

绝密★启用前

## 2018年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

# 数学（理工类）

本试卷分为第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟。第I卷1至2页，第II卷3至5页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利！

### 第I卷

#### 注意事项：

1. 每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。
2. 本卷共8小题，每小题5分，共40分。

#### 参考公式：

如果事件 $A$ ， $B$ 互斥，那么 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 。

如果事件 $A$ ， $B$ 相互独立，那么 $P(AB) = P(A)P(B)$ 。

棱柱的体积公式 $V = Sh$ ，其中 $S$ 表示棱柱的底面面积， $h$ 表示棱柱的高。

棱锥的体积公式 $V = \frac{1}{3}Sh$ ，其中 $S$ 表示棱锥的底面面积， $h$ 表示棱锥的高。

一. 选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

(1) 设全集为 $\mathbf{R}$ ，集合 $A = \{x | 0 < x < 2\}$ ， $B = \{x | x \geq 1\}$ ，则 $A \cap (C_{\mathbf{R}} B) =$

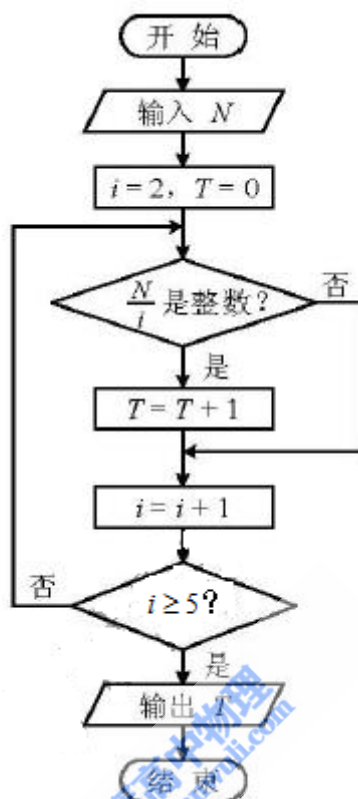
- (A)  $\{x | 0 < x \leq 1\}$                       (B)  $\{x | 0 < x < 1\}$   
(C)  $\{x | 1 \leq x < 2\}$                       (D)  $\{x | 0 < x < 2\}$

(2) 设变量 $x$ ， $y$ 满足约束条件 $\begin{cases} x + y \leq 5, \\ 2x - y \leq 4, \\ -x + y \leq 1, \\ y \geq 0, \end{cases}$  则目标函数 $z = 3x + 5y$ 的最大值为

- (A) 6              (B) 19              (C) 21              (D) 45

(3) 阅读如图的程序框图，运行相应的程序，若输入  $N$  的值为 20，则输出  $T$  的值为

- (A) 1            (B) 2            (C) 3            (D) 4



(4) 设  $x \in \mathbf{R}$ ，则“ $|x - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ ”是“ $x^3 < 1$ ”的

- (A) 充分而不必要条件  
 (B) 必要而不充分条件  
 (C) 充要条件  
 (D) 既不充分也不必要条件

(5) 已知  $a = \log_2 e$ ， $b = \ln 2$ ， $c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ ，则  $a$ ， $b$ ， $c$  的大小关系为

- (A)  $a > b > c$             (B)  $b > a > c$             (C)  $c > b > a$             (D)  $c > a > b$

(6) 将函数  $y = \sin(2x + \frac{\pi}{5})$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{10}$  个单位长度，所得图象对应的函数

- (A) 在区间  $[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$  上单调递增            (B) 在区间  $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$  上单调递减

(C)在区间 $[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$ 上单调递增

(D)在区间 $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ 上单调递减

(7)已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为2, 过右焦点且垂直于x轴的直线与双曲线交于A, B两点. 设A, B到双曲线同一条渐近线的距离分别为 $d_1$ 和 $d_2$ , 且 $d_1 + d_2 = 6$ , 则双曲线的方程为

(A)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

(B)  $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

(C)  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$

(D)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$

(8)如图, 在平面四边形ABCD中,  $AB \perp BC$ ,  $AD \perp CD$ ,  $\angle BAD = 120^\circ$ ,  $AB = AD = 1$ .

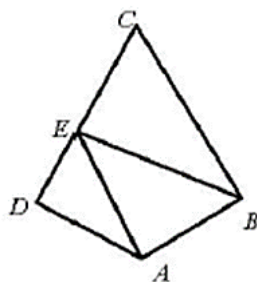
若点E为边CD上的动点, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}$ 的最小值为

(A)  $\frac{21}{16}$

(B)  $\frac{3}{2}$

(C)  $\frac{25}{16}$

(D) 3



第(8)题图

## 第II卷

注意事项:

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。

2. 本卷共12小题, 共110分。

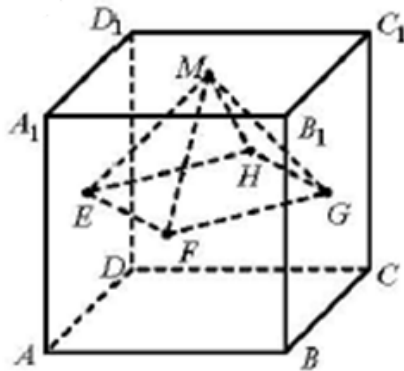
二. 填空题: 本大题共6小题, 每小题5分, 共30分。

(9) i是虚数单位, 复数 $\frac{6+7i}{1+2i} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(10) 在 $(x - \frac{1}{2\sqrt{x}})^5$ 的展开式中,  $x^2$ 的系数为 $\underline{\hspace{2cm}}$ .

(11)

已知正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为1, 除面  $ABCD$  外, 该正方体其余各面的中心分别为点  $E, F, G, H, M$  (如图), 则四棱锥  $M - EFGH$  的体积为\_\_\_\_\_.



第 (11) 题图

(12) 已知圆  $x^2 + y^2 - 2x = 0$  的圆心为  $C$ , 直线  $\begin{cases} x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$  ( $t$  为参数) 与该圆相交于  $A, B$  两点, 则

$\triangle ABC$  的面积为\_\_\_\_\_.

(13) 已知  $a, b \in \mathbf{R}$ , 且  $a - 3b + 6 = 0$ , 则  $2^a + \frac{1}{8^b}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

(14) 已知  $a > 0$ , 函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax + a, & x \leq 0, \\ -x^2 + 2ax - 2a, & x > 0. \end{cases}$  若关于  $x$  的方程  $f(x) = ax$  恰有 2 个互异的实数解,

则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

三.解答题: 本大题共6小题, 共80分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

(15) (本小题满分13分)

在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ . 已知  $b \sin A = a \cos(B - \frac{\pi}{6})$ .

(I) 求角  $B$  的大小;

(II) 设  $a=2, c=3$ , 求  $b$  和  $\sin(2A - B)$  的值.

(16) (本小题满分13分)

已知某单位甲、乙、丙三个部门的员工人数分别为24, 16, 16.

现采用分层抽样的方法从中抽取7人, 进行睡眠时间的调查.

(I) 应从甲、乙、丙三个部门的员工中分别抽取多少人?

(II) 若抽出的7人中有4人睡眠不足，3人睡眠充足，现从这7人中随机抽取3人做进一步的身体检查.

(i) 用 $X$ 表示抽取的3人中睡眠不足的员工人数，求随机变量 $X$ 的分布列与数学期望；

(ii) 设 $A$ 为事件“抽取的3人中，既有睡眠充足的员工，也有睡眠不足的员工”，求事件 $A$ 发生的概率.

(17)(本小题满分13分)

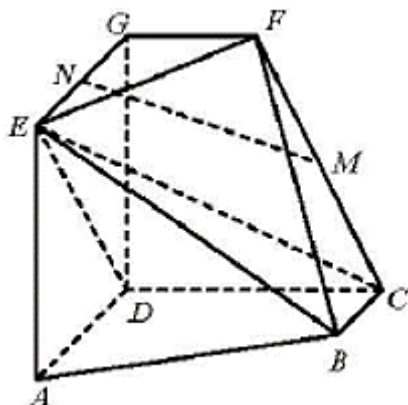
如图， $AD \parallel BC$  且  $AD=2BC$ ， $AD \perp CD$ ， $EG \parallel AD$  且  $EG=AD$ ， $CD \parallel FG$  且  $CD=2FG$ ，

$DG \perp$  平面  $ABCD$ ， $DA=DC=DG=2$ .

(I) 若 $M$ 为 $CF$ 的中点， $N$ 为 $EG$ 的中点，求证： $MN \parallel$  平面  $CDE$ ；

(II) 求二面角  $E-BC-F$  的正弦值；

(III) 若点 $P$ 在线段 $DG$ 上，且直线 $BP$ 与平面 $ADGE$ 所成的角为 $60^\circ$ ，求线段 $DP$ 的长.



(18)(本小题满分13分)

设  $\{a_n\}$  是等比数列，公比大于0，其前 $n$ 项和为  $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ， $\{b_n\}$  是等差数列.

已知  $a_1 = 1$ ,

$$a_3 = a_2 + 2, \quad a_4 = b_3 + b_5, \quad a_5 = b_4 + 2b_6.$$

(I) 求  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式；

(II) 设数列  $\{S_n\}$  的前 $n$ 项和为  $T_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ,

(i) 求  $T_n$ ；

(ii) 证明  $\sum_{k=1}^n \frac{(T_k + b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2^{n+2}}{n+2} - 2 (n \in \mathbf{N}^*)$ .

(19)(本小题满分14分)

设椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左焦点为 $F$ ，上顶点为 $B$ .

已知椭圆的离心率为  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ，点  $A$  的坐标为  $(b, 0)$ ，且  $|FB| \cdot |AB| = 6\sqrt{2}$ 。

(I) 求椭圆的方程；

(II) 设直线  $l: y = kx (k > 0)$  与椭圆在第一象限的交点为  $P$ ，且  $l$  与直线  $AB$  交于点  $Q$ 。

若  $\frac{|AQ|}{|PQ|} = \frac{5\sqrt{2}}{4} \sin \angle AOQ$  ( $O$  为原点)，求  $k$  的值。

(20)(本小题满分14分)

已知函数  $f(x) = a^x$ ， $g(x) = \log_a x$ ，其中  $a > 1$ 。

(I) 求函数  $h(x) = f(x) - x \ln a$  的单调区间；

(II) 若曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_1, f(x_1))$  处的切线与曲线  $y = g(x)$  在点  $(x_2, g(x_2))$

处的切线平行，证明  $x_1 + g(x_2) = -\frac{2 \ln \ln a}{\ln a}$ ；

(III) 证明当  $a \geq e^{\frac{1}{e}}$  时，存在直线  $l$ ，使  $l$  是曲线  $y = f(x)$  的切线，也是曲线  $y = g(x)$  的切线。

参考答案：

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算。每小题5分，满分40分。

- (1) B                      (2) C                      (3) B                      (4) A  
 (5) D                      (6) A                      (7) C                      (8) A

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算。每小题5分，满分30分。

- (9)  $4-i$                       (10)  $\frac{5}{2}$                       (11)  $\frac{1}{12}$   
 (12)  $\frac{1}{2}$                       (13)  $\frac{1}{4}$                       (14) (4, 8)

三、解答题

(15) 本小题主要考查同角三角函数的基本关系，两角差的正弦与余弦公式，二倍角的正弦与余弦公式，以及正弦定理、余弦定理等基础知识，考查运算求解能力。满分13分。

(I) 解：在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，可得 $b \sin A = a \sin B$ ，又由 $b \sin A = a \cos(B - \frac{\pi}{6})$ ，得 $a \sin B = a \cos(B - \frac{\pi}{6})$ ，即 $\sin B = \cos(B - \frac{\pi}{6})$ ，可得 $\tan B = \sqrt{3}$ 。又因为 $B \in (0, \pi)$ ，可得 $B = \frac{\pi}{3}$ 。

(II) 解：在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理及 $a=2, c=3, B=\frac{\pi}{3}$ ，有 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 7$ ，故 $b = \sqrt{7}$ 。

由 $b \sin A = a \cos(B - \frac{\pi}{6})$ ，可得 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ 。因为 $a < c$ ，故 $\cos A = \frac{2}{\sqrt{7}}$ 。因此 $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{4\sqrt{3}}{7}$

， $\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 = \frac{1}{7}$ 。

所以， $\sin(2A - B) = \sin 2A \cos B - \cos 2A \sin B = \frac{4\sqrt{3}}{7} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$ 。

(16) 本小题主要考查随机抽样、离散型随机变量的分布列与数学期望、互斥事件的概率加法公式等基础知识。考查运用概率知识解决简单实际问题的能力。满分13分。学科网

(I) 解：由已知，甲、乙、丙三个部门的员工人数之比为3:2:2，由于采用分层抽样的方法从中抽取7人，因此应从甲、乙、丙三个部门的员工中分别抽取3人，2人，2人。

(II) (i) 解：随机变量 $X$ 的所有可能取值为0, 1, 2, 3。

$$P(X=k) = \frac{C_4^k \cdot C_3^{3-k}}{C_7^3} \quad (k=0, 1, 2, 3).$$

所以，随机变量 $X$ 的分布列为

$X$	0	1	2	3
$P$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

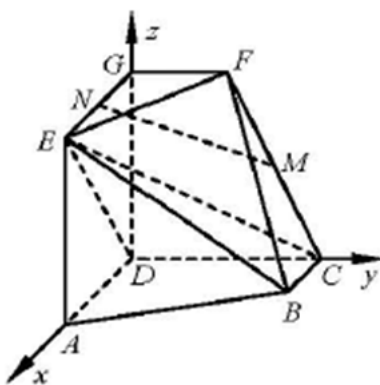
随机变量 $X$ 的数学期望  $E(X) = 0 \times \frac{1}{35} + 1 \times \frac{12}{35} + 2 \times \frac{18}{35} + 3 \times \frac{4}{35} = \frac{12}{7}$ .

(ii) 解: 设事件 $B$ 为“抽取的3人中, 睡眠充足的员工有1人, 睡眠不足的员工有2人”; 事件 $C$ 为“抽取的3人中, 睡眠充足的员工有2人, 睡眠不足的员工有1人”, 则 $A=B \cup C$ , 且 $B$ 与 $C$ 互斥, 由(i)知,  $P(B) = P(X=2)$ ,  $P(C) = P(X=1)$ , 故 $P(A) = P(B \cup C) = P(X=2) + P(X=1) = \frac{6}{7}$ .

所以, 事件 $A$ 发生的概率为  $\frac{6}{7}$ .

(17) 本小题主要考查直线与平面平行、二面角、直线与平面所成的角等基础知识. 考查用空间向量解决立体几何问题的方法. 考查空间想象能力、运算求解能力和推理论证能力. 满分13分.

依题意, 可以建立以 $D$ 为原点, 分别以 $\overrightarrow{DA}$ ,  $\overrightarrow{DC}$ ,  $\overrightarrow{DG}$ 的方向为 $x$ 轴,  $y$ 轴,  $z$ 轴的正方向的空间直角坐标系(如图), 可得 $D(0, 0, 0)$ ,  $A(2, 0, 0)$ ,  $B(1, 2, 0)$ ,  $C(0, 2, 0)$ ,  $E(2, 0, 2)$ ,  $F(0, 1, 2)$ ,  $G(0, 0, 2)$ ,  $M(0, \frac{3}{2}, 1)$ ,  $N(1, 0, 2)$ .



(I) 证明: 依题意  $\overrightarrow{DC} = (0, 2, 0)$ ,  $\overrightarrow{DE} = (2, 0, 2)$ . 设  $\mathbf{n}_0 = (x, y, z)$  为平面  $CDE$  的法向量, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n}_0 \cdot \overrightarrow{DC} = 0, \\ \mathbf{n}_0 \cdot \overrightarrow{DE} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 2y = 0, \\ 2x + 2z = 0, \end{cases} \quad \text{不妨令 } z = -1, \text{ 可得 } \mathbf{n}_0 = (1, 0, -1). \text{ 又 } \overrightarrow{MN} = (1, -\frac{3}{2}, 1), \text{ 可得}$$

$\overrightarrow{MN} \cdot \mathbf{n}_0 = 0$ , 又因为直线  $MN \not\subset$  平面  $CDE$ , 所以  $MN \parallel$  平面  $CDE$ .

(II) 解: 依题意, 可得  $\overrightarrow{BC} = (-1, 0, 0)$ ,  $\overrightarrow{BE} = (1, -2, 2)$ ,  $\overrightarrow{CF} = (0, -1, 2)$ .

$$\text{设 } \mathbf{n} = (x, y, z) \text{ 为平面 } BCE \text{ 的法向量, 则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BE} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} -x = 0, \\ x - 2y + 2z = 0, \end{cases}$$

不妨令  $z = 1$ , 可得  $\mathbf{n} = (0, 1, 1)$ .

$$\text{设 } \mathbf{m} = (x, y, z) \text{ 为平面 } BCF \text{ 的法向量, 则} \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BF} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} -x = 0, \\ -y + 2z = 0, \end{cases}$$

不妨令 $z=1$ , 可得 $m=(0, 2, 1)$ .

因此有 $\cos\langle m, n \rangle = \frac{m \cdot n}{|m||n|} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ , 于是 $\sin\langle m, n \rangle = \frac{\sqrt{10}}{10}$ .

所以, 二面角 $E-BC-F$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$ .

(III) 解: 设线段 $DP$ 的长为 $h$  ( $h \in [0, 2]$ ), 则点 $P$ 的坐标为 $(0, 0, h)$ , 可得 $\overline{BP} = (-1, -2, h)$ .

易知,  $\overline{DC} = (0, 2, 0)$ 为平面 $ADGE$ 的一个法向量, 故

$$|\cos\langle \overline{BP}, \overline{DC} \rangle| = \frac{|\overline{BP} \cdot \overline{DC}|}{|\overline{BP}||\overline{DC}|} = \frac{2}{\sqrt{h^2+5}},$$

由题意, 可得 $\frac{2}{\sqrt{h^2+5}} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 解得 $h = \frac{\sqrt{3}}{3} \in [0, 2]$ .

所以线段 $DP$ 的长为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

(18) 本小题主要考查等差数列的通项公式, 等比数列的通项公式及前 $n$ 项和公式等基础知识. 考查等差数列求和的基本方法和运算求解能力. 满分13分.

(I) 解: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q$ . 由 $a_1=1, a_3=a_2+2$ , 可得 $q^2-q-2=0$ .

因为 $q>0$ , 可得 $q=2$ , 故 $a_n=2^{n-1}$ .

设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 $d$ , 由 $a_4=b_3+b_5$ , 可得 $b_1+3d=4$ . 由 $a_5=b_4+2b_6$ ,

可得 $3b_1+13d=16$ , 从而 $b_1=1, d=1$ , 故 $b_n=n$ .

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^{n-1}$ , 数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=n$ .

(II) (i) 由(I), 有 $S_n = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$ , 故

$$T_n = \sum_{k=1}^n (2^k - 1) = \sum_{k=1}^n 2^k - n = \frac{2 \times (1-2^n)}{1-2} - n = 2^{n+1} - n - 2.$$

(ii) 证明: 因为

$$\frac{(T_k + b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)} = \frac{(2^{k+1} - k - 2 + k + 2)k}{(k+1)(k+2)} = \frac{k \cdot 2^{k+1}}{(k+1)(k+2)} = \frac{2^{k+2}}{k+2} - \frac{2^{k+1}}{k+1},$$

所以, 
$$\sum_{k=1}^n \frac{(T_k + b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)} = \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2}\right) + \left(\frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{2^{n+2}}{n+2} - \frac{2^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{2^{n+2}}{n+2} - 2.$$

(19) 本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线方程等基础知识. 考查用代数方法研究圆锥曲线的性质. 考查运算求解能力, 以及用方程思想解决问题的能力. 满分14分.

(I) 解: 设椭圆的焦距为 $2c$ , 由已知知 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{5}{9}$ , 又由 $a^2 = b^2 + c^2$ , 可得 $2a = 3b$ . 由已知可得,  $|FB| = a$ ,

$|AB| = \sqrt{2}b$ , 由 $|FB| \cdot |AB| = 6\sqrt{2}$ , 可得 $ab = 6$ , 从而 $a = 3, b = 2$ .

所以, 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

(II) 解: 设点 $P$ 的坐标为 $(x_1, y_1)$ , 点 $Q$ 的坐标为 $(x_2, y_2)$ . 由已知有 $y_1 > y_2 > 0$ , 故

$|PQ| \sin \angle AOQ = y_1 - y_2$ . 又因为 $|AQ| = \frac{y_2}{\sin \angle OAB}$ , 而 $\angle OAB = \frac{\pi}{4}$ , 故 $|AQ| = \sqrt{2}y_2$ . 由

$\frac{|AQ|}{|PQ|} = \frac{5\sqrt{2}}{4} \sin \angle AOQ$ , 可得 $5y_1 = 9y_2$ .

由方程组 
$$\begin{cases} y = kx, \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \end{cases}$$
 消去 $x$ , 可得 $y_1 = \frac{6k}{\sqrt{9k^2 + 4}}$ . 易知直线 $AB$ 的方程为 $x + y - 2 = 0$ , 由方程组

$$\begin{cases} y = kx, \\ x + y - 2 = 0, \end{cases}$$

消去 $x$ , 可得 $y_2 = \frac{2k}{k+1}$ . 由 $5y_1 = 9y_2$ , 可得 $5(k+1) = 3\sqrt{9k^2 + 4}$ , 两边平方, 整理得 $56k^2 - 50k + 11 = 0$

, 解得 $k = \frac{1}{2}$ , 或 $k = \frac{11}{28}$ .

所以,  $k$ 的值为 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{11}{28}$ .

(20) 本小题主要考查导数的运算、导数的几何意义、运用导数研究指数函数与对数函数的性质等基础知识和方法. 考查函数与方程思想、化归思想. 考查抽象概括能力、综合分析问题和解决问题的能力. 满分14分.

(I) 解: 由已知,  $h(x) = a^x - x \ln a$ , 有 $h'(x) = a^x \ln a - \ln a$ .

令 $h'(x) = 0$ , 解得 $x = 0$ .

由 $a > 1$ , 可知当 $x$ 变化时,  $h'(x)$ ,  $h(x)$ 的变化情况如下表:

$x$	$(-\infty, 0)$	$0$	$(0, +\infty)$
-----	----------------	-----	----------------

$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	↘	极小值	↗

所以函数  $h(x)$  的单调递减区间  $(-\infty, 0)$ ，单调递增区间为  $(0, +\infty)$ 。

(II) 证明：由  $f'(x) = a^x \ln a$ ，可得曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_1, f(x_1))$  处的切线斜率为  $a^{x_1} \ln a$ 。

由  $g'(x) = \frac{1}{x \ln a}$ ，可得曲线  $y = g(x)$  在点  $(x_2, g(x_2))$  处的切线斜率为  $\frac{1}{x_2 \ln a}$ 。

因为这两条切线平行，故有  $a^{x_1} \ln a = \frac{1}{x_2 \ln a}$ ，即  $x_2 a^{x_1} (\ln a)^2 = 1$ 。

两边取以  $a$  为底的对数，得  $\log_a x_2 + x_1 + 2 \log_2 \ln a = 0$ ，所以  $x_1 + g(x_2) = -\frac{2 \ln \ln a}{\ln a}$ 。

(III) 证明：曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_1, a^{x_1})$  处的切线  $l_1$ ：  $y - a^{x_1} = a^{x_1} \ln a \cdot (x - x_1)$ 。

曲线  $y = g(x)$  在点  $(x_2, \log_a x_2)$  处的切线  $l_2$ ：  $y - \log_a x_2 = \frac{1}{x_2 \ln a} \cdot (x - x_2)$ 。

要证明当  $a \geq e^{\frac{1}{e}}$  时，存在直线  $l$ ，使  $l$  是曲线  $y = f(x)$  的切线，也是曲线  $y = g(x)$  的切线，只需证明当  $a \geq e^{\frac{1}{e}}$  时，存在  $x_1 \in (-\infty, +\infty)$ ， $x_2 \in (0, +\infty)$ ，使得  $l_1$  和  $l_2$  重合。学\*科网

即只需证明当  $a \geq e^{\frac{1}{e}}$  时，方程组 
$$\begin{cases} a^{x_1} \ln a = \frac{1}{x_2 \ln a} & \text{①} \\ a^{x_1} - x_1 a^{x_1} \ln a = \log_a x_2 - \frac{1}{\ln a} & \text{②} \end{cases}$$
 有解，

由①得  $x_2 = \frac{1}{a^{x_1} (\ln a)^2}$ ，代入②，得  $a^{x_1} - x_1 a^{x_1} \ln a + x_1 + \frac{1}{\ln a} + \frac{2 \ln \ln a}{\ln a} = 0$ 。③

因此，只需证明当  $a \geq e^{\frac{1}{e}}$  时，关于  $x_1$  的方程③有实数解。

设函数  $u(x) = a^x - x a^x \ln a + x + \frac{1}{\ln a} + \frac{2 \ln \ln a}{\ln a}$ ，即要证明当  $a \geq e^{\frac{1}{e}}$  时，函数  $y = u(x)$  存在零点。

$u'(x) = 1 - (\ln a)^2 x a^x$ ，可知  $x \in (-\infty, 0)$  时， $u'(x) > 0$ ； $x \in (0, +\infty)$  时， $u'(x)$  单调递减，又

$u'(0) = 1 > 0$ ， $u' \left[ \frac{1}{(\ln a)^2} \right] = 1 - a^{\frac{1}{(\ln a)^2}} < 0$ ，故存在唯一的  $x_0$ ，且  $x_0 > 0$ ，使得  $u'(x_0) = 0$ ，即

$$1 - (\ln a)^2 x_0 a^{x_0} = 0.$$

由此可得  $u(x)$  在  $(-\infty, x_0)$  上单调递增, 在  $(x_0, +\infty)$  上单调递减.  $u(x)$  在  $x = x_0$  处取得极大值  $u(x_0)$ .

因为  $a \geq e^{\frac{1}{e}}$ , 故  $\ln(\ln a) \geq -1$ ,

$$\text{所以 } u(x_0) = a^{x_0} - x_0 a^{x_0} \ln a + x_0 + \frac{1}{\ln a} + \frac{2 \ln \ln a}{\ln a} = \frac{1}{x_0 (\ln a)^2} + x_0 + \frac{2 \ln \ln a}{\ln a} \geq \frac{2 + 2 \ln \ln a}{\ln a} \geq 0.$$

下面证明存在实数  $t$ , 使得  $u(t) < 0$ .

由 (I) 可得  $a^x \geq 1 + x \ln a$ ,

当  $x > \frac{1}{\ln a}$  时,

$$\text{有 } u(x) \leq (1 + x \ln a)(1 - x \ln a) + x + \frac{1}{\ln a} + \frac{2 \ln \ln a}{\ln a} = -(\ln a)^2 x^2 + x + 1 + \frac{1}{\ln a} + \frac{2 \ln \ln a}{\ln a},$$

所以存在实数  $t$ , 使得  $u(t) < 0$

因此, 当  $a \geq e^{\frac{1}{e}}$  时, 存在  $x_1 \in (-\infty, +\infty)$ , 使得  $u(x_1) = 0$ .

所以, 当  $a \geq e^{\frac{1}{e}}$  时, 存在直线  $l$ , 使  $l$  是曲线  $y = f(x)$  的切线, 也是曲线  $y = g(x)$  的切线.

## 选择填空解析

一. 选择题: 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 设全集为  $\mathbb{R}$ , 集合  $A = \{x | 0 < x < 2\}$ ,  $B = \{x | x \geq 1\}$ , 则  $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) =$

A.  $\{x | 0 < x \leq 1\}$  B.  $\{x | 0 < x < 1\}$  C.  $\{x | 1 \leq x < 2\}$  D.  $\{x | 0 < x < 2\}$

**【答案】B**

**【解析】**分析: 由题意首先求得  $\complement_{\mathbb{R}} B$ , 然后进行交集运算即可求得最终结果.

详解: 由题意可得:  $\complement_{\mathbb{R}} B = \{x | x < 1\}$ ,

结合交集的定义可得:  $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) = \{0 < x < 1\}$ .

本题选择B选项.

点睛：本题主要考查交集的运算法则，补集的运算法则等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

2. 设变量 $x, y$ 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \leq 5, \\ 2x-y \leq 4, \\ -x+y \leq 1, \\ y \geq 0, \end{cases}$  则目标函数 $z = 3x + 5y$ 的最大值为

A. 6 B. 19 C. 21 D. 45

**【答案】C**

**【解析】**分析：首先画出可行域，然后结合目标函数的几何意义确定函数取得最大值的点，最后求解最大值即可.

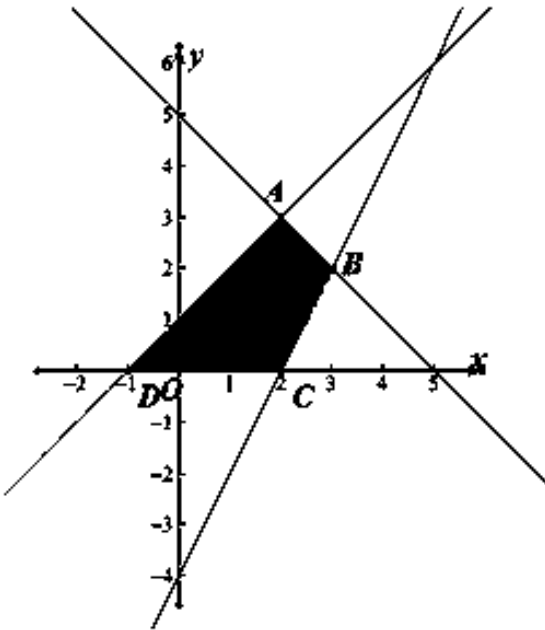
详解：绘制不等式组表示的平面区域如图所示，

结合目标函数的几何意义可知目标函数在点 $A$ 处取得最大值，

联立直线方程： $\begin{cases} x+y=5 \\ -x+y=1 \end{cases}$ ，可得点 $A$ 的坐标为： $A(2,3)$ ，

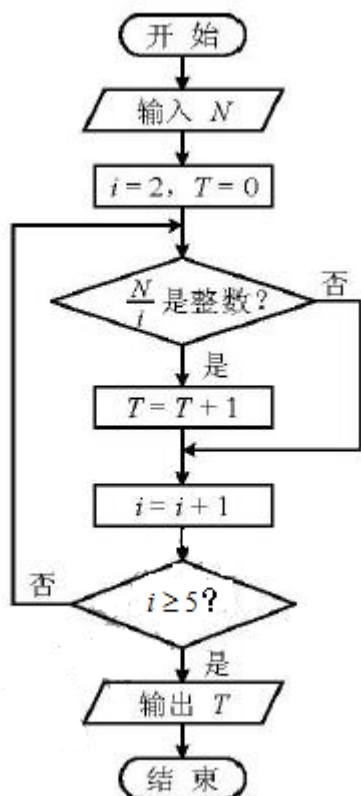
据此可知目标函数的最大值为： $z_{\max} = 3x + 5y = 3 \times 2 + 5 \times 3 = 21$ .

本题选择C选项.



点睛：求线性目标函数 $z = ax + by (ab \neq 0)$ 的最值，当 $b > 0$ 时，直线过可行域且在 $y$ 轴上截距最大时， $z$ 值最大，在 $y$ 轴截距最小时， $z$ 值最小；当 $b < 0$ 时，直线过可行域且在 $y$ 轴上截距最大时， $z$ 值最小，在 $y$ 轴上截距最小时， $z$ 值最大.

3. 阅读右边的程序框图，运行相应的程序，若输入 $N$ 的值为20，则输出 $T$ 的值为



A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

**【答案】B**

**【解析】**分析：由题意结合流程图运行程序即可求得输出的数值.

详解：结合流程图运行程序如下：

首先初始化数据：N = 20, i = 2, T = 0,

$\frac{N}{i} = \frac{20}{2} = 10$ ，结果为整数，执行  $T = T + 1 = 1$ ， $i = i + 1 = 3$ ，此时不满足  $i \geq 5$ ；

$\frac{N}{i} = \frac{20}{3}$ ，结果不为整数，执行  $i = i + 1 = 4$ ，此时不满足  $i \geq 5$ ；

$\frac{N}{i} = \frac{20}{4} = 5$ ，结果为整数，执行  $T = T + 1 = 2$ ， $i = i + 1 = 5$ ，此时满足  $i \geq 5$ ；

跳出循环，输出  $T = 2$ .

本题选择B选项.

点睛：识别、运行程序框图和完善程序框图的思路：

(1)要明确程序框图的顺序结构、条件结构和循环结构.

(2)要识别、运行程序框图，理解框图所解决的实际问题.

(3)按照题目的要求完成解答并验证.

4. 设  $x \in \mathbb{R}$ ，则“ $|x - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ ”是“ $x^3 < 1$ ”的

- A. 充分而不必要条件
- B. 必要而不重复条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

**【答案】A**

**【解析】**分析：首先求解绝对值不等式，然后求解三次不等式即可确定两者之间的关系.

详解：绝对值不等式  $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x - \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x < 1,$

由  $x^3 < 1 \Leftrightarrow x < 1.$

据此可知  $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$  是  $x^3 < 1$  的充分而不必要条件.

本题选择A选项.

点睛：本题主要考查绝对值不等式的解法，充分不必要条件的判断等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

5. 已知  $a = \log_2 e$ ,  $b = \ln 2$ ,  $c = \log_{\frac{1}{2}} 3$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为

- A.  $a > b > c$
- B.  $b > a > c$
- C.  $c > b > a$
- D.  $c > a > b$

**【答案】D**

**【解析】**分析：由题意结合对数函数的性质整理计算即可求得最终结果.

详解：由题意结合对数函数的性质可知：

$$a = \log_2 e > 1, \quad b = \ln 2 = \frac{1}{\log_2 e} \in (0, 1), \quad c = \log_{\frac{1}{2}} 3 = \log_2 3 > \log_2 e,$$

据此可得： $c > a > b.$

本题选择D选项.

点睛：对于指数幂的大小的比较，我们通常都是运用指数函数的单调性，但很多时候，因幂的底数或指数不相同，不能直接利用函数的单调性进行比较。这就必须掌握一些特殊方法。在进行指数幂的大小比较时，若底数不同，则首先考虑将其转化成同底数，然后再根据指数函数的单调性进行判断。对于不同底而同指数的指数幂的大小的比较，利用图象法求解，既快捷，又准确。

6. 将函数  $y = \sin(2x + \frac{\pi}{5})$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{10}$  个单位长度，所得图象对应的函数

- A. 在区间  $[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$  上单调递增
- B. 在区间  $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$  上单调递减

- C. 在区间 $[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$ 上单调递增      D. 在区间 $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ 上单调递减

**【答案】** A

**【解析】** 分析：由题意首先求得平移之后的函数解析式，然后确定函数的单调区间即可。

详解：由函数图象平移变换的性质可知：

将 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{5})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度之后的解析式为：

$$y = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{10}\right) + \frac{\pi}{5}\right] = \sin 2x.$$

则函数的单调递增区间满足： $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in Z)$ ,

$$\text{即 } k\pi - \frac{\pi}{4} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{4} (k \in Z),$$

令 $k = 1$ 可得一个单调递增区间为： $[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ .

函数的单调递减区间满足： $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in Z)$ ,

$$\text{即 } k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq k\pi + \frac{3\pi}{4} (k \in Z),$$

令 $k = 1$ 可得一个单调递减区间为： $[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$ .

本题选择A选项.

点睛：本题主要考查三角函数的平移变换，三角函数的单调区间的判断等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为2，过右焦点且垂直于x轴的直线与双曲线交于A, B两点.

设A, B到双曲线同一条渐近线的距离分别为 $d_1$ 和 $d_2$ ，且 $d_1 + d_2 = 6$ ，则双曲线的方程为

- A.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$     B.  $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$     C.  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$     D.  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$

**【答案】** C

**【解析】** 分析：由题意首先求得A, B的坐标，然后利用点到直线距离公式求得b的值，之后求解a的值即可确定双曲线方程.

详解：设双曲线的右焦点坐标为 $F(c, 0) (c > 0)$ ，则 $x_A = x_B = c$ ,

$$\text{由 } \frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 可得： } y = \pm \frac{b^2}{a}$$

不妨设:  $A\left(c, \frac{b^2}{a}\right), B\left(c, -\frac{b^2}{a}\right)$ ,

双曲线的一条渐近线方程为:  $bx-ay=0$ ,

据此可得:  $d_1 = \frac{|bc-b^2|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{bc-b^2}{c}$ ,  $d_2 = \frac{|bc+b^2|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{bc+b^2}{c}$ ,

则  $d_1 + d_2 = \frac{2bc}{c} = 2b = 6$ , 则  $b = 3, b^2 = 9$ ,

双曲线的离心率:  $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{9}{a^2}} = 2$ ,

据此可得:  $a^2 = 3$ , 则双曲线的方程为  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$ .

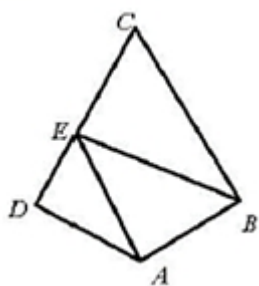
本题选择C选项.

点睛: 求双曲线的标准方程的基本方法是待定系数法. 具体过程是先定形, 再定量, 即先确定双曲线标准方程的形式, 然后再根据  $a, b, c, e$  及渐近线之间的关系, 求出  $a, b$  的值. 如果已知双曲线的渐近线方程

, 求双曲线的标准方程, 可利用有公共渐近线的双曲线方程为  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \lambda (\lambda \neq 0)$ , 再由条件求出  $\lambda$  的值即可.

8. 如图, 在平面四边形  $ABCD$  中,  $AB \perp BC$ ,  $AD \perp CD$ ,  $\angle BAD = 120^\circ$ ,  $AB = AD = 1$ .

若点  $E$  为边  $CD$  上的动点, 则  $\vec{AE} \cdot \vec{BE}$  的最小值为

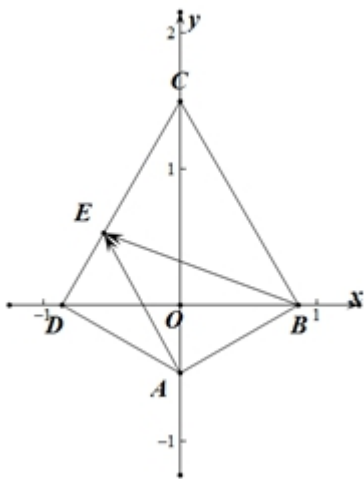


- A.  $\frac{21}{16}$  B.  $\frac{3}{2}$  C.  $\frac{25}{16}$  D. 3

【答案】A

【解析】分析: 由题意建立平面直角坐标系, 然后结合点的坐标得到数量积的坐标表示, 最后结合二次函数的性质整理计算即可求得最终结果.

详解: 建立如图所示的平面直角坐标系, 则  $A\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ ,  $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ ,  $C\left(0, \frac{3}{2}\right)$ ,  $D\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ ,



点E在CD上，则 $\vec{DE} = \lambda\vec{DC}$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ )，设 $E(x, y)$ ，则：

$$\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) = \lambda\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right), \quad \text{即} \begin{cases} x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda \\ y = \frac{3}{2}\lambda \end{cases},$$

据此可得： $E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\lambda\right)$ ，且：

$$\vec{AE} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\lambda + 1\right), \quad \vec{BE} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda - \sqrt{3}, \frac{3}{2}\lambda\right),$$

由数量积的坐标运算法则可得：

$$\vec{AE} \cdot \vec{BE} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda - \sqrt{3}\right) + \frac{3}{2}\lambda \times \left(\frac{3}{2}\lambda + 1\right),$$

$$\text{整理可得：} \vec{AE} \cdot \vec{BE} = \frac{3}{4}(4\lambda^2 - 2\lambda + 2) \quad (0 \leq \lambda \leq 1),$$

结合二次函数的性质可知，当 $\lambda = \frac{1}{4}$ 时， $\vec{AE} \cdot \vec{BE}$ 取得最小值 $\frac{21}{16}$ 。

本题选择A选项。

点睛：求两个向量的数量积有三种方法：利用定义；利用向量的坐标运算；利用数量积的几何意义。具体应用时可根据已知条件的特征来选择，同时要注意数量积运算律的应用。

## 2018年普通高等学校招生全国统一考试(天津卷)

### 数 学(理工类)

### 第II卷

注意事项：

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。

2. 本卷共12小题，共110分。

二. 填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分。

9.  $i$ 是虚数单位，复数 $\frac{6+7i}{1+2i}$  = \_\_\_\_\_.

【答案】  $4-i$

【解析】 分析：由题意结合复数的运算法则整理计算即可求得最终结果.

详解：由复数的运算法则得： $\frac{6+7i}{1+2i} = \frac{(6+7i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{20-5i}{5} = 4-i$ .

点睛：本题主要考查复数的运算法则及其应用，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

10. 在 $(x - \frac{1}{2\sqrt{x}})^5$ 的展开式中， $x^2$ 的系数为\_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{5}{2}$

【解析】 分析：由题意结合二项式定理展开式的通项公式得到 $r$ 的值，然后求解 $x^2$ 的系数即可.

详解：结合二项式定理的通项公式有： $T_{r+1} = C_5^r x^{5-r} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^r = \left(\frac{1}{2}\right)^r C_5^r x^{5-\frac{3}{2}r}$ ,

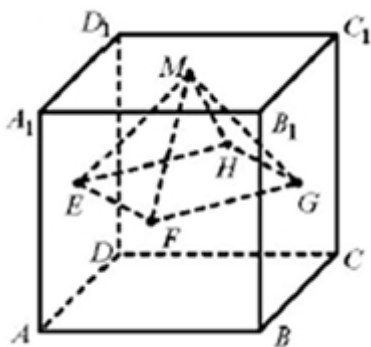
令 $5-\frac{3}{2}r = 2$ 可得： $r = 2$ ，则 $x^2$ 的系数为： $\left(\frac{1}{2}\right)^2 C_5^2 = \frac{1}{4} \times 10 = \frac{5}{2}$ .

点睛：(1)二项式定理的核心是通项公式，求解此类问题可以分两步完成：第一步根据所给出的条件(特定项)和通项公式，建立方程来确定指数(求解时要注意二项式系数中 $n$ 和 $r$ 的隐含条件，即 $n, r$ 均为非负整数，且 $n \geq r$ ，如常数项指数为零、有理项指数为整数等)；第二步是根据所求的指数，再求所求解的项.

(2)求两个多项式的积的特定项，可先化简或利用分类加法计数原理讨论求解.

11.

已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，除面 $ABCD$ 外，该正方体其余各面的中心分别为点 $E, F, G, H$ ， $M$ (如图)，则四棱锥 $M - EFGH$ 的体积为\_\_\_\_\_.



【答案】  $\frac{1}{12}$

【解析】 分析：由题意首先求解底面积，然后结合四棱锥的高即可求得四棱锥的体积.

详解：由题意可得，底面四边形EFGH为边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的正方形，其面积 $S_{EFGH} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ ，

顶点M到底面四边形EFGH的距离为 $d = \frac{1}{2}$ ，

由四棱锥的体积公式可得： $V_{M-EFGH} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ 。

点睛：本题主要考查四棱锥的体积计算，空间想象能力等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力。

12.

已知圆 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 的圆心为C，直线 $\begin{cases} x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$  (为参数)与该圆相交于A, B两点，则 $\triangle ABC$ 的面积为\_\_\_\_\_。

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】分析：由题意首先求得圆心到直线的距离，然后结合弦长公式求得弦长，最后求解三角形的面积即可。

详解：由题意可得圆的标准方程为： $(x-1)^2 + y^2 = 1$ ，

直线的直角坐标方程为： $y-3 = -(x+1)$ ，即 $x+y-2=0$ ，

则圆心到直线的距离： $d = \frac{|1+0-2|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

由弦长公式可得： $|AB| = 2 \times \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$ ，

则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$ 。

点睛：处理直线与圆的位置关系时，若两方程已知或圆心到直线的距离易表达，则用几何法；若方程中含有参数，或圆心到直线的距离的表达较繁琐，则用代数法。

13. 已知 $a, b \in \mathbb{R}$ ，且 $a-3b+6=0$ ，则 $2^a + \frac{1}{8^b}$ 的最小值为\_\_\_\_\_。

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】分析：由题意首先求得 $a-3b$ 的值，然后结合均值不等式的结论整理计算即可求得最终结果，注意等号成立的条件。

详解：由 $a-3b+6=0$ 可知 $a-3b=-6$ ，

且： $2^a + \frac{1}{8^b} = 2^a + 2^{-3b}$ ，因为对于任意 $x$ ， $2^x > 0$ 恒成立，

结合均值不等式的结论可得： $2^a + 2^{-3b} \geq 2 \times \sqrt{2^a \times 2^{-3b}} = 2 \times \sqrt{2^{-6}} = \frac{1}{4}$ .

当且仅当  $\begin{cases} 2^a = 2^{-3b} \\ a-3b=6 \end{cases}$ ，即  $\begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases}$  时等号成立.

综上所述可得  $2^a + \frac{1}{8^b}$  的最小值为  $\frac{1}{4}$ .

点睛：在应用基本不等式求最值时，要把握不等式成立的三个条件，就是“一正——各项均为正；二定——积或和为定值；三相等——等号能否取得”，若忽略了某个条件，就会出现错误.

14.

已知  $a > 0$ ，函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax + a, & x \leq 0, \\ -x^2 + 2ax - 2a, & x > 0. \end{cases}$  若关于  $x$  的方程  $f(x) = ax$  恰有 2 个互异的实数解，则  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

**【答案】** (4, 8)

**【解析】** 分析：由题意分类讨论  $x \leq 0$  和  $x > 0$  两种情况，然后绘制函数图像，数形结合即可求得最终结果.

详解：分类讨论：当  $x \leq 0$  时，方程  $f(x) = ax$  即  $x^2 + 2ax + a = ax$ ,

整理可得： $x^2 = -a(x+1)$ ,

很明显  $x = -1$  不是方程的实数解，则  $a = -\frac{x^2}{x+1}$ ,

当  $x > 0$  时，方程  $f(x) = ax$  即  $-x^2 + 2ax - 2a = ax$ ,

整理可得： $x^2 = a(x-2)$ ,

很明显  $x = 2$  不是方程的实数解，则  $a = \frac{x^2}{x-2}$ ,

$$\text{令 } g(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{x+1}, & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{x-2}, & x > 0 \end{cases},$$

$$\text{其中 } -\frac{x^2}{x+1} = -\left(x+1 + \frac{1}{x+1} - 2\right), \quad \frac{x^2}{x-2} = x-2 + \frac{4}{x-2} + 4$$

原问题等价于函数  $g(x)$  与函数  $y = a$  有两个不同的交点，求  $a$  的取值范围.

结合对勾函数和函数图像平移的规律绘制函数  $g(x)$  的图象，

同时绘制函数  $y = a$  的图象如图所示，考查临界条件，

结合  $a > 0$  观察可得，实数  $a$  的取值范围是 (4, 8).

点睛：本题的核心在考查函数的零点问题，函数零点的求解与判断方法包括：

(1)直接求零点：令 $f(x)=0$ ，如果能求出解，则有几个解就有几个零点.

(2)零点存在性定理：利用定理不仅要函数在区间 $[a, b]$ 上是连续不断的曲线，且 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，还必须结合函数的图象与性质(如单调性、奇偶性)才能确定函数有多少个零点.

(3)利用图象交点的个数：将函数变形为两个函数的差，画两个函数的图象，看其交点的横坐标有几个不同的值，就有几个不同的零点.