

## 1993 年黑龙江高考理科数学真题及答案

一、选择题（共 17 小题，每小题 4 分，满分 68 分）

1. (4 分) 函数  $f(x) = \sin x + \cos x$  的最小正周期是 ( )

- A.  $2\pi$                       B.  $2\sqrt{2}\pi$                       C.  $\pi$                       D.  $\frac{\pi}{4}$

2. (4 分) 如果双曲线的焦距为 6，两条准线间的距离为 4，那么该双曲线的离心率为 ( )

- A.  $\frac{3}{2}$                       B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       C.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$                       D. 2

3. (4 分) (2012·北京模拟) 和直线  $3x - 4y + 5 = 0$  关于  $x$  轴对称的直线的方程为 ( )

- A.  $3x + 4y - 5 = 0$                       B.  $3x + 4y + 5 = 0$                       C.  $-3x + 4y - 5 = 0$                       D.  $-3x + 4y + 5 = 0$

4. (4 分) 极坐标方程  $\rho = \frac{4}{3 - 5\cos\theta}$  所表示的曲线是 ( )

- A. 焦点到准线距                      B. 焦点到准线距  
离为  $\frac{4}{5}$  的椭圆                      离为  $\frac{4}{5}$  的双曲线  
右支
- C. 焦点到准线距                      D. 焦点到准线距  
离为  $\frac{4}{3}$  的椭圆                      离为  $\frac{4}{3}$  的双曲线  
右支

5. (4 分)  $y = x^{\frac{3}{5}}$  在  $[-1, 1]$  上是 ( )

- A. 增函数且是奇函数                      B. 增函数且是偶函数
- C. 减函数且是奇函数                      D. 减函数且是偶函数

6. (4 分)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 1}{2n^2 - n + 5}$  的值为 ( )

- A.  $-\frac{1}{5}$                       B.  $-\frac{5}{2}$                       C.  $\frac{1}{5}$                       D.  $\frac{5}{2}$

7. (4 分) (2002·广东) 设集合  $M = \{x | x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $N = \{x | x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ , 则 ( )

- A.  $M = N$                       B.  $M \subset N$                       C.  $M \supset N$                       D.  $M \cap N = \Phi$

8. (4 分)  $\sin 20^\circ \cos 70^\circ + \sin 10^\circ \sin 50^\circ$  的值是 ( )

- A.  $\frac{1}{4}$                       B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

9. (4分) 参数方程 
$$\begin{cases} x = |\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}| \\ y = \frac{1}{2}(1 + \sin \theta) \end{cases} \quad (0 < \theta < 2\pi)$$
 表示 ( )

A. 双曲线的一支, B. 抛物线的一部分  
这支过点 (1,  $\frac{1}{2}$ ) 分, 这部分过

(1,  $\frac{1}{2}$ ) (1,  $\frac{1}{2}$ )

C. 双曲线的一支, D. 抛物线的一部分  
这支过点 (-1,  $\frac{1}{2}$ ) 分, 这部分过

(-1,  $\frac{1}{2}$ ) (-1,  $\frac{1}{2}$ )

10. (4分) 若 a、b 是任意实数, 且  $a > b$ , 则 ( )

A.  $a^2 > b^2$  B.  $\frac{b}{a} < 1$  C.  $\lg(a-b) > 0$  D.  $(\frac{1}{2})^a < (\frac{1}{2})^b$

11. (4分) 一动圆与两圆  $x^2 + y^2 = 1$  和  $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$  都外切, 则动圆圆心轨迹为 ( )

A. 圆 B. 椭圆 C. 双曲线的一支 D. 抛物线

12. (4分) 圆柱轴截面的周长 1 为定值, 那么圆柱体积的最大值是 ( )

A.  $(\frac{1}{6})^3 \pi$  B.  $\frac{1}{9} (\frac{1}{2})^3 \pi$  C.  $(\frac{1}{4})^3 \pi$  D.  $2 (\frac{1}{4})^3 \pi$

13. (4分)  $(\sqrt{x}+1)^4 (x-1)^5$  展开式中  $x^4$  的系数为 ( )

A. -40 B. 10 C. 40 D. 45

14. (4分) 直角梯形的一个内角为  $45^\circ$ , 下底长为上底长的  $\frac{3}{2}$ , 这个梯形绕下底所在的直线旋转一周所成的旋转体的

全面积为  $(5 + \sqrt{2})\pi$ , 则旋转体的体积为 ( )

A.  $2\pi$  B.  $\frac{4 + \sqrt{2}}{3} \pi$  C.  $\frac{5 + \sqrt{2}}{3} \pi$  D.  $\frac{7}{3} \pi$

15. (4分) 已知  $a_1, a_2, \dots, a_8$  为各项都大于零的等比数列, 公式  $q \neq 1$ , 则 ( )

A.  $a_1 + a_8 > a_4 + a_5$

B.  $a_1 + a_8 < a_4 + a_5$

C.  $a_1 + a_8 = a_4 + a_5$

D.  $a_1 + a_8$  和  $a_4 + a_5$  的大小关系不能由已知条件确定

16. (4分) (2014·黄山一模) 设有如下三个命题:

甲: 相交直线 l、m 都在平面  $\alpha$  内, 并且都不在平面  $\beta$  内;

乙: 直线 l、m 中至少有一条与平面  $\beta$  相交;

丙: 平面  $\alpha$  与平面  $\beta$  相交.

当甲成立时 ( )

A. 乙是丙的充分而不必要条件

B. 乙是丙的必要而不充分条件

C. 乙是丙的充分且必要条件

D. 乙既不是丙的充分条件又不是丙的必要条件

17. (4分) 将数字 1, 2, 3, 4 填入标号为 1, 2, 3, 4 的四个方格里, 每格填一个数字, 则每个方格的标号与所填的数字均不相同的填法有 ( )

- A. 6 种      B. 9 种      C. 11 种      D. 23 种

二、填空题 (共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分)

18. (4分)  $\sin(\arccos \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{3}) =$  \_\_\_\_\_.

19. (4分) 若双曲线  $\frac{x^2}{9k^2} - \frac{y^2}{4k^2} = 1$  与圆  $x^2 + y^2 = 1$  没有公共点, 则实数 k 的取值范围为 \_\_\_\_\_.

20. (4分) 从 1, 2, ..., 10 这十个数中取出四个数, 使它们的和为奇数, 共有 \_\_\_\_\_ 种取法 (用数字作答).

21. (4分) 设  $f(x) = 4^x - 2^{x+1}$ , 则  $f^{-1}(0) =$  \_\_\_\_\_.

22. (4分) 建造一个容积为  $8m^3$ , 深为 2m 的长方体无盖水池, 如果池底和池壁的造价每平方米分别为 120 元和 80 元, 则水池的最低造价为 \_\_\_\_\_.

23. (4分) 如图, ABCD 是正方形, E 是 AB 的中点, 如将  $\triangle DAE$  和  $\triangle CBE$  分别沿虚线 DE 和 CE 折起, 使 AE 与 BE 重合, 记 A 与 B 重合后的点为 P, 则面 PCD 与面 ECD 所成的二面角为 \_\_\_\_\_ 度.



三、解答题 (共 5 小题, 满分 58 分)

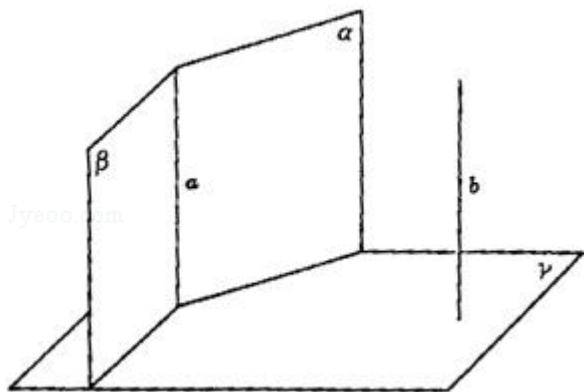
24. (10分) 已知  $f(x) = \log_a \frac{1+x}{1-x}$  ( $a > 0, a \neq 1$ ).

- (1) 求  $f(x)$  的定义域;
- (2) 判断  $f(x)$  的奇偶性并予以证明;
- (3) 求使  $f(x) > 0$  的  $x$  取值范围.

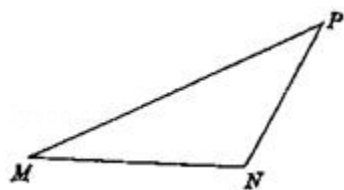
25. (12分) 已知数列  $\frac{8 \cdot 1}{1^2 \cdot 3^2}, \frac{8 \cdot 2}{3^2 \cdot 5^2}, \dots, \frac{8n}{(2n-1)^2 (2n+1)^2}, \dots$ .  $S_n$  为其前  $n$  项和. 计算得

$S_1 = \frac{8}{9}, S_2 = \frac{24}{25}, S_3 = \frac{48}{49}, S_4 = \frac{80}{81}$ . 观察上述结果, 推测出计算  $S_n$  的公式, 并用数学归纳法加以证明.

26. (12分) 已知: 平面  $\alpha \cap$  平面  $\beta =$  直线  $a$ .  $\alpha, \beta$  同垂直于平面  $\gamma$ , 又同平行于直线  $b$ . 求证: (1)  $a \perp \gamma$ ; (2)  $b \perp \gamma$ .



27. (12分) 在面积为1的 $\triangle PMN$ 中,  $\tan \angle PMN = \frac{1}{2}$ ,  $\tan \angle MNP = -2$ . 建立适当的坐标系, 求以M, N为焦点且过点P的椭圆方程.



28. (12分) 设复数  $z = \cos \theta + i \sin \theta$  ( $0 < \theta < \pi$ ),  $\omega = \frac{1 - (\bar{z})^4}{1 + z^4}$ , 并且  $|\omega| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $\arg \omega < \frac{\pi}{2}$ , 求  $\theta$ .

一、选择题（共 17 小题，每小题 4 分，满分 68 分）

1. （4 分）函数  $f(x) = \sin x + \cos x$  的最小正周期是（ ）

- A.  $2\pi$                       B.  $2\sqrt{2}\pi$                       C.  $\pi$                       D.  $\frac{\pi}{4}$

考点：三角函数中的恒等变换应用.

分析：把三角函数式整理变形，变为  $f(x) = A\sin(\omega x + \phi)$  的形式，再用周期公式求出周期，变形时先提出  $\sqrt{2}$ ，式子中就出现两角和的正弦公式，公式逆用，得到结论.

解答：解： $\because f(x) = \sin x + \cos x$   
 $= \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right)$   
 $= \sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right),$   
 $\therefore T = 2\pi,$

故选 A

点评：本题关键是逆用公式，抓住公式的结构特征对提高记忆公式起到至关重要的作用，而且抓住了公式的结构特征，有利于在解题时观察分析题设和结论等三角函数式中所具有的相似性的结构特征，联想到相应的公式，从而找到解题的切入点.

2. （4 分）如果双曲线的焦距为 6，两条准线间的距离为 4，那么该双曲线的离心率为（ ）

- A.  $\frac{3}{2}$                       B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       C.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$                       D. 2

考点：双曲线的简单性质.

专题：计算题.

分析：由双曲线的焦距为 6，两条准线间的距离为 4，能求出  $a, c$ ，从而得到该双曲线的离心率.

解答：解：由题意知  $2c = 6, \frac{2a^2}{c} = 4,$   
 $\therefore a^2 = 6, c = 3,$   
 $\therefore e = \frac{\sqrt{6}}{2}.$

故选 C.

点评：本题考查双曲线的离心率、准线方程、焦距，要求熟练掌握双曲线的性质.

3. （4 分）（2012•北京模拟）和直线  $3x - 4y + 5 = 0$  关于  $x$  轴对称的直线的方程为（ ）

- A.  $3x + 4y - 5 = 0$       B.  $3x + 4y + 5 = 0$       C.  $-3x + 4y - 5 = 0$       D.  $-3x + 4y + 5 = 0$

考点：与直线关于点、直线对称的直线方程.

分析：求出和直线  $3x - 4y + 5 = 0$  关于  $x$  轴对称的直线的斜率，再求出直线  $3x - 4y + 5 = 0$  和  $x$  轴的交点，可求答案.

解答：解：和直线  $3x - 4y + 5 = 0$  关于  $x$  轴对称的直线，其斜率与直线  $3x - 4y + 5 = 0$  的斜率相反，  
 设所求直线为  $3x + 4y + b = 0$ ，两直线在  $x$  轴截距相等，所以所求直线是  $3x + 4y + 5 = 0$ .

故选 B.

点评：本题是直线的对称问题，一般要用垂直平分解答；本题方法较多，由于对称轴是坐标轴，所以借助斜率，比较简单.





点评： 本题主要考查幂函数的图象与性质，幂函数是重要的基本初等函数模型之一。学习幂函数重点是掌握幂函数的图形特征，即图象语言，熟记幂函数的图象、性质。

6. (4分)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 1}{2n^2 - n + 5}$  的值为 ( )

- A.  $-\frac{1}{5}$       B.  $-\frac{5}{2}$       C.  $\frac{1}{5}$       D.  $\frac{5}{2}$

考点： 极限及其运算。

专题： 计算题。

分析：

分子分母都除以  $n^2$ ，原式简化为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}$ ，由此可得到  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 1}{2n^2 - n + 5}$  的值。

解答：

$$\text{解： } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 1}{2n^2 - n + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}} = \frac{5}{2}.$$

点评： 本题考查数列的极限，解题时要注意正确选用公式。

7. (4分) (2002·广东) 设集合  $M = \{x | x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in Z\}$ ,  $N = \{x | x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in Z\}$ , 则 ( )

- A.  $M=N$       B.  $M \subset N$       C.  $M \supset N$       D.  $M \cap N = \Phi$

考点： 集合的包含关系判断及应用。

分析： 从元素满足的公共属性的结构入手，首先对集合 N 中的 k 分奇数和偶数讨论，易得两集合的关系。

解答：

$$\text{解： 当 } k=2m \text{ (为偶数) 时, } N = \{x | x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in Z\} = \{x | x = \frac{m}{2} + \frac{1}{2}, m \in Z\}$$

$$\text{当 } k=2m-1 \text{ (为奇数) 时, } N = \{x | x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in Z\} = \{x | x = \frac{m}{2} + \frac{1}{4}, m \in Z\} = M$$

$$\therefore M \subset N$$

故选 B

点评： 本题主要考查集合表示方法中的描述法。

8. (4分)  $\sin 20^\circ \cos 70^\circ + \sin 10^\circ \sin 50^\circ$  的值是 ( )

- A.  $\frac{1}{4}$       B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       C.  $\frac{1}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

考点: 三角函数中的恒等变换应用.  
 分析: 从题目的结构形式来看, 本题是要逆用两角和或差的正弦余弦公式, 但是题目又不完全符合, 因此有一个整理的过程, 整理发现, 刚才直观的认识不准确, 要前后两项都用积化和差, 再合并同类项.  
 解答: 解: 原式 $=\frac{1}{2}[\sin 90^{\circ}-\sin 50^{\circ}]-\frac{1}{2}[\cos 60^{\circ}-\cos 40^{\circ}]$   
 $=\frac{1}{2}-\frac{1}{2} \sin 50^{\circ}-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \cos 40^{\circ}$   
 $=\frac{1}{4}$   
 故选 A  
 点评: 在解题时观察分析题设和结论等三角函数式中所具有的相似性的结构特征, 联想到相应的公式, 从而找到解题的切入点. 本题开始考虑时差点出错, 这是解题时好多同学要经历的过程.

9. (4分) 参数方程  $\begin{cases} x=|\cos \frac{\theta}{2}+\sin \frac{\theta}{2}| \\ y=\frac{1}{2}(1+\sin \theta) \end{cases} (0<\theta<2\pi)$  表示 ( )

- A. 双曲线的一支, B. 抛物线的一部分, 这支过点  $(1, \frac{1}{2})$   
 C. 双曲线的一支, D. 抛物线的一部分, 这支过点  $(-1, \frac{1}{2})$

考点: 参数方程化成普通方程.  
 专题: 计算题.  
 分析: 将参数方程化为普通方程, 然后再对 A、B、C、D 进行判断;  
 解答: 解:  $\because x=|\cos \frac{\theta}{2}+\sin \frac{\theta}{2}|, \therefore x^2=1+\sin \theta,$   
 $\therefore y=\frac{1}{2}(1+\sin \theta),$   
 $\therefore y=\frac{1}{2}x^2,$  是抛物线;  
 当  $x=1$  时,  $y=\frac{1}{2}$ ;  
 故选 B.

点评: 此题考查参数方程与普通方程的区别和联系, 两者要会互相转化, 根据实际情况选择不同的方程进行求解, 这也是每年高考必考的热点问题.

10. (4分) 若 a、b 是任意实数, 且  $a>b$ , 则 ( )  
 A.  $a^2>b^2$       B.  $\frac{b}{a}<1$       C.  $\lg(a-b)>0$       D.  $(\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b$

考点: 不等式比较大小.  
 专题: 综合题.  
 分析: 由题意可知  $a>b$ , 对于选项 A、B、C 举出反例判定即可.  
 解答: 解: a、b 是任意实数, 且  $a>b$ , 如果  $a=0, b=-2$ , 显然 A 不正确;

如果  $a=0$ ,  $b=-2$ , 显然 B 无意义, 不正确;

如果  $a=0$ ,  $b=-\frac{1}{2}$ , 显然 C,  $\lg\frac{1}{2}>0$ , 不正确;

$(\frac{1}{2})^a < (\frac{1}{2})^b$  满足指数函数的性质, 正确.

故选 D.

点评: 本题考查比较大小的方法, 考查各种代数式的意义和性质, 是基础题.

11. (4分) 一动圆与两圆  $x^2+y^2=1$  和  $x^2+y^2-8x+12=0$  都外切, 则动圆圆心轨迹为 ( )

- A. 圆                      B. 椭圆                      C. 双曲线的一支                      D. 抛物线

考点: 双曲线的定义.

专题: 计算题.

分析: 设动圆 P 的半径为  $r$ , 然后根据  $\odot P$  与  $\odot O: x^2+y^2=1$ ,  $\odot F: x^2+y^2-8x+12=0$  都外切得  $|PF|=2+r$ 、 $|PO|=1+r$ , 再两式相减消去参数  $r$ , 则满足双曲线的定义, 问题解决.

解答: 解: 设动圆的圆心为 P, 半径为  $r$ ,

而圆  $x^2+y^2=1$  的圆心为  $O(0, 0)$ , 半径为 1;

圆  $x^2+y^2-8x+12=0$  的圆心为  $F(4, 0)$ , 半径为 2.

依题意得  $|PF|=2+r$ ,  $|PO|=1+r$ ,

则  $|PF| - |PO| = (2+r) - (1+r) = 1 < |FO|$ ,

所以点 P 的轨迹是双曲线的一支.

故选 C.

点评: 本题主要考查双曲线的定义.

12. (4分) 圆柱轴截面的周长  $l$  为定值, 那么圆柱体积的最大值是 ( )

- A.  $(\frac{1}{6})^3 \pi$                       B.  $\frac{1}{9} (\frac{1}{2})^3 \pi$                       C.  $(\frac{1}{4})^3 \pi$                       D.  $2 (\frac{1}{4})^3 \pi$

考点: 旋转体 (圆柱、圆锥、圆台).

专题: 计算题; 综合题.

分析: 设出圆柱的底面半径和高, 求出体积表达式, 通过求导求出体积的最大值.

解答: 解: 圆柱底面半径  $R$ , 高  $H$ , 圆柱轴截面的周长  $L$  为定值:

$$4R+2H=L,$$

$$H=\frac{L}{2}-2R,$$

$$V=SH=\pi R^2H=\pi R^2(\frac{L}{2}-2R)=\pi R^2\frac{L}{2}-2\pi R^3$$

求导:

$$V'=\pi RL-6\pi R^2 \text{ 令 } V'=0,$$

$$\pi RL-6\pi R^2=0,$$

$$\pi R(L-6R)=0,$$

$$L-6R=0,$$

$$R=\frac{L}{6},$$

$$\text{当 } R=\frac{L}{6},$$

圆柱体积的有最大值, 圆柱体积的最大值是:

$$V=\pi R^2\frac{L}{2}-2\pi R^3=(\frac{1}{6})^3 \pi$$

故选 A.

点评: 本题考查旋转体的体积, 导数的应用, 是中档题.

13. (4分)  $(\sqrt{x}+1)^4(x-1)^5$  展开式中  $x^4$  的系数为 ( )  
A. -40      B. 10      C. 40      D. 45

考点: 二项式定理的应用.

专题: 计算题.

分析: 先将展开式的系数转化成几个二项展开式系数乘积的和, 再利用二项展开式的通项公式求出各个二项式的系数.

解答: 解:  $(\sqrt{x}+1)^4(x-1)^5$  展开式中  $x^4$  的系数是下列几部分的和:

$(\sqrt{x}+1)^4$  的常数项与  $(x-1)^5$  展开式的含  $x^4$  的项的系数的乘积

$(\sqrt{x}+1)^4$  含  $x$  项的系数与  $(x-1)^5$  展开式的含  $x^3$  的项的系数的乘积

$(\sqrt{x}+1)^4$  含  $x^2$  项的系数与  $(x-1)^5$  展开式的含  $x^2$  的项的系数的乘积

$\therefore (\sqrt{x}+1)^4$  展开式的通项为  $T_{r+1} = C_4^r x^{\frac{r}{2}}$

$(x-1)^5$  展开式的通项为  $T_{k+1} = C_5^r x^{5-r} (-1)^r = (-1)^r C_5^r x^{5-r}$

$\therefore (\sqrt{x}+1)^4(x-1)^5$  展开式中  $x^4$  的系数为  $C_4^0(-C_5^1) + C_4^2 C_5^2 + C_4^4(-C_5^3) = 45$

故选项为 D

点评: 本题考查数学的等价转化的能力和二项展开式的通项公式的应用.

14. (4分) 直角梯形的一个内角为  $45^\circ$ , 下底长为上底长的  $\frac{3}{2}$ , 这个梯形绕下底所在的直线旋转一周所成的旋转体的全面积为  $(5+\sqrt{2})\pi$ , 则旋转体的体积为 ( )  
A.  $2\pi$       B.  $\frac{4+\sqrt{2}}{3}\pi$       C.  $\frac{5+\sqrt{2}}{3}\pi$       D.  $\frac{7}{3}\pi$

考点: 旋转体(圆柱、圆锥、圆台).

专题: 计算题.

分析: 由题意可知, 这个几何体的面积是圆柱中一个圆加一个长方形加一个扇形的面积, 而这个几何体的体积是一个圆锥加一个同底圆柱的体积. 再根据题目中的条件求解即可.

解答: 解: 这个几何体的面积是圆柱中一个圆加一个长方形加一个扇形的面积, 圆的面积, 直角腰为半径, 长方形的面积, 圆的周长为长, 上底为宽, 扇形的面积, 圆的周长为弧长, 另一腰则为扇形的半径.

设上底为  $x$ , 则下底为  $\frac{3}{2}x$ , 直角腰为  $\frac{1}{2}x$ , 另一腰为整个面积式子为

$$\frac{1}{4}\pi x^2 + \pi x^2 + \sqrt{2} \times \frac{1}{4}\pi x^2 = (5+\sqrt{2})\pi,$$

解得  $x = \pm 2$ , 因为  $x > 0$ , 所以  $x = -2$  舍去,  $x = 2$ . 而这个几何体的体积是一个圆锥加一个同底圆柱的体积, 圆锥的高, 下底减上底得圆锥的高为 1,

$$\text{圆柱体积} = Sh = \frac{1}{2}\pi r^2 h = \pi \times 1^2 \times 2 = 2\pi, \text{圆锥体积} = \frac{1}{3}\pi$$

所以整个几何体的体积为 $\frac{7}{3}\pi$ .

故选 D.

点评: 本题考查学生的空间想象能力, 和逻辑思维能力, 等量之间的转换, 是中档题.

15. (4分) 已知  $a_1, a_2, \dots, a_8$  为各项都大于零的等比数列, 公式  $q \neq 1$ , 则 ( )

- A.  $a_1+a_8 > a_4+a_5$
- B.  $a_1+a_8 < a_4+a_5$
- C.  $a_1+a_8 = a_4+a_5$
- D.  $a_1+a_8$  和  $a_4+a_5$  的大小关系不能由已知条件确定

考点: 等比数列.

分析: 用作差法比较即可.

解答: 解:  $a_1+a_8 - (a_4+a_5)$   
 $= a_1(1+q^7 - q^3 - q^4)$   
 $= a_1(1+q)(q^2+q+1)(q-1)^2(1+q^2)$   
又  $\because a_1 > 0, a_1, a_2, \dots, a_8$  为各项都大于零的等比数列  
 $\therefore q > 0$   
 $\therefore a_1+a_8 - (a_4+a_5) > 0$   
故选 A

点评: 本题考查比较法和等比数列通项公式的应用.

16. (4分) (2014•黄山一模) 设有如下三个命题:

甲: 相交直线  $l, m$  都在平面  $\alpha$  内, 并且都不在平面  $\beta$  内;

乙: 直线  $l, m$  中至少有一条与平面  $\beta$  相交;

丙: 平面  $\alpha$  与平面  $\beta$  相交.

当甲成立时 ( )

- A. 乙是丙的充分而不必要条件
- B. 乙是丙的必要而不充分条件
- C. 乙是丙的充分且必要条件
- D. 乙既不是丙的充分条件又不是丙的必要条件

考点: 空间中直线与平面之间的位置关系; 充要条件.

专题: 证明题; 压轴题.

分析: 判断乙是丙的什么条件, 即看  $乙 \Rightarrow 丙$ 、 $丙 \Rightarrow 乙$  是否成立. 当乙成立时, 直线  $l, m$  中至少有一条与平面  $\beta$  相交, 则平面  $\alpha$  与平面  $\beta$  至少有一个公共点, 故相交. 反之丙成立时, 若  $l, m$  中至少有一条与平面  $\beta$  相交, 则  $l \parallel m$ , 由已知矛盾, 故乙成立.

解答: 解: 当甲成立, 即“相交直线  $l, m$  都在平面  $\alpha$  内, 并且都不在平面  $\beta$  内”时, 若“ $l, m$  中至少有一条与平面  $\beta$  相交”, 则“平面  $\alpha$  与平面  $\beta$  相交”成立; 若“平面  $\alpha$  与平面  $\beta$  相交”, 则“ $l, m$  中至少有一条与平面  $\beta$  相交”也成立  
故选 C.

点评: 本题考查空间两条直线、两个平面的位置关系判断、充要条件的判断, 考查逻辑推理能力.

17. (4分) 将数字 1, 2, 3, 4 填入标号为 1, 2, 3, 4 的四个方格里, 每格填一个数字, 则每个方格的标号与所填的数字均不相同的填法有 ( )

- A. 6 种
- B. 9 种
- C. 11 种
- D. 23 种

考点：排列、组合及简单计数问题.  
 专题：计算题；压轴题.  
 分析：首先计算4个数字填入4个空格的所有情况，进而分析计算四个数字全部相同，有1个数字相同的情况，有2个数字相同情况，有3个数字相同的情况数目，由事件间的相互关系，计算可得答案.  
 解答：解：根据题意，数字1, 2, 3, 4填入标号为1, 2, 3, 4的四个方格里，共  $A_4^4=24$  种填法，其中，四个数字全部相同的有1种，有1个数字相同的有  $4 \times 2=8$  种情况，有2个数字相同的有  $C_4^2 \times 1=6$  种情况，有3个数字相同的情况不存在，则每个方格的标号与所填的数字均不相同的填法有  $24 - 1 - 8 - 6=9$  种，故选B.  
 点评：本题考查排列、组合的运用，注意此类题目的操作性很强，必须实际画图操作，认真分析.

二、填空题（共6小题，每小题4分，满分24分）

18. (4分)  $\sin(\arccos\frac{1}{2} + \arccos\frac{1}{3}) = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6}$ .

考点：任意角的三角函数的定义.  
 专题：计算题.  
 分析：利用两角和正弦公式展开，利用反三角函数值的求法，即可求出答案  
 解答：解： $\sin(\arccos\frac{1}{2} + \arccos\frac{1}{3}) = \sin(\arccos\frac{1}{2}) \cos(\arccos\frac{1}{3}) + \cos(\arccos\frac{1}{2}) \sin(\arccos\frac{1}{3}) = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6}$   
 故答案为： $\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6}$

点评：本题考查三角函数求值，不过学生对反三角函数不是很理解，希望学生能抓住实质，加大训练量.

19. (4分) 若双曲线  $\frac{x^2}{9k^2} - \frac{y^2}{4k^2} = 1$  与圆  $x^2 + y^2 = 1$  没有公共点，则实数k的取值范围为  $\{k \mid k > \frac{1}{3} \text{ 或 } k < -\frac{1}{3}\}$ .

考点：双曲线的简单性质.  
 专题：计算题.  
 分析：由双曲线  $\frac{x^2}{9k^2} - \frac{y^2}{4k^2} = 1$  与圆  $x^2 + y^2 = 1$  没有公共点知圆半径的长小于双曲线的实半轴的长，由此可以求出实数k的取值范围.  
 解答：解： $\because$  双曲线  $\frac{x^2}{9k^2} - \frac{y^2}{4k^2} = 1$  与圆  $x^2 + y^2 = 1$  没有公共点，  
 $\therefore |3k| > 1, \therefore |k| > \frac{1}{3}$ .  
 解得  $k > \frac{1}{3}$  或  $k < -\frac{1}{3}$ .  
 实数k的取值范围为  $\{k \mid k > \frac{1}{3} \text{ 或 } k < -\frac{1}{3}\}$ .

答案为  $\{k \mid k > \frac{1}{3} \text{ 或 } k < -\frac{1}{3}\}$ .

点评: 熟练掌握圆和双曲线的图象和性质即可顺利求解.

20. (4分) 从 1, 2, ..., 10 这十个数中取出四个数, 使它们的和为奇数, 共有 100 种取法 (用数字作答).

考点: 组合及组合数公式; 排列、组合的实际应用.

分析: 根据题意, 将这 10 个数分为奇数与偶数两个组, 每组各 5 个数; 分析可得, 若取出的四个数的和为奇数, 则取出的四个数必有 1 个或 3 个奇数; 分别求出两种情况下的取法情况数, 相加可得答案.

解答: 解: 根据题意, 将这 10 个数分为奇数与偶数两个组, 每组各 5 个数;

若取出的四个数的和为奇数, 则取出的四个数必有 1 个或 3 个奇数;

若有 1 个奇数时, 有  $C_5^1 \cdot C_5^3 = 50$  种取法,

若有 3 个奇数时, 有  $C_5^3 \cdot C_5^1 = 50$  种取法,

故符合题意的取法共  $50+50=100$  种取法;

故答案为 100.

点评: 本题考查利用组合解决常见计数问题的方法, 解本题时, 注意先分组, 进而由组合的方法, 结合乘法计数原理进行计算.

21. (4分) 设  $f(x) = 4^x - 2^{x+1}$ , 则  $f^{-1}(0) = \underline{1}$ .

考点: 反函数.

专题: 计算题.

分析: 欲求  $f^{-1}(0)$ , 根据反函数的定义知, 只要求出使等式  $4^x - 2^{x+1} = 0$ , 成立的  $x$  的值即可.

解答: 解:  $\because 4^x - 2^{x+1} = 0$ ,

$2^x(2^x - 2) = 0$ ,  $\therefore 2^x - 2 = 0$

得:  $x = 1$ .

$\therefore f^{-1}(0) = 1$ .

故答案为 1.

点评: 本题主要考查了反函数的概念, 属于基础题之列.

22. (4分) 建造一个容积为  $8m^3$ , 深为 2m 的长方体无盖水池, 如果池底和池壁的造价每平方米分别为 120 元和 80 元, 则水池的最低造价为

1760.

考点: 函数模型的选择与应用.

专题: 应用题; 压轴题.

分析: 欲求水池的最低造价, 先设长  $x$ , 则宽  $\frac{4}{x}$ , 列出总造价, 是一个关于  $x$  的函数式, 最后利用基本不等式求出此函数式的最小值即可.

解答: 解: 设长  $x$ , 则宽  $\frac{4}{x}$ , 造价  $y = 4 \times 120 + 4x \times 80 + \frac{16}{x} \times 80 \geq 1760$ ,

当且仅当:  $4x \times 80 = \frac{16}{x} \times 80$ , 即  $x = 2$  时取等号.

故答案为: 1760.

点评: 本小题主要考查函数模型的选择与应用, 属于基础题. 解决实际问题通常有四个步骤: (1) 阅读理解, 认真审题; (2) 引进数学符号, 建立数学模型; (3) 利用数学的方法, 得到数学结果; (4) 转译成具体问题作出解答, 其中关键是建立数学模型.

23. (4分) 如图, ABCD 是正方形, E 是 AB 的中点, 如将  $\triangle DAE$  和  $\triangle CBE$  分别沿虚线 DE 和 CE 折起, 使 AE 与 BE 重合, 记 A 与 B 重合后的点为 P, 则面 PCD 与面 ECD 所成的二面角为 30 度.



考点: 与二面角有关的立体几何综合题.

专题: 计算题; 压轴题.

分析: 二面角的度量关键在于作出它的平面角, 取 CD 的中点 M, 连接 PM、EM, 因为  $PD=PC$ , 所以  $PM \perp CD$ ; 同理因为  $ED=EC$ , 所以  $EM \perp CD$ , 故  $\angle PME$  即为面 PCD 与面 ECD 所成二面角的平面角.

解答: 解: 设正方形的边长为 2,

取 CD 的中点 M, 连接 PM、EM,

$\because PD=PC$ ,

$\therefore PM \perp CD$

$\because ED=EC$ ,

$\therefore EM \perp CD$

故  $\angle PME$  即为面 PCD 与面 ECD 所成二面角的平面角.

在  $\triangle PME$  中:  $PE=1$ ,  $PM=\sqrt{3}$ ,  $EM=2$ ,

$$\therefore \cos \angle PME = \frac{PM^2 + ME^2 - PE^2}{2PM \cdot ME} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore \angle PME = 30^\circ$

故答案为: 30.

点评: 本小题主要考查棱锥的结构特征, 二面角和线面关系等基本知识, 同时考查空间想象能力和推理、运算能力.

### 三、解答题 (共 5 小题, 满分 58 分)

24. (10分) 已知  $f(x) = \log_a \frac{1+x}{1-x}$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ).

(1) 求  $f(x)$  的定义域;

(2) 判断  $f(x)$  的奇偶性并予以证明;

(3) 求使  $f(x) > 0$  的  $x$  取值范围.

考点: 对数函数的定义域; 函数奇偶性的判断.

分析: (1) 求对数函数的定义域, 只要真数大于 0 即可, 转化为解分式不等式.

(2) 利用奇偶性的定义, 看  $f(-x)$  和  $f(x)$  的关系, 注意到  $\frac{1+x}{1-x}$  和  $\frac{1-x}{1+x}$  互为倒数, 其对数值互为相反数;

数;

也可计算  $f(-x) + f(x) = 0$  得到.

(3) 有对数函数的图象可知, 要使  $f(x) > 0$ , 需分  $a > 0$  和  $a < 0$  两种境况讨论.

解答:

解: (1) 由对数函数的定义知  $\frac{1+x}{1-x} > 0$ . 如果  $\begin{cases} 1+x > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}$ , 则  $-1 < x < 1$ ;

如果  $\begin{cases} 1+x < 0 \\ 1-x < 0 \end{cases}$ , 则不等式组无解. 故  $f(x)$  的定义域为  $(-1, 1)$

$$(2) \because f(-x) = \log_a \frac{1-x}{1+x} = -\log_a \frac{1+x}{1-x} = -f(x),$$

$\therefore f(x)$  为奇函数.

$$(3) (i) \text{ 对 } a > 1, \log_a \frac{1+x}{1-x} > 0 \text{ 等价于 } \frac{1+x}{1-x} > 1, \textcircled{1}$$

而从 (1) 知  $1-x > 0$ , 故  $\textcircled{1}$  等价于  $1+x > 1-x$ , 又等价于  $x > 0$ . 故对  $a > 1$ , 当  $x \in (0, 1)$  时有  $f(x) > 0$ . (ii) 对  $0 < a < 1$ ,  $\log_a \frac{1+x}{1-x} > 0$  等价于

$$0 < \frac{1+x}{1-x} < 1. \textcircled{2}$$

而从 (1) 知  $1-x > 0$ , 故  $\textcircled{2}$  等价于  $-1 < x < 0$ . 故对  $0 < a < 1$ , 当  $x \in (-1, 0)$  时有  $f(x) > 0$ .

点评:

本题考查对数函数的性质: 定义域、奇偶性、单调性等知识, 难度一般.

25. (12分) 已知数列  $\frac{8 \cdot 1}{1^2 \cdot 3^2}, \frac{8 \cdot 2}{3^2 \cdot 5^2}, \dots, \frac{8n}{(2n-1)^2 (2n+1)^2}, \dots$ .  $S_n$  为其前  $n$  项和. 计算得

$$S_1 = \frac{8}{9}, \quad S_2 = \frac{24}{25}, \quad S_3 = \frac{48}{49}, \quad S_4 = \frac{80}{81}. \text{ 观察上述结果, 推测出计算 } S_n \text{ 的公式, 并用数学归纳法加以证明.}$$

考点: 数列递推式; 数学归纳法.

专题: 证明题.

分析:

观察分析题设条件可知  $S_n = \frac{(2n+1)^2 - 1}{(2n+1)^2} \quad (n \in \mathbb{N})$ . 然后再用数学归纳法进行证明.

解答:

解: 观察分析题设条件可知  $S_n = \frac{(2n+1)^2 - 1}{(2n+1)^2} \quad (n \in \mathbb{N})$

证明如下: (1) 当  $n=1$  时,  $S_1 = \frac{3^2 - 1}{3^2} = \frac{8}{9}$ , 等式成立.

$$\begin{aligned} (II) \text{ 设当 } n=k \text{ 时等式成立, 即 } S_k &= \frac{(2k+1)^2 - 1}{(2k+1)^2}. \text{ 则 } S_{k+1} = S_k + \frac{8(k+1)}{(2k+1)^2 (2k+3)^2} \\ &= \frac{(2k+1)^2 - 1}{(2k+1)^2} + \frac{8(k+1)}{(2k+1)^2 (2k+3)^2} = \frac{[(2k+1)^2 - 1](2k+3)^2 + 8(k+1)}{(2k+1)^2 (2k+3)^2} \\ &= \frac{(2k+1)^2 (2k+3)^2 - (2k+3)^2 + 8(k+1)}{(2k+1)^2 (2k+3)^2} = \frac{(2k+1)^2 (2k+3)^2 - (2k+1)^2}{(2k+1)^2 (2k+3)^2} \\ &= \frac{(2k+3)^2 - 1}{(2k+3)^2} \cdot \frac{[2(k+1)+1]^2 - 1}{[2(k+1)+1]^2} \end{aligned}$$

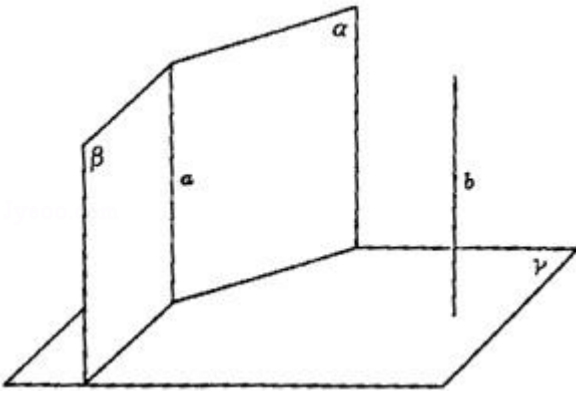
由此可知, 当  $n=k+1$  时等式也成立. 根据 (1) (2) 可知, 等式对任何  $n \in \mathbb{N}$  都成立

点评:

本题考查数列性质的综合应用, 解题时要注意数学归纳法的证明步骤, 注意培养计算能力.

26. (12分) 已知: 平面  $\alpha \cap$  平面  $\beta =$  直线  $a$ .  $\alpha, \beta$  同垂直于平面  $\gamma$ , 又同平行于直线  $b$ .

求证：(1)  $a \perp \gamma$ ；(2)  $b \perp \gamma$ 。



考点：直线与平面垂直的判定。

专题：证明题；压轴题。

分析：

(1) 在  $\gamma$  内任取一点  $P$  并于  $\gamma$  内作直线  $PM \perp AB$ ,  $PN \perp AC$ , 由面面垂直的性质得  $PM \perp \alpha$ ,  $PM \perp a$ ; 同理证明  $PN \perp a$ , 这样  $a$  垂直于面  $\gamma$  内的 2 条相交直线, 从而  $a \perp \gamma$ 。

(2) 通过  $\alpha$ ,  $\beta$  同垂直于平面  $\gamma$ , 又同平行于直线  $b$ , 利用线面平行的性质定理证明,  $b \parallel a$ , 由 (1) 知  $a \perp \gamma$ , 从而证得  $b \perp \gamma$ 。

解答：

证明：(1) 设  $\alpha \cap \gamma = AB$ ,  $\beta \cap \gamma = AC$ 。

在  $\gamma$  内任取一点  $P$  并于  $\gamma$  内作直线  $PM \perp AB$ ,  $PN \perp AC$ 。

$\because \gamma \perp \alpha$ ,

$\therefore PM \perp \alpha$ 。

而  $a \subset \alpha$ ,

$\therefore PM \perp a$ 。

同理  $PN \perp a$ 。又  $PM \subset \gamma$ ,  $PN \subset \gamma$ ,

$\therefore a \perp \gamma$ 。

(2) 于  $a$  上任取点  $Q$ , 过  $b$  与  $Q$  作一平面交  $\alpha$  于直线  $a_1$ , 交  $\beta$  于直线  $a_2$ 。  $\because b \parallel \alpha$ ,  $\therefore b \parallel a_1$ 。

同理  $b \parallel a_2$ 。  $\because a_1, a_2$  同过  $Q$  且平行于  $b$ ,

$\therefore a_1, a_2$  重合。

又  $a_1 \subset \alpha$ ,  $a_2 \subset \beta$ ,

$\therefore a_1, a_2$  都是  $\alpha, \beta$  的交线, 即都重合于  $a$ 。  $\because b \parallel a_1$ ,  $\therefore b \parallel a$ 。

而  $a \perp \gamma$ ,

$\therefore b \perp \gamma$ 。



点评：

本题考查证明线面垂直的证明方法。

27. (12分) 在面积为 1 的  $\triangle PMN$  中,  $\tan \angle PMN = \frac{1}{2}$ ,  $\tan \angle MNP = -2$ . 建立适当的坐标系, 求以  $M, N$  为焦点且过点  $P$  的椭圆方程.



考点：  
专题：  
分析：

椭圆的标准方程.

计算题；压轴题.

以 MN 所在直线为 x 轴，MN 的垂直平分线为 y 轴建立直角坐标系，设以 M，N 为焦点且过点 P 的椭圆方程和焦点坐标，根据  $\tan M = \frac{1}{2}$ ， $\tan \alpha = \tan(\pi - \angle MNP) = 2$ ，得直线 PM 和 PN 的直线方程，将此二方程联立解得 x 和 y，可知点 P 的坐标，根据， $|MN| = 2c$ ，MN 上的高为点 P 的纵坐标，根据三角形面积公式表示出  $\triangle MNP$  的面积求得 c，则点 P 的坐标可得. 由两点间的距离公式求得  $|PM|$  和  $|PN|$ ，进而根据椭圆的定义求得 a，进而求得 b，则椭圆方程可得.

解答：

解：如图，以 MN 所在直线为 x 轴，MN 的垂直平分线为 y 轴建立直角坐标系，

设以 M，N 为焦点且过点 P 的椭圆方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，

焦点为 M(-c, 0)，N(c, 0).

由  $\tan \angle PMN = \frac{1}{2}$ ， $\tan \angle MNP = -2$ ， $\tan \alpha = \tan(\pi - \angle MNP) = 2$ ，

得直线 PM 和直线 PN 的方程分别为  $y = \frac{1}{2}(x+c)$  和  $y = 2(x-c)$ .

将此二方程联立，解得  $x = \frac{5}{3}c$ ， $y = \frac{4}{3}c$ ，即 P 点坐标为  $(\frac{5}{3}c, \frac{4}{3}c)$ .

在  $\triangle MNP$  中， $|MN| = 2c$ ，MN 上的高为点 P 的纵坐标，故  $S_{\triangle MNP} = \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot \frac{4}{3}c = \frac{4}{3}c^2$ .

由题设条件  $S_{\triangle MNP} = 1$ ， $\therefore c = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，即 P 点坐标为  $(\frac{5\sqrt{3}}{6}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ .

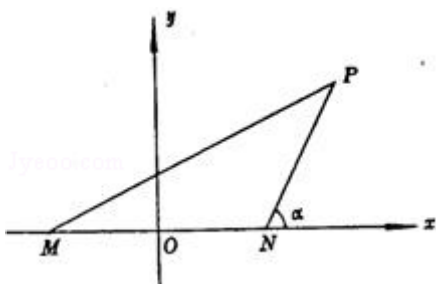
由两点间的距离公式  $|PM| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(\frac{5\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{2\sqrt{3}}{3})^2} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$ ，

$|PN| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(\frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{2\sqrt{3}}{3})^2} = \frac{\sqrt{15}}{3}$ .

得  $a = \frac{1}{2}(|PM| + |PN|) = \frac{\sqrt{15}}{2}$ .

又  $b^2 = a^2 - c^2 = \frac{15}{4} - \frac{3}{4} = 3$ ，

故所求椭圆方程为  $\frac{4x^2}{15} + \frac{y^2}{3} = 1$ .



点评: 本题主要考查坐标系、椭圆的概念和性质、直线方程以及综合应用能力.

28. (12分) 设复数  $z = \cos \theta + i \sin \theta$  ( $0 < \theta < \pi$ ),  $\omega = \frac{1 - (\bar{z})^4}{1 + z^4}$ , 并且  $|\omega| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $\arg \omega < \frac{\pi}{2}$ , 求  $\theta$ .

考点: 复数代数形式的混合运算.

专题: 压轴题.

分析: 化简  $\omega$ , 利用  $|\omega| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 求出  $\theta$  的三角函数值, 再用  $\arg \omega < \frac{\pi}{2}$ , 来验证  $\omega$ , 从而求出  $\theta$  的值.

解答:

$$\text{解法一 } \omega = \frac{1 - [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]^4}{1 + [\cos \theta + i \sin \theta]^4} = \frac{1 - \cos(-4\theta) - i \sin(-4\theta)}{1 + \cos 4\theta + i \sin 4\theta} =$$

$$\frac{2 \sin^2 2\theta + 2i \sin 2\theta \cos 2\theta}{2 \cos^2 2\theta + 2i \sin 2\theta \cos 2\theta} = \text{tg} 2\theta (\sin 4\theta + i \cos 4\theta)$$

$$\theta). |\omega| = |\text{tg} 2\theta| \cdot |\sin 4\theta + i \cos 4\theta| = |\text{tg} 2\theta| = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{tg} 2\theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

因  $0 < \theta < \pi$ , 故有

$$(i) \text{ 当 } \text{tg} 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 时, 得 } \theta = \frac{\pi}{12} \text{ 或 } \theta = \frac{7\pi}{12}, \text{ 这时都有 } \omega = \frac{\sqrt{3}}{3} (\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}),$$

得  $\arg \omega = \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$ , 适合题意.

$$(ii) \text{ 当 } \text{tg} 2\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 时, 得 } \theta = \frac{5\pi}{12} \text{ 或 } \theta = \frac{11\pi}{12}, \text{ 这时都有 } \omega = \frac{\sqrt{3}}{3} (\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}),$$

得  $\arg \omega = \frac{11\pi}{6} > \frac{\pi}{2}$ , 不适合题意, 舍去.

综合 (i)、(ii) 知  $\theta = \frac{\pi}{12}$  或  $\theta = \frac{7\pi}{12}$ .

解法二  $z^4 = \cos 4\theta + i \sin 4\theta$ .

$$\text{记 } \phi = 4\theta, \text{ 得 } (\bar{z})^4 = \overline{(z^4)} = \cos \phi - i \sin \phi. \omega = \frac{1 - \cos \phi + i \sin \phi}{1 + \cos \phi + i \sin \phi} = \frac{\sin \frac{\phi}{2}}{1 + \cos \frac{\phi}{2}} (\sin \frac{\phi}{2} + i \cos \frac{\phi}{2}) =$$

$$\text{tg} \frac{\phi}{2} (\sin \frac{\phi}{2} + i \cos \frac{\phi}{2}). \because |\omega| = \frac{\sqrt{3}}{3}, \arg \omega < \frac{\pi}{2},$$

①②③

$$\therefore \begin{cases} |\text{tg} \frac{\phi}{2}| = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \text{tg} \frac{\phi}{2} \cdot \sin \phi > 0 \\ \text{tg} \frac{\phi}{2} \cdot \cos \phi \geq 0 \end{cases}$$

当①成立时, ②恒成立, 所以  $\theta$  应满足

$$(i) \begin{cases} 0 < \theta < \pi \\ \text{tg} 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \cos 4\theta \geq 0 \end{cases}, \text{ 或 } (ii) \begin{cases} 0 < \theta < \pi \\ \text{tg} 2\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cos 4\theta \leq 0 \end{cases},$$

解 (i) 得  $\theta = \frac{\pi}{12}$  或  $\theta = \frac{7\pi}{12}$ . (ii) 无解.

综合 (i)、(ii)  $\theta = \frac{\pi}{12}$  或  $\theta = \frac{7\pi}{12}$ .

点评： 本题考查复数的基本概念和运算，三角函数式的恒等变形及综合解题能力；注意分类讨论思想的应用，难度较大.