次方程组的解法的运用，不等式组解实际问题的运用，不定方程解实际问题的运用，解答时求出最优解是解题的关键.

三、解答题： 本大题共5小题，满分60分，解答须写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. （12分） $\triangle ABC$ 的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知 $2\cos C (a\cos B + b\cos A) = c$

$$\cos A) = c.$$

(I) 求C;

(II) 若 $c=\sqrt{7}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

【考点】 HU: 解三角形.

【专题】 15: 综合题; 35: 转化思想; 49: 综合法; 58: 解三角形.

【分析】 (I) 已知等式利用正弦定理化简, 整理后利用两角和与差的正弦函数公式及诱导公式化简, 根据 $\sin C$ 不为0求出 $\cos C$ 的值, 即可确定出C的度数;

(2) 利用余弦定理列出关系式, 利用三角形面积公式列出关系式, 求出 $a+b$ 的值, 即可求 $\triangle ABC$ 的周长.

【解答】 解: (I) \because 在 $\triangle ABC$ 中, $0 < C < \pi$, $\therefore \sin C \neq 0$

已知等式利用正弦定理化简得: $2\cos C (\sin A \cos B + \sin B \cos A) = \sin C$,

整理得: $2\cos C \sin (A+B) = \sin C$,

即 $2\cos C \sin (\pi - (A+B)) = \sin C$

$$2\cos C \sin C = \sin C$$

$$\therefore \cos C = \frac{1}{2},$$

$$\therefore C = \frac{\pi}{3};$$

(II) 由余弦定理得 $7 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{1}{2}$,

$$\therefore (a+b)^2 - 3ab = 7,$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{\sqrt{3}}{4} ab = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore ab = 6,$$

$$\therefore (a+b)^2 - 18 = 7,$$

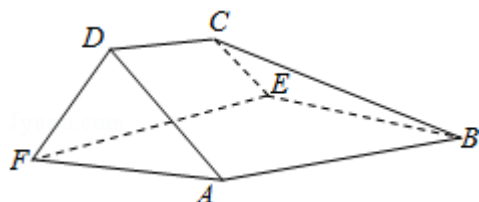
$$\therefore a+b = 5,$$

$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $5 + \sqrt{7}$.

【点评】 此题考查了正弦、余弦定理, 三角形的面积公式, 以及三角函数的恒等变形, 熟练掌握定理及公式是解本题的关键.

18. (12分) 如图, 在以A, B, C, D, E, F为顶点的五面体中, 面ABEF为正方形, $AF=2FD$, $\angle AFD=90^\circ$, 且二面角D - AF - E与二面角C - BE - F都是 60° .

- (I) 证明平面ABEF \perp 平面EFDC;
 (II) 求二面角E - BC - A的余弦值.



【考点】 MJ: 二面角的平面角及求法.

【专题】 11: 计算题; 34: 方程思想; 49: 综合法; 5H: 空间向量及应用; 5Q: 立体几何.

【分析】 (I) 证明 $AF\perp$ 平面EFDC, 利用平面与平面垂直的判定定理证明平面ABEF \perp 平面EFDC;

(II) 证明四边形EFDC为等腰梯形, 以E为原点, 建立如图所示的坐标系, 求出平面BEC、平面ABC的法向量, 代入向量夹角公式可得二面角E - BC - A的余弦值.

【解答】 (I) 证明: \because ABEF为正方形, $\therefore AF\perp EF$.

$\because \angle AFD=90^\circ$, $\therefore AF\perp DF$,

$\because DF\cap EF=F$,

$\therefore AF\perp$ 平面EFDC,

$\because AF\subset$ 平面ABEF,

\therefore 平面ABEF \perp 平面EFDC;

(II) 解: 由 $AF\perp DF$, $AF\perp EF$,

可得 $\angle DFE$ 为二面角D - AF - E的平面角;

由ABEF为正方形, $AF\perp$ 平面EFDC,

$\therefore BE\perp EF$,

$\therefore BE\perp$ 平面EFDC

即有 $CE\perp BE$,

可得 $\angle CEF$ 为二面角C - BE - F的平面角.

可得 $\angle DFE = \angle CEF = 60^\circ$.

$\because AB \parallel EF, AB \notin \text{平面} EFDC, EF \subset \text{平面} EFDC,$

$\therefore AB \parallel \text{平面} EFDC,$

$\because \text{平面} EFDC \cap \text{平面} ABCD = CD, AB \subset \text{平面} ABCD,$

$\therefore AB \parallel CD,$

$\therefore CD \parallel EF,$

\therefore 四边形EFDC为等腰梯形.

以E为原点, 建立如图所示的坐标系, 设 $FD = a,$

则 $E(0, 0, 0), B(0, 2a, 0), C(\frac{a}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}a), A(2a, 2a, 0),$

$\therefore \vec{EB} = (0, 2a, 0), \vec{BC} = (\frac{a}{2}, -2a, \frac{\sqrt{3}}{2}a), \vec{AB} = (-2a, 0, 0)$

设平面BEC的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1),$ 则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{EB} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{BC} = 0 \end{cases}$

则 $\begin{cases} 2ay_1 = 0 \\ \frac{a}{2}x_1 - 2ay_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}az_1 = 0 \end{cases},$ 取 $\vec{m} = (\sqrt{3}, 0, -1).$

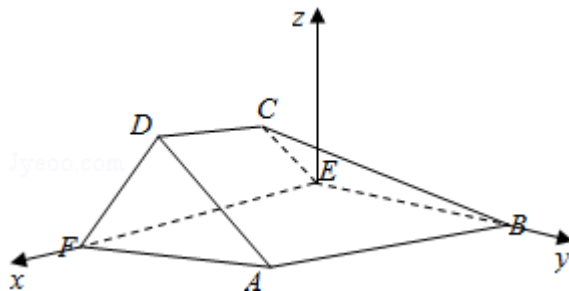
设平面ABC的法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2),$ 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{BC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \end{cases}$

则 $\begin{cases} \frac{a}{2}x_2 - 2ay_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}az_2 = 0 \\ 2ax_2 = 0 \end{cases},$ 取 $\vec{n} = (0, \sqrt{3}, 4).$

设二面角E - BC - A的大小为 $\theta,$ 则 $\cos\theta = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|}$

$$= \frac{-4}{\sqrt{3+1} \cdot \sqrt{3+16}} = -\frac{2\sqrt{19}}{19},$$

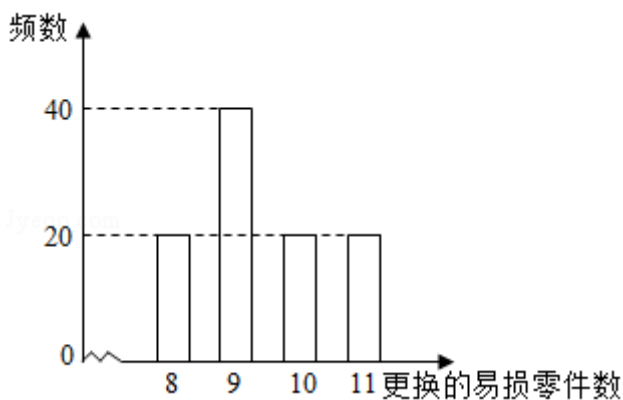
则二面角E - BC - A的余弦值为 $-\frac{2\sqrt{19}}{19}.$



【点评】 本题考查平面与平面垂直的证明，考查用空间向量求平面间的夹角，建立空间坐标系将二面角问题转化为向量夹角问题是解答的关键。

19. (12分) 某公司计划购买2台机器，该种机器使用三年后即被淘汰。机器有一易损零件，在购进机器时，可以额外购买这种零件作为备件，每个200元。在机器使用期间，如果备件不足再购买，则每个500元。现需决策在购买机器时应同时购买几个易损零件，为此搜集并整理了100台这种机器在三年使用期内更换的易损零件数，得如图柱状图：

以这100台机器更换的易损零件数的频率代替1台机器更换的易损零件数发生的概率，记X表示2台机器三年内共需更换的易损零件数，n表示购买2台机器的



同时购买的易损零件数。

- (I) 求X的分布列；
- (II) 若要求 $P(X \leq n) \geq 0.5$ ，确定n的最小值；
- (III) 以购买易损零件所需费用的期望值为决策依据，在 $n=19$ 与 $n=20$ 之中选其一，应选用哪个？

【考点】 CG：离散型随机变量及其分布列。

【专题】 11：计算题；35：转化思想；49：综合法；51：概率与统计。

【分析】 (I) 由已知得X的可能取值为16, 17, 18, 19, 20, 21, 22，分别求出相应的概率，由此能求出X的分布列。

(II) 由X的分布列求出 $P(X \leq 18) = \frac{11}{25}$ ， $P(X \leq 19) = \frac{17}{25}$ 。由此能确定满足 $P(X \leq n) \geq 0.5$ 中n的最小值。

(III) 法一：由X的分布列得 $P(X \leq 19) = \frac{17}{25}$ 。求出买19个所需费用期望 EX_1 和买

20个所需费用期望 EX_2 ，由此能求出买19个更合适.

法二：解法二：购买零件所用费用含两部分，一部分为购买零件的费用，另一部分为备件不足时额外购买的费用，分别求出 $n=19$ 时，费用的期望和当 $n=20$ 时，费用的期望，从而得到买19个更合适.

【解答】解：（I）由已知得 X 的可能取值为16, 17, 18, 19, 20, 21, 22,

$$P(X=16) = \left(\frac{20}{100}\right)^2 = \frac{1}{25},$$

$$P(X=17) = \frac{20}{100} \times \frac{40}{100} \times 2 = \frac{4}{25},$$

$$P(X=18) = \left(\frac{40}{100}\right)^2 + 2 \left(\frac{20}{100}\right)^2 = \frac{6}{25},$$

$$P(X=19) = 2 \times \frac{40}{100} \times \frac{20}{100} + 2 \times \left(\frac{20}{100}\right)^2 = \frac{6}{25},$$

$$P(X=20) = \left(\frac{20}{100}\right)^2 + 2 \times \frac{40}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5},$$

$$P(X=21) = 2 \times \left(\frac{20}{100}\right)^2 = \frac{2}{25},$$

$$P(X=22) = \left(\frac{20}{100}\right)^2 = \frac{1}{25},$$

∴ X 的分布列为：

X	16	17	18	19	20	21	22
P	$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$

（II）由（I）知：

$$P(X \leq 18) = P(X=16) + P(X=17) + P(X=18)$$

$$= \frac{1}{25} + \frac{4}{25} + \frac{6}{25} = \frac{11}{25}.$$

$$P(X \leq 19) = P(X=16) + P(X=17) + P(X=18) + P(X=19)$$

$$= \frac{1}{25} + \frac{4}{25} + \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{17}{25}.$$

∴ $P(X \leq n) \geq 0.5$ 中， n 的最小值为19.

（III）解法一：由（I）得 $P(X \leq 19) = P(X=16) + P(X=17) + P(X=18) + P(X=19)$

$$= \frac{1}{25} + \frac{4}{25} + \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{17}{25}.$$

买19个所需费用期望：

$$EX_1 = 200 \times 19 \times \frac{17}{25} + (200 \times 19 + 500) \times \frac{5}{25} + (200 \times 19 + 500 \times 2) \times \frac{2}{25} + (200 \times 19 + 500 \times 3) \times \frac{1}{25} = 4040,$$

买20个所需费用期望:

$$EX_2 = 200 \times 20 \times \frac{22}{25} + (200 \times 20 + 500) \times \frac{2}{25} + (200 \times 20 + 2 \times 500) \times \frac{1}{25} = 4080,$$

$\therefore EX_1 < EX_2$,

\therefore 买19个更合适.

解法二: 购买零件所用费用含两部分, 一部分为购买零件的费用,

另一部分为备件不足时额外购买的费用,

当 $n=19$ 时, 费用的期望为: $19 \times 200 + 500 \times 0.2 + 1000 \times 0.08 + 1500 \times 0.04 = 4040$,

当 $n=20$ 时, 费用的期望为: $20 \times 200 + 500 \times 0.08 + 1000 \times 0.04 = 4080$,

\therefore 买19个更合适.

【点评】 本题考查离散型随机变量的分布列和数学期望的求法及应用, 是中档题, 解题时要认真审题, 注意相互独立事件概率乘法公式的合理运用.

20. (12分) 设圆 $x^2 + y^2 + 2x - 15 = 0$ 的圆心为A, 直线l过点B(1, 0)且与x轴不重合, l交圆A于C, D两点, 过B作AC的平行线交AD于点E.

(I) 证明 $|EA| + |EB|$ 为定值, 并写出点E的轨迹方程;

(II) 设点E的轨迹为曲线 C_1 , 直线l交 C_1 于M, N两点, 过B且与l垂直的直线与圆A交于P, Q两点, 求四边形MPNQ面积的取值范围.

【考点】 J2: 圆的一般方程; KL: 直线与椭圆的综合.

【专题】 34: 方程思想; 48: 分析法; 5B: 直线与圆; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】 (I) 求得圆A的圆心和半径, 运用直线平行的性质和等腰三角形的性质, 可得 $EB = ED$, 再由圆的定义和椭圆的定义, 可得E的轨迹为以A, B为焦点的椭圆, 求得a, b, c, 即可得到所求轨迹方程;

(II) 设直线l: $x = my + 1$, 代入椭圆方程, 运用韦达定理和弦长公式, 可得 $|MN|$, 由 $PQ \perp l$, 设PQ: $y = -m(x - 1)$, 求得A到PQ的距离, 再由圆的弦长公式

可得 $|PQ|$ ，再由四边形的面积公式，化简整理，运用不等式的性质，即可得到所求范围.

【解答】解：（I）证明：圆 $x^2+y^2+2x-15=0$ 即为 $(x+1)^2+y^2=16$,

可得圆心A(-1, 0)，半径 $r=4$,

由 $BE \parallel AC$ ，可得 $\angle C = \angle EBD$,

由 $AC = AD$ ，可得 $\angle D = \angle C$,

即为 $\angle D = \angle EBD$ ，即有 $EB = ED$,

则 $|EA| + |EB| = |EA| + |ED| = |AD| = 4$,

故E的轨迹为以A, B为焦点的椭圆，

且有 $2a=4$ ，即 $a=2$ ， $c=1$ ， $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$,

则点E的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ($y \neq 0$)；

（II）椭圆 $C_1: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，设直线 $l: x = my + 1$,

由 $PQ \perp l$ ，设 $PQ: y = -m(x-1)$ ，

由 $\begin{cases} x = my + 1 \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases}$ 可得 $(3m^2+4)y^2 + 6my - 9 = 0$,

设 $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ，

可得 $y_1 + y_2 = -\frac{6m}{3m^2+4}$ ， $y_1 y_2 = -\frac{9}{3m^2+4}$ ，

则 $|MN| = \sqrt{1+m^2} \cdot |y_1 - y_2| = \sqrt{1+m^2} \cdot \sqrt{\frac{36m^2}{(3m^2+4)^2} + \frac{36}{3m^2+4}}$

$= \sqrt{1+m^2} \cdot \frac{\sqrt{36(4m^2+4)}}{3m^2+4} = 12 \cdot \frac{1+m^2}{3m^2+4}$ ，

A到PQ的距离为 $d = \frac{|-m(-1-1)|}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{|2m|}{\sqrt{1+m^2}}$ ，

$|PQ| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{16 - \frac{4m^2}{1+m^2}} = \frac{4\sqrt{3m^2+4}}{\sqrt{1+m^2}}$ ，

则四边形MPNQ面积为 $S = \frac{1}{2} |PQ| \cdot |MN| = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3m^2+4}}{\sqrt{1+m^2}} \cdot 12 \cdot \frac{1+m^2}{3m^2+4}$

$\frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$, 则 $g(x_1) = g(x_2) = -a$, 分析 $g(x)$ 的单调性, 令 $m > 0$,

$$\text{则 } g(1+m) - g(1-m) = \frac{m+1}{m^2} e^{1-m} \left(\frac{m-1}{m+1} e^{2m+1} \right),$$

设 $h(m) = \frac{m-1}{m+1} e^{2m+1}$, $m > 0$, 利用导数法可得 $h(m) > h(0) = 0$ 恒成立, 即 g

$(1+m) > g(1-m)$ 恒成立, 令 $m = 1 - x_1 > 0$, 可得结论.

【解答】解: (I) ∵ 函数 $f(x) = (x-2)e^x + a(x-1)^2$,

$$\therefore f'(x) = (x-1)e^x + 2a(x-1) = (x-1)(e^x + 2a),$$

①若 $a=0$, 那么 $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)e^x = 0 \Leftrightarrow x=2$,

函数 $f(x)$ 只有唯一的零点 2, 不合题意;

②若 $a > 0$, 那么 $e^x + 2a > 0$ 恒成立,

当 $x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 此时函数为减函数;

当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, 此时函数为增函数;

此时当 $x=1$ 时, 函数 $f(x)$ 取极小值 $-e$,

由 $f(2) = a > 0$, 可得: 函数 $f(x)$ 在 $x > 1$ 存在一个零点;

当 $x < 1$ 时, $e^x < e$, $x-2 < -1 < 0$,

$$\therefore f(x) = (x-2)e^x + a(x-1)^2 > (x-2)e + a(x-1)^2 = a(x-1)^2 + e(x-1) - e,$$

令 $a(x-1)^2 + e(x-1) - e = 0$ 的两根为 t_1, t_2 , 且 $t_1 < t_2$,

则当 $x < t_1$, 或 $x > t_2$ 时, $f(x) > a(x-1)^2 + e(x-1) - e > 0$,

故函数 $f(x)$ 在 $x < 1$ 存在一个零点;

即函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 是存在两个零点, 满足题意;

③若 $-\frac{e}{2} < a < 0$, 则 $\ln(-2a) < \ln e = 1$,

当 $x < \ln(-2a)$ 时, $x-1 < \ln(-2a) - 1 < \ln e - 1 = 0$,

$$e^x + 2a < e^{\ln(-2a)} + 2a = 0,$$

即 $f'(x) = (x-1)(e^x + 2a) > 0$ 恒成立, 故 $f(x)$ 单调递增,

当 $\ln(-2a) < x < 1$ 时, $x-1 < 0$, $e^x + 2a > e^{\ln(-2a)} + 2a = 0$,

即 $f'(x) = (x-1)(e^x + 2a) < 0$ 恒成立, 故 $f(x)$ 单调递减,

当 $x > 1$ 时, $x-1 > 0$, $e^x + 2a > e^{\ln(-2a)} + 2a = 0$,

即 $f'(x) = (x-1)(e^{x+2a}) > 0$ 恒成立，故 $f(x)$ 单调递增，

故当 $x = \ln(-2a)$ 时，函数取极大值，

由 $f(\ln(-2a)) = [\ln(-2a) - 2](-2a) + a[\ln(-2a) - 1]^2 = a\{[\ln(-2a) - 2]^2 + 1\} < 0$ 得：

函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上至多存在一个零点，不合题意；

④若 $a = -\frac{e}{2}$ ，则 $\ln(-2a) = 1$ ，

当 $x < 1 = \ln(-2a)$ 时， $x - 1 < 0$ ， $e^{x+2a} < e^{\ln(-2a)+2a} = 0$ ，

即 $f'(x) = (x-1)(e^{x+2a}) > 0$ 恒成立，故 $f(x)$ 单调递增，

当 $x > 1$ 时， $x - 1 > 0$ ， $e^{x+2a} > e^{\ln(-2a)+2a} = 0$ ，

即 $f'(x) = (x-1)(e^{x+2a}) > 0$ 恒成立，故 $f(x)$ 单调递增，

故函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递增，

函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上至多存在一个零点，不合题意；

⑤若 $a < -\frac{e}{2}$ ，则 $\ln(-2a) > \ln e = 1$ ，

当 $x < 1$ 时， $x - 1 < 0$ ， $e^{x+2a} < e^{\ln(-2a)+2a} = 0$ ，

即 $f'(x) = (x-1)(e^{x+2a}) > 0$ 恒成立，故 $f(x)$ 单调递增，

当 $1 < x < \ln(-2a)$ 时， $x - 1 > 0$ ， $e^{x+2a} < e^{\ln(-2a)+2a} = 0$ ，

即 $f'(x) = (x-1)(e^{x+2a}) < 0$ 恒成立，故 $f(x)$ 单调递减，

当 $x > \ln(-2a)$ 时， $x - 1 > 0$ ， $e^{x+2a} > e^{\ln(-2a)+2a} = 0$ ，

即 $f'(x) = (x-1)(e^{x+2a}) > 0$ 恒成立，故 $f(x)$ 单调递增，

故当 $x = 1$ 时，函数取极大值，

由 $f(1) = -e < 0$ 得：

函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上至多存在一个零点，不合题意；

综上所述， a 的取值范围为 $(0, +\infty)$

证明：(II) $\because x_1, x_2$ 是 $f(x)$ 的两个零点，

$\therefore f(x_1) = f(x_2) = 0$ ，且 $x_1 \neq 1$ ，且 $x_2 \neq 1$ ，

$$\therefore -a = \frac{(x_1-2)e^{x_1}}{(x_1-1)^2} = \frac{(x_2-2)e^{x_2}}{(x_2-1)^2}$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}, \text{ 则 } g(x_1) = g(x_2) = -a,$$

$$\therefore g'(x) = \frac{[(x-2)^2+1]e^x}{(x-1)^3},$$

\therefore 当 $x < 1$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减;

当 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增;

$$\text{设 } m > 0, \text{ 则 } g(1+m) - g(1-m) = \frac{m-1}{m^2} e^{1+m} - \frac{-m-1}{m^2} e^{1-m} =$$

$$\frac{m+1}{m^2} e^{1-m} \left(\frac{m-1}{m+1} e^{2m} + 1 \right),$$

$$\text{设 } h(m) = \frac{m-1}{m+1} e^{2m} + 1, \quad m > 0,$$

$$\text{则 } h'(m) = \frac{2m^2}{(m+1)^2} e^{2m} > 0 \text{ 恒成立,}$$

即 $h(m)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

$h(m) > h(0) = 0$ 恒成立,

即 $g(1+m) > g(1-m)$ 恒成立,

令 $m = 1 - x_1 > 0$,

$$\text{则 } g(1+1-x_1) > g(1-1+x_1) \Leftrightarrow g(2-x_1) > g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow 2-x_1 > x_2,$$

即 $x_1 + x_2 < 2$.

【点评】 本题考查的知识点是利用导数研究函数的极值, 函数的零点, 分类讨论思想, 难度较大.

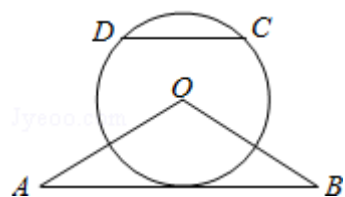
请考生在22、23、24题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.[

选修4-1: 几何证明选讲]

22. (10分) 如图, $\triangle OAB$ 是等腰三角形, $\angle AOB = 120^\circ$. 以 O 为圆心, $\frac{1}{2}OA$ 为半径作圆.

(I) 证明: 直线 AB 与 $\odot O$ 相切;

(II) 点 C, D 在 $\odot O$ 上, 且 A, B, C, D 四点共圆, 证明: $AB \parallel CD$.



【考点】 N9: 圆的切线的判定定理的证明.

【专题】 14: 证明题; 35: 转化思想; 49: 综合法; 5M: 推理和证明.

【分析】 (I) 设K为AB中点, 连结OK. 根据等腰三角形AOB的性质知 $OK \perp AB$,

$\angle A = 30^\circ$, $OK = OA \sin 30^\circ = \frac{1}{2}OA$, 则AB是圆O的切线.

(II) 设圆心为T, 证明OT为AB的中垂线, OT为CD的中垂线, 即可证明结论.

【解答】 证明: (I) 设K为AB中点, 连结OK,

$\because OA = OB$, $\angle AOB = 120^\circ$,

$\therefore OK \perp AB$, $\angle A = 30^\circ$, $OK = OA \sin 30^\circ = \frac{1}{2}OA$,

\therefore 直线AB与 $\odot O$ 相切;

(II) 因为 $OA = 2OD$, 所以O不是A, B, C, D四点所在圆的圆心. 设T是A, B, C, D四点所在圆的圆心.

$\because OA = OB$, $TA = TB$,

$\therefore OT$ 为AB的中垂线,

同理, $OC = OD$, $TC = TD$,

$\therefore OT$ 为CD的中垂线,

$\therefore AB \parallel CD$.

【点评】 本题考查了切线的判定, 考查四点共圆, 考查学生分析解决问题的能力. 解答此题时, 充分利用了等腰三角形“三合一”的性质.

[选修4-4: 坐标系与参数方程]

23. 在直角坐标系xOy中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = 1 + a \sin t \end{cases}$ (t为参数, $a > 0$)

. 在以坐标原点为极点, x轴正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线 $C_2: \rho = 4 \cos \theta$

.

(I) 说明 C_1 是哪种曲线, 并将 C_1 的方程化为极坐标方程;

(II) 直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta = \alpha_0$, 其中 α_0 满足 $\tan \alpha_0 = 2$, 若曲线 C_1 与 C_2 的公共点都在 C_3 上, 求a.

【考点】Q4：简单曲线的极坐标方程；QE：参数方程的概念.

【专题】11：计算题；35：转化思想；4A：数学模型法；5S：坐标系和参数方程.

【分析】（I）把曲线 C_1 的参数方程变形，然后两边平方作和即可得到普通方程，可知曲线 C_1 是圆，化为一般式，结合 $x^2+y^2=\rho^2$ ， $y=\rho\sin\theta$ 化为极坐标方程；

（II）化曲线 C_2 、 C_3 的极坐标方程为直角坐标方程，由条件可知 $y=x$ 为圆 C_1 与 C_2 的公共弦所在直线方程，把 C_1 与 C_2 的方程作差，结合公共弦所在直线方程为 $y=2x$ 可得 $1-a^2=0$ ，则 a 值可求.

【解答】解：（I）由 $\begin{cases} x=acost \\ y=1+asint \end{cases}$ ，得 $\begin{cases} x=acost \\ y-1=asint \end{cases}$ ，两式平方相加得， $x^2+(y-1)^2=a^2$.

$\therefore C_1$ 为以 $(0, 1)$ 为圆心，以 a 为半径的圆.

化为一般式： $x^2+y^2-2y+1-a^2=0$. ①

由 $x^2+y^2=\rho^2$ ， $y=\rho\sin\theta$ ，得 $\rho^2-2\rho\sin\theta+1-a^2=0$ ；

（II） C_2 ： $\rho=4\cos\theta$ ，两边同时乘 ρ 得 $\rho^2=4\rho\cos\theta$ ，

$\therefore x^2+y^2=4x$ ， ②

即 $(x-2)^2+y^2=4$.

由 C_3 ： $\theta=\alpha_0$ ，其中 α_0 满足 $\tan\alpha_0=2$ ，得 $y=2x$ ，

\therefore 曲线 C_1 与 C_2 的公共点都在 C_3 上，

$\therefore y=2x$ 为圆 C_1 与 C_2 的公共弦所在直线方程，

① - ②得： $4x-2y+1-a^2=0$ ，即为 C_3 ，

$\therefore 1-a^2=0$ ，

$\therefore a=1$ ($a>0$).

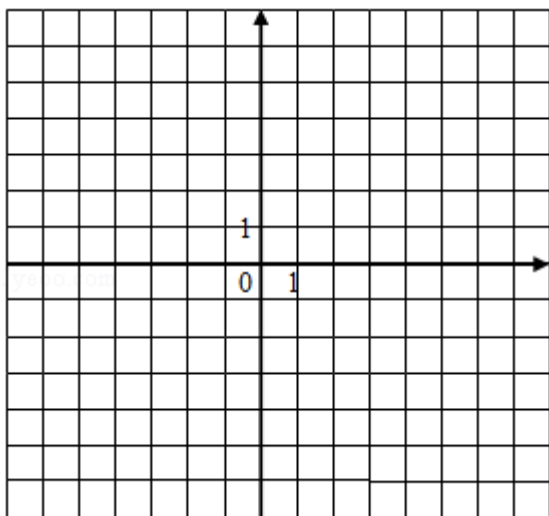
【点评】本题考查参数方程即简单曲线的极坐标方程，考查了极坐标与直角坐标的互化，训练了两圆公共弦所在直线方程的求法，是基础题.

[选修4-5：不等式选讲]

24. 已知函数 $f(x)=|x+1|-|2x-3|$.

（I）在图中画出 $y=f(x)$ 的图象；

(II) 求不等式 $|f(x)| > 1$ 的解集.



【考点】 &2: 带绝对值的函数; 3A: 函数的图象与图象的变换.

【专题】 35: 转化思想; 48: 分析法; 59: 不等式的解法及应用.

【分析】 (I) 运用分段函数的形式写出 $f(x)$ 的解析式, 由分段函数的画法, 即可得到所求图象;

(II) 分别讨论当 $x \leq -1$ 时, 当 $-1 < x < \frac{3}{2}$ 时, 当 $x \geq \frac{3}{2}$ 时, 解绝对值不等式, 取交集, 最后求并集即可得到所求解集.

【解答】 解: (I) $f(x) = \begin{cases} x-4, & x \leq -1 \\ 3x-2, & -1 < x < \frac{3}{2} \\ 4-x, & x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$

由分段函数的图象画法, 可得 $f(x)$ 的图象, 如右:

(II) 由 $|f(x)| > 1$, 可得

当 $x \leq -1$ 时, $|x-4| > 1$, 解得 $x > 5$ 或 $x < 3$, 即有 $x \leq -1$;

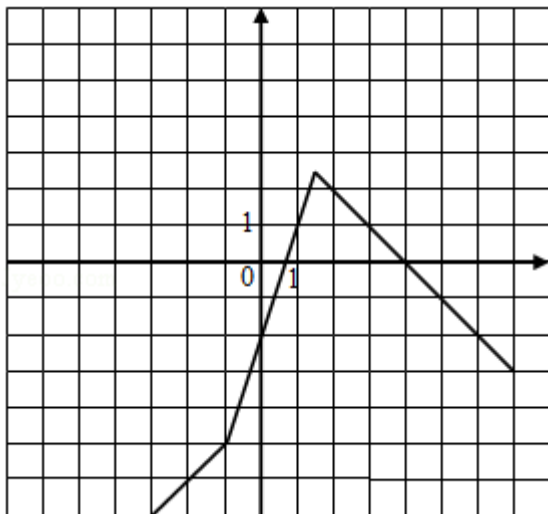
当 $-1 < x < \frac{3}{2}$ 时, $|3x-2| > 1$, 解得 $x > 1$ 或 $x < \frac{1}{3}$,

即有 $-1 < x < \frac{1}{3}$ 或 $1 < x < \frac{3}{2}$;

当 $x \geq \frac{3}{2}$ 时, $|4-x| > 1$, 解得 $x > 5$ 或 $x < 3$, 即有 $x > 5$ 或 $\frac{3}{2} \leq x < 3$.

综上所述, $x < \frac{1}{3}$ 或 $1 < x < 3$ 或 $x > 5$.

则 $|f(x)| > 1$ 的解集为 $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, 3) \cup (5, +\infty)$.



【点评】 本题考查绝对值函数的图象和不等式的解法，注意运用分段函数的图象的画法和分类讨论思想方法，考查运算能力，属于基础题.