2006年湖南高考文科数学真题及答案

本试题卷他选择题和非选择题（包括填空题和解答题）两部分．选择题部分1至2页．非选择题部分3至5页．时量120分钟．满分150分．

参考公式:

如果事件 A、B 互斥，那么 $P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A、B 相互独立，那么 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 P，那么 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率是 $P_n(k)=C_n^k P^k(1-P)^{n-k}$

球的体积公式 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$，球的表面积公式 $S=4\pi R^2$，其中 R 表示球的半径

一．选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．函数 $y=\sqrt{\log_2 x}$ 的定义域是

A．$(0,1]$　　B．$(0,+\infty)$　　C．$(1,+\infty)$　　D．$[1,+\infty)$

2．已知向量 $\vec{a}=(2,t),\vec{b}=(1,2)$，若 $t=t_1$ 时，$\vec{a}\parallel\vec{b}$；$t=t_2$ 时，$\vec{a}\perp\vec{b}$，则

A．$t_1=-4,t_2=-1$　　B．$t_1=-4,t_2=1$

C．$t_1=4,t_2=-1$　　D．$t_1=4,t_2=1$

3．若 $(ax-1)^5$ 的展开式中 x^3 的系数是80，则实数 a 的值是

A．-2　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\sqrt[3]{4}$　　D．2

4．过半径为12的球 O 表面上一点 A 作球 O 的截面，若 OA 与该截面所成的角是60° 则该截面的面积是

A．π　　B．2π　　C．3π　　D．$2\sqrt{3}\pi$

5．“$a=1$”是“函数 $f(x)=|x-a|$ 在区间［1，＋∞）上为增函数”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．在数字1,2，3与符号＋，－五个元素的所有全排列中，任意两个数字都不相邻的全排列个数是

A．6　　B．12　　C．18　　D．24

7．圆 $x^2+y^2-4x-4y-10=0$ 上的点到直线 $x+y-14=0$ 的最大距离与最小距离的差是

A．36　　　　B．18　　　　C．$6\sqrt{2}$　　　　D．$5\sqrt{2}$

8．设点 P 是函数 $f(x)=\sin\omega x$ 的图象 C 的一个对称中心，若点 P 到图象 C 的对称轴上的距离的最小值 $\frac{\pi}{4}$，则 $f(x)$ 的最小正周期是

A．2π　　　　B．π　　　　C．$\frac{\pi}{2}$　　　　D．$\frac{\pi}{4}$

9．过双曲线 M：$x^2-\frac{y^2}{h^2}=1$ 的左顶点 A 作斜率为 1 的直线 l，若 l 与双曲线 M 的两条渐近线分别相交于点 B、C，且 $|AB|=|BC|$，则双曲线 M 的离心率是

A．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　　　B．$\frac{\sqrt{10}}{3}$　　　　C．$\sqrt{5}$　　　　D．$\sqrt{10}$

10．如图 1：$OM // AB$，点 P 由射线 OM、线段 OB 及 AB 的延长线围成的阴影区域内（不含边界）．且 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则实数对（$x$, y）可以是

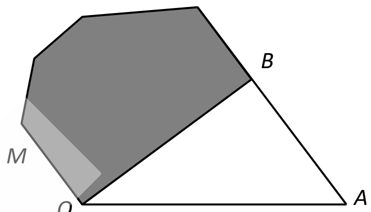


图 1

A．$(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$　　　　B．$(-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

C．$(-\frac{1}{4},\frac{3}{4})$　　　　D．$(-\frac{1}{5},\frac{7}{5})$

二．填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分，把答案填在答题上部　对应题号的横上.

11．若数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1, a_{n+1}=2a_n, n=1$，2，3⋯. 则 $a_1+a_2+\cdots+a_n=$____________.

12．某高校有甲、乙两个数学建模兴趣班．其中甲班有 40 人，乙班 50 人．现分析两个班的一次考试成绩，算得甲班的平均成绩是 90 分，乙班的平均成绩是 81 分，则该校数学建模兴趣班的平均成绩是__________分.

13．已知 $\begin{cases} x\geq 1 \\ x-y+1\leq 0 \\ 2x-y-2\leq 0 \end{cases}$ 则 x^2+y^2 的最小值是__________.

14．过三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的任意两条棱的中点作直线，其中与平面 ABB_1A_1 平行的直线共有条.

15．若 $f(x)=a\sin(x+\frac{\pi}{4})+3\sin(x-\frac{\pi}{4})$ 是偶函数，则 a=______.

三．解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16．（本小题满分 1 2 分）

已知 $\sqrt{3}\sin\theta-\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-2\theta)}{\cos(\pi+\theta)}\cdot\cos\theta=1, \theta\in(0,\pi)$，求 θ 的值.

17.（本小题满分 1 2 分）

某安全生产监督部门对 5 家小型煤矿进行安全检查(简称安检). 若安检不合格，则必须整改. 若整改后经复查仍不合格，则强制关闭. 设每家煤矿安检是否合格是相互独立的，且每家煤矿整改前安检合格的概率是 0.5，整改后安检合格的概率是 0.8，计算(结果精确到 0.01)：

(Ⅰ)恰好有两家煤矿必须整改的概率；

(Ⅱ)某煤矿不被关闭的概率；

(Ⅲ)至少关闭一家煤矿的概率.

18.（本小题满分 1 4 分）

如图 2，已知两个正四棱锥 $P-ABCD$ 与 $Q-ABCD$ 的高都是 2，$AB=4$.

(Ⅰ)证明 $PQ\perp$ 平面 $ABCD$;

(Ⅱ)求异面直线 AQ 与 PB 所成的角；

(Ⅲ)求点 P 到平面 QAD 的距离.

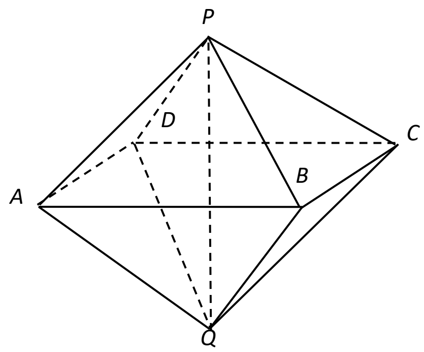


图 2

19.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=ax^3-3x^2+1-\dfrac{3}{a}$.

（Ⅰ）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）若曲线 $y=f(x)$ 上两点 A、B 处的切线都与 y 轴垂直，且线段 AB 与 x 轴有公共点，求实数 a 的取值范围.

20.（本小题满分 14 分）

在 m（$m\geqslant 2$）个不同数的排列 $P_1P_2\cdots P_n$ 中，若 $1\leqslant i<j\leqslant m$ 时 $P_i>P_j$（即前面某数大于后面某数），则称 P_i 与 P_j 构成一个逆序. 一个排列的全部逆序的总数称为该排列的逆序数. 记排列 $(n+1)n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数为 a_n，如排列 21 的逆序数 $a_1=1$，排列 321 的逆序数 $a_3=6$.

（Ⅰ）求 a_4、a_5，并写出 a_n 的表达式；

（Ⅱ）令 $b_n=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}+\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，证明 $2n<b_1+b_2+\cdots b_n<2n+3$，$n=1, 2, \cdots$.

21.（本小题满分 14 分）

已知椭圆 C_1：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，抛物线 C_2：$(y-m)^2=2px(p>0)$，且 C_1、C_2 的公共弦 AB 过椭圆 C_1 的右焦点.

（Ⅰ）当 $AB\perp x$ 轴时，求 p、m 的值，并判断抛物线 C_2 的焦点是否在直线 AB 上；

（Ⅱ）若 $p=\dfrac{4}{3}$ 且抛物线 C_2 的焦点在直线 AB 上，求 m 的值及直线 AB 的方程.

2006年湖南高考文科数学真题参考答案

1—10：DCDAABCBCDC

11. $\underline{2^n-1}$　12. $\underline{85}$　13. $\underline{5}$　14. $\underline{6}$　15. $\underline{-3}$.

16. 解　由已知条件得 $\sqrt{3}\sin\theta-\dfrac{\cos 2\theta}{-\cos\theta}\cdot\cos\theta=1$.

即 $\sqrt{3}\sin\theta-2\sin^2\theta=0$.

解得 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\sin\theta=0$.

由 0＜ θ＜ π 知 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，从而 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$.

17. 解　（Ⅰ）每家煤矿必须整改的概率是 1－0.5，且每家煤矿是否整改是相互独立的. 所以恰好有两家煤矿必须整改的概率是 $P_1=C_5^2\times(1-0.5)^2\times0.5^3=\dfrac{5}{16}=0.31$.

（Ⅱ）解法一　某煤矿被关闭，即该煤矿第一次安检不合格，整改后经复查仍不合格，所以该煤矿被关闭的概率是 $P_2=(1-0.5)\times(1-0.8)=0.1$，从而煤矿不被关闭的概率是 0.90.

解法二　某煤矿不被关闭包括两种情况：（i）该煤矿第一次安检合格；（ii）该煤矿第一次安检不合格，但整改后合格.

所以该煤矿不被关闭的概率是 $P_2=0.5+(1-0.5)\times0.8=0.90$.

(III) 由题设（Ⅱ）可知，每家煤矿不被关闭的概率是 0.9，且每家煤矿是否被关闭是相互独立的，所以到少关闭一家煤矿的概率是 $P_3=1-0.9^5=0.41$.

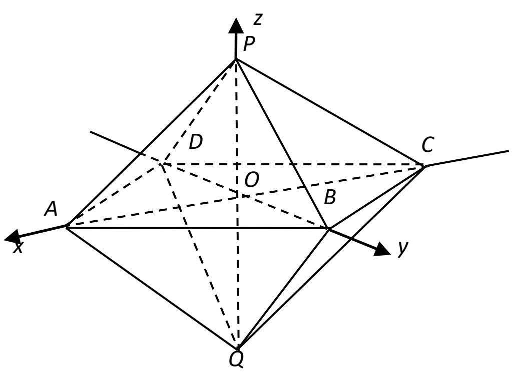
18. 解法一　（Ⅰ）连结 AC、BD，设 $AC\cap BD=O$.

由 P—$ABCD$ 与 Q—$ABCD$ 都是正四棱锥，所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，$QO\perp$ 平面 $ABCD$.

从而 P、O、Q 三点在一条直线上，所以 $PQ\perp$ 平面 $ABCD$.

（Ⅱ）由题设知，$ABCD$ 是正方形，所以 $AC\perp BD$.

由（Ⅰ），$QO\perp$ 平面 $ABCD$. 故可分别以直线 CA、DB、QP 为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系（如图），由题条件，相关各点的坐标分别是 P（0，0，2），A（$2\sqrt{2}$，0，0），Q（0，0，—2），B（0，$2\sqrt{2}$，0）.



所以 $\overrightarrow{AQ}=(-2\sqrt{2},0,-2)$

$\overrightarrow{PB}=(0,2\sqrt{2},-2)$

于是 $\cos<\overrightarrow{AQ},\overrightarrow{PB}>=\dfrac{\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{PB}}{\left|\overrightarrow{AQ}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PB}\right|}=\dfrac{4}{2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$.

从而异面直线 AQ 与 PB 所成的角是 $\arccos\frac{1}{3}$.

(III) 由（II），点 D 的坐标是（0，$-2\sqrt{2}$，0），$\overrightarrow{AD}=(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2},0)$，

$\overrightarrow{PQ}=(0,0,-4)$，设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 是平面 QAD 的一个法向量，由

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AQ}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{2}x+z=0\\ x+y=0\end{cases}$.

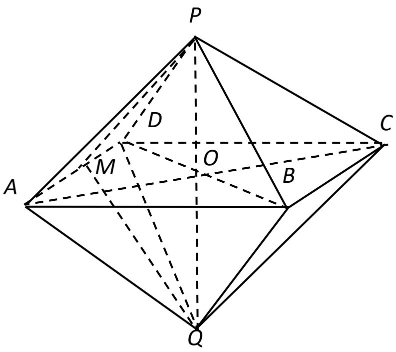
取 $x=1$，得 $\vec{n}=(1,-1,-\sqrt{2})$.

所以点 P 到平面 QAD 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=2\sqrt{2}$.

解法二　（Ⅰ）取 AD 的中点，连结 PM，QM.
因为 $P-ABCD$ 与 $Q-ABCD$ 都是正四棱锥，
所以 $AD\perp PM$，$AD\perp QM$. 从而 $AD\perp$ 平面 PQM.

又 $PQ\subset$ 平面 PQM，所以 $PQ\perp AD$.

同理 $PQ\perp AB$，所以 $PQ\perp$ 平面 $ABCD$.
（II）连结 AC、BD 设 $AC\cap BD=O$，由 $PQ\perp$ 平面 $ABCD$ 及正四棱锥的性质可知 O 在 PQ 上，从而 P、A、Q、C 四点共面.
因为 $OA=OC$, $OP=OQ$, 所以 $PAQC$ 为平行四边形，$AQ\parallel PC$.
从而 $\angle BPC$（或其补角）是异面直线 AQ 与 PB 所成的角.



因为 $PB=PC=\sqrt{OC^2+OP^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+2^2}=2\sqrt{3}$，

所以 $\cos\angle BPC=\dfrac{PB^2+PC^2-BC^2}{2PB\cdot PC}=\dfrac{12+12-16}{2\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$.

从而异面直线 AQ 与 PB 所成的角是 $\arccos\frac{1}{3}$.

(III) 连结 OM，则 $OM=\frac{1}{2}AB=2=\frac{1}{2}PQ$.
所以 $\angle PMQ=90°$，即 $PM\perp MQ$.
由（Ⅰ）知 $AD\perp PM$，所以 $PM\perp$ 平面 QAD. 从而 PM 的长是点 P 到平面 QAD 的距离.

在直角△PMO 中，$PM=\sqrt{PO^2+OM^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

即点 P 到平面 QAD 的距离是 $2\sqrt{2}$.

19. 解　（Ⅰ）由题设知 $a\neq0, f'(x)=3ax^2-6x=3ax(x-\frac{2}{a})$.

令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=0, x_2=\frac{2}{a}$.

当（i）$a>0$ 时，

若 $x\in(-\infty,0)$，则 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\frac{2}{a})$ 上是增函数；

若 $x\in(0,\frac{2}{a})$，则 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{2}{a})$ 上是减函数；

若 $x\in(\frac{2}{a},+\infty)$，则 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(\frac{2}{a},+\infty)$ 上是增函数；

（i i）当 $a<0$ 时，

若 $x\in(-\infty,\frac{2}{a})$，则 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\frac{2}{a})$ 上是减函数；

若 $x\in(0,\frac{2}{a})$，则 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{2}{a})$ 上是减函数；

若 $x\in(\frac{2}{a},0)$，则 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(\frac{2}{a},0)$ 上是增函数；

若 $x\in(0,+\infty)$，则 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

（Ⅱ）由（Ⅰ）的讨论及题设知，曲线 $y=f(x)$ 上的两点 A、B 的纵坐标为函数的极值，且函数 $y=f(x)$ 在 $x=0,x=\frac{2}{a}$ 处分别是取得极值 $f(0)=1-\frac{3}{a}$，$f(\frac{2}{a})=-\frac{4}{a^2}-\frac{3}{a}+1$.

因为线段 AB 与 x 轴有公共点，所以 $f(0)\cdot f(\frac{2}{a})\le 0$.

即 $(-\frac{4}{a^2}-\frac{3}{a}+1)(1-\frac{3}{a})\le 0$. 所以 $\frac{(a+1)(a-3)(a-4)}{a^2}\le 0$.

故 $(a+1)(a-3)(a-4)\le 0,且a\ne 0$.

解得　$-1\leqslant a<0$ 或 $3\leqslant a\leqslant 4$.

即所求实数 a 的取值范围是 $[-1，0)\cup[3，4]$.

20. 解　（Ⅰ）由已知得 $a_4=10,a_5=15$，

$$a_n=n+(n-1)+\cdots+2+1=\frac{n(n+1)}{2}.$$

（Ⅱ）因为 $b_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+2}+\frac{n+2}{n}>2\sqrt{\frac{n}{n+2}\cdot\frac{n+2}{n}}=2,n=1,2,\cdots$，

所以 $b_1+b_2+\cdots+b_n>2n$.

又因为 $b_n=\frac{n}{n+2}+\frac{n+2}{n}=2+\frac{2}{n}-\frac{2}{n+2},n=1,2,\cdots$，

所以 $b_1+b_2+\cdots+b_n=2n+2[(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})]$

$$=2n+3-\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n+2}<2n+3.$$

综上，$2n < b_1 + b_2 + \cdots b_n < 2n+3, n = 1,2,\cdots$.

21．解　（Ⅰ）当 $AB\perp x$ 轴时，点 A、B 关于 x 轴对称，所以 $m=0$，直线 AB 的方程为 $x=1$，从而点 A 的坐标为（1，$\frac{3}{2}$）或（1，$-\frac{3}{2}$）.

因为点 A 在抛物线上，所以 $\frac{9}{4} = 2p$，即 $p = \frac{9}{8}$.

此时 C_2 的焦点坐标为（$\frac{9}{16}$，0），该焦点不在直线 AB 上.

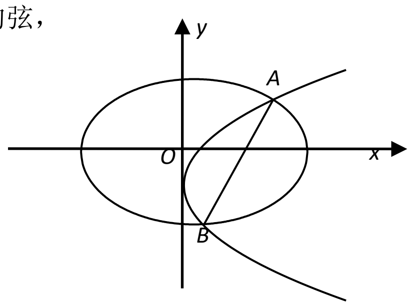
（Ⅱ）解法一　当 C_2 的焦点在 AB 时，由（Ⅰ）知直线 AB 的斜率存在，设直线 AB 的方程为 $y = k(x-1)$.

由 $\begin{cases} y = k(x-1) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 消去 y 得 $(3+4k^2)x^2 - 8k^2 x + 4k^2 - 12 = 0$.　　……①

设 A、B 的坐标分别为（x_1, y_1），（x_2, y_2），

则 x_1, x_2 是方程①的两根，$x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{3+4k^2}$.

因为AB既是过 C_1 的右焦点的弦，又是过 C_2 的焦点的弦，



所以 $|AB| = (2 - \frac{1}{2}x_1) + (2 - \frac{1}{2}x_2) = 4 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$，且

$|AB| = (x_1 + \frac{p}{2}) + (x_2 + \frac{p}{2}) = x_1 + x_2 + p = x_1 + x_2 + \frac{4}{3}$.

从而 $x_1 + x_2 + \frac{4}{3} = 4 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

所以 $x_1 + x_2 = \frac{16}{9}$，即 $\frac{8k^2}{3+4k^2} = \frac{16}{9}$.

解得 $k^2 = 6, 即 k = \pm\sqrt{6}$.

因为 C_2 的焦点 $F'(\frac{2}{3}, m)$ 在直线 $y = k(x-1)$ 上，所以 $m = -\frac{1}{3}k$.

即 $m = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $m = -\frac{\sqrt{6}}{3}$.

当 $m = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 时，直线 AB 的方程为 $y = -\sqrt{6}(x-1)$；

当 $m = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ 时，直线 AB 的方程为 $y = \sqrt{6}(x-1)$.

解法二　当 C_2 的焦点在 AB 时，由（Ⅰ）知直线 AB 的斜率存在，设直线 AB 的方程为 $y = k(x-1)$.

由 $\begin{cases} (y-m)^2 = \frac{8}{3}x \\ y = k(x-1) \end{cases}$ 消去 y 得 $(kx - k - m)^2 = \frac{8}{3}x$.　　……①

因为 C_2 的焦点 $F'(\frac{2}{3},m)$ 在直线 $y=k(x-1)$ 上，

所以 $m=k(\frac{2}{3}-1)$，即 $m=-\frac{1}{3}k$. 代入①有 $(kx-\frac{2k}{3})^2=\frac{8}{3}x$.

即 $k^2x^2-\frac{4}{3}(k^2+2)x+\frac{4k^2}{9}=0$. ……②

设 A、B 的坐标分别为（x_1, y_1），（x_2, y_2），

则 x_1, x_2 是方程②的两根，$x_1+x_2=\frac{4(k^2+2)}{3k^2}$.

由 $\begin{cases} y=k(x-1) \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 消去 y 得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$. ……③

由于 x_1, x_2 也是方程③的两根，所以 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2}$.

从而 $\frac{4(k^2+2)}{3k^2}=\frac{8k^2}{3+4k^2}$. 解得 $k^2=6$, 即 $k=\pm\sqrt{6}$.

因为 C_2 的焦点 $F'(\frac{2}{3},m)$ 在直线 $y=k(x-1)$ 上，所以 $m=-\frac{1}{3}k$.

即 $m=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $m=-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

当 $m=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 时，直线 AB 的方程为 $y=-\sqrt{6}(x-1)$；

当 $m=-\frac{\sqrt{6}}{3}$ 时，直线 AB 的方程为 $y=\sqrt{6}(x-1)$.

解法三　设 A、B 的坐标分别为（x_1, y_1），（x_2, y_2），

因为 AB 既过 C_1 的右焦点 $F(1,0)$，又是过 C_2 的焦点 $F'(\frac{2}{3},m)$，

所以 $|AB|=(x_1+\frac{p}{2})+(x_2+\frac{p}{2})=x_1+x_2+p=(2-\frac{1}{2}x_1)+(2-\frac{1}{2}x_2)$.

即 $x_1+x_2=\frac{2}{3}(4-p)=\frac{16}{9}$. ……①

由（Ⅰ）知 $x_1\neq x_2$，于是直线 AB 的斜率 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{m-0}{\frac{2}{3}-1}=3m$， ……②

且直线 AB 的方程是 $y=-3m(x-1)$，

所以 $y_1+y_2=-3m(x_1+x_2-2)=\frac{2m}{3}$. ……③

又因为 $\begin{cases} 3x_1^2+4y_1^2=12 \\ 3x_2^2+4y_2^2=12 \end{cases}$，所以 $3(x_1+x_2)+4(y_1+y_2)\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=0$. ……④

将①、②、③代入④得$m^2=\dfrac{2}{3}$，即$m=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$或$m=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

当$m=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$时，直线AB的方程为$y=-\sqrt{6}(x-1)$；

当$m=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$时，直线AB的方程为$y=\sqrt{6}(x-1)$.