

2005 年广西高考文科数学真题及答案

本试卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。第 I 卷 1 至 2 页，第 II 卷 3 至 10 页。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷

注意事项：

1. 答第 I 卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目涂写在答题卡上。
2. 每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。不能答在试题卷上。
3. 本卷共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

参考公式：

如果事件 A、B 互斥，那么

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

如果事件 A、B 相互独立，那么

$$P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)$$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是

P，那么 n 次独立重复试验中恰好发生 k

次的概率 $P_n(k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

一、选择题：

1. 函数 $f(x)=|\sin x+\cos x|$ 的最小正周期是 ()
A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. 2π
2. 正方体 ABCD—A₁B₁C₁D₁ 中，P、Q、R 分别是 AB、AD、B₁C₁ 的中点。那么，正方体的过 P、Q、R 的截面图形是 ()
A. 三角形 B. 四边形 C. 五边形 D. 六边形
3. 函数 $y = x^2 - 1(x \leq 0)$ 的反函数是 ()
A. $y = \sqrt{x+1}(x \geq -1)$ B. $y = -\sqrt{x+1}(x \geq -1)$
C. $y = \sqrt{x+1}(x \geq 0)$ D. $y = -\sqrt{x+1}(x \geq 0)$

4. 已知函数 $y = \tan \omega x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内是减函数, 则 ()
- A. $0 < \omega \leq 1$ B. $-1 \leq \omega < 0$ C. $\omega \geq 1$ D. $\omega \leq -1$
5. 抛物线 $x^2 = 4y$ 上一点 A 的纵坐标为 4, 则点 A 与抛物线焦点的距离为 ()
- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
6. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的渐近线方程是 ()
- A. $y = \pm \frac{2}{3}x$ B. $y = \pm \frac{4}{9}x$ C. $y = \pm \frac{3}{2}x$ D. $y = \pm \frac{9}{4}x$
7. 如果数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 则 ()
- A. $a_1 + a_8 < a_4 + a_5$ B. $a_1 + a_8 = a_4 + a_5$
- C. $a_1 + a_8 > a_4 + a_5$ D. $a_1 a_8 = a_4 a_5$
8. $(x - \sqrt{2}y)^{10}$ 的展开式中 $x^6 y^4$ 项的系数是 ()
- A. 840 B. -840 C. 210 D. -210
9. 已知点 A $(\sqrt{3}, 1)$, B $(0, 0)$ C $(\sqrt{3}, 0)$. 设 $\angle BAC$ 的平分线 AE 与 BC 相交于 E, 那么有 $\overrightarrow{BC} = \lambda \overrightarrow{CE}$, 其中 λ 等于 ()
- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. -3 D. $-\frac{1}{3}$
10. 已知集合 $M = \{x | -4 \leq x \leq 7\}$, $N = \{x | x^2 - x - 6 > 0\}$, 则 $M \cap N$ 为 ()
- A. $\{x | -4 \leq x < -2 \text{ 或 } 3 < x \leq 7\}$ B. $\{x | -4 < x \leq -2 \text{ 或 } 3 \leq x < 7\}$
- C. $\{x | x \leq x - 2 \text{ 或 } x > 3\}$ D. $\{x | x < x - 2 \text{ 或 } x \geq 3\}$
11. 点 P 在平面上作匀速直线运动, 速度向量 $v = (4, -3)$ 即点 P 的运动方向与 v 相同, 且每秒移动的距离为 $|v|$ 个单位. 设开始时点 P 的坐标为 $(-10, 10)$, 则 5 秒后点 P 的坐标为 ()
- A. $(-2, 4)$ B. $(-30, 25)$ C. $(10, -5)$ D. $(5, -10)$
12. $\triangle ABC$ 的顶点 B 在平面 α 内, A、C 在 α 的同一侧, AB、BC 与 α 所成的角分别是 30° 和 45° . 若 $AB=3$, $BC=4\sqrt{2}$, $AC=5$, 则 AC 与 α 所成的角为 ()
- A. 60° B. 45° C. 30° D. 15°

注意事项:

1. 用钢笔或圆珠笔直接答在试题卷中.
2. 答卷前将密封线内的项目填写清楚.
3. 本卷共 10 小题, 共 90 分.

二、填空题: (本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中横线上.)

13. 在 $\frac{8}{3}$ 和 $\frac{27}{2}$ 之间插入三个数, 使这五个数成等比数列, 则插入的三个数的乘积为_____.
14. 圆心为 (1, 2) 且与直线 $5x - 12y - 7 = 0$ 相切的圆的方程为_____.
15. 在由数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 所组成的没有重复数字的四位数中, 不能被 5 整除的数共有_____个.
16. 下面是关于三棱锥的四个命题:
 - ①底面是等边三角形, 侧面与底面所成的二面角都相等的三棱锥是正三棱锥.
 - ②底面是等边三角形, 侧面都是等腰三角形的三棱锥是正三棱锥.
 - ③底面是等边三角形, 侧面的面积都相等的三棱锥是正三棱锥.
 - ④侧棱与底面所成的角都相等, 且侧面与底面所成的二面角都相等的三棱锥是正三棱锥.

其中, 真命题的编号是_____ (写出所有真命题的编号).

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

已知 α 为第二象限的角, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, β 为第一象限的角, $\cos \beta = \frac{5}{13}$, 求 $\tan(2\alpha - \beta)$ 的值.

18. (本小题满分 12 分)

甲、乙两队进行一场排球比赛, 根据以往经验, 单局比赛甲队胜乙队的概率为 0.6, 本场比赛采用五局三胜制, 即先胜三局的队获胜, 比赛结束, 设各局比赛相互间没有影响, 求

- (I) 前三局比赛甲队领先的概率;
- (II) 本场比赛乙队以 3: 2 取胜的概率. (精确到 0.001)

19. (本小题满分 12 分)

乙知 $\{a_n\}$ 是各项为不同的正数的等差数列, $\lg a_1$ 、 $\lg a_2$ 、 $\lg a_4$ 成等差数列, 又

$$b_n = \frac{1}{a_{2^n}}, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

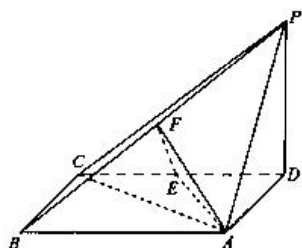
- (I) 证明 $\{b_n\}$ 为等比数列;
- (II) 如果数列 $\{b_n\}$ 前 3 项的和等于 $\frac{7}{24}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 和公差 d .

20. (本小题满分 12 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $AD=PD$, E 、 F 分别为 CD 、 PB 的中点.

(I) 求证: $EF \perp$ 平面 PAB ;

(II) 设 $AB = \sqrt{2} BC$, 求 AC 与平面 AEF 所成的角的大小.



21. (本小题满分 12 分)

设 a 为实数, 函数 $f(x) = x^3 - x^2 - x + a$.

(I) 求 $f(x)$ 的极值;

(II) 当 a 在什么范围内取值时, 曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴仅有一个交点.

22. P 、 Q 、 M 、 N 四点都在椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 上, F 为椭圆在 y 轴正半轴上的焦点. 已知 \overrightarrow{PF} 与 \overrightarrow{PQ}

共线, \overrightarrow{MF} 与 \overrightarrow{FN} 共线, $\overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$. 求四边形 $PMQN$ 的面积的最小值和最大值.

参考答案

1-6: CDBBDC 7-12: BACACC.

13. 216; 14. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$. 15. 192; 16. ①, ④.

17. 本小题主要考查有关角的和、差、倍的三角函数的基本知识, 以及分析能力和计算能力, 满分 12 分

解: 因为 α 为第二象限的角, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, 所以

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{4}{5}, \quad \tan \alpha = -\frac{3}{4}, \quad \tan 2\alpha = -\frac{24}{7}$$

$$\because \beta \text{ 为第一象限的角, } \cos \beta = \frac{5}{13}, \quad \therefore \sin \beta = \frac{12}{13}, \quad \tan \beta = \frac{12}{5}$$

$$\text{所以 } \tan(2\alpha - \beta) = \frac{\tan 2\alpha - \tan \beta}{1 + \tan 2\alpha \tan \beta} = \frac{-\frac{24}{7} - \frac{12}{5}}{1 + (-\frac{24}{7}) \times \frac{12}{5}} = \frac{204}{253}.$$

18. 本小题主要考查相互独立事件概率的计算, 运用概率知识解决实际问题的能力。满分 12 分

解: 单局比赛甲队胜乙队的概率为 0.6, 乙队胜甲队的概率为 $1 - 0.6 = 0.4$

(I) 记“甲队胜三局”为事件 A, “甲队胜二局”为事件 B, 则

$$P(A) = 0.6^3 = 0.216, \quad P(B) = C_3^2 \times 0.6^2 \times 0.4 = 0.432$$

所以前三局比赛甲队领先的概率为 $P(A) + P(B) = 0.648$

(II) 若本场比赛乙队 3:2 取胜, 则前四局双方应以 2:2 战平, 且第五局乙队胜, 所以所求事件的概率为 $C_5^2 \times 0.4^2 \times 0.6^2 \times 0.4 = 0.138$

19. 本小题主要考查等差数列、等比数列的基本知识以及运用这些知识的能力。满分 12 分。

(I) 证明: $\because \lg a_1, \lg a_2, \lg a_4$ 成等差数列, $\therefore 2\lg a_2 = \lg a_1 + \lg a_4$, 即 $a_2^2 = a_1 a_4$

又设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $(a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 3d)$, 即 $d^2 = a_1 d$

$$\because d \neq 0, \therefore d = a_1 \neq 0, \quad a_{2^n} = a_1 + (2^n - 1)d = 2^n d, \quad b_n = \frac{1}{a_{2^n}} = \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{2^n}$$

这时 $\{b_n\}$ 是首项 $b_1 = \frac{1}{2d}$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列。

$$(II) \text{ 解: } \because b_1 + b_2 + b_3 = \frac{1}{2d} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{24}, \therefore d = 3,$$

$$\therefore a_1 = d = 3$$

20. 本小题主要考查直线与平面垂直、直线与平面所成角的有关知识、及思维能力和空间想象能力。满分 12 分。

证明: (I) 证明: 连结 EP, $\because PD \perp$ 底面 ABCD, DE 在平面 ABCD 内, $\therefore PD \perp DE$ 。

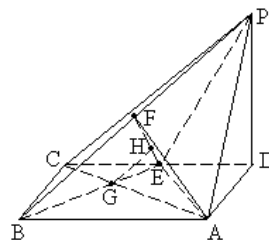
又 $CE = ED$, $PD = AD = BC$,

$$\therefore Rt\triangle BCE \cong Rt\triangle PDE, \therefore PE = BE.$$

$\because F$ 为 PB 中点, $\therefore EF \perp PB$. 由三垂线定理得

$PA \perp AB$, \therefore 在 $Rt\triangle PAB$ 中, $PF = AF$.

又 $PE = BE = EA$,



$\therefore Rt\triangle EFP \cong Rt\triangle EFA, \therefore EF \perp FA.$

$\therefore PB、FA$ 为平面 PAB 内的相交直线, $\therefore EF \perp$ 平面 PAB 。

(II) 解: 不妨设 $BC=1$, 则 $AD=PD=1, AB=\sqrt{2}, PA=\sqrt{2}, AC=\sqrt{3}$

$\therefore \triangle PAB$ 为等腰直角三角形, 且 $PB=2$, F 为其斜边中点, $BF=1$, 且 $AF \perp PB$ 。

$\therefore PB$ 与平面 AEF 内两条相交直线 $EF、AF$ 都垂直, $\therefore PB \perp$ 平面 AEF 。

连结 BE 交 AC 于 G , 作 $GH \parallel BP$ 交 EF 于 H , 则 $GH \perp$ 平面 AEF , $\angle GAH$ 为 AC 与平面 AEF 所成的角。

$$\text{由 } \triangle EGC \sim \triangle BGA \text{ 可知 } EG = \frac{1}{2}GB, EG = \frac{1}{3}EB, AG = \frac{2}{3}AC = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{由 } \triangle ECH \sim \triangle EBF \text{ 可知 } GH = \frac{1}{3}BF = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \sin \angle GAH = \frac{GH}{AG} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\therefore AC \text{ 与平面 } AEF \text{ 所成的角为 } \arcsin \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

21. 本小题主要考查导数的概念和计算, 应用导数研究函数性质的方法及推理和运算能力。

满分 12 分。

解: (I) $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

若 $f'(x) = 0$, 则 $x = -\frac{1}{3}, 1$.

当 x 变化时, $f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$	$-\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\uparrow	极大值	\downarrow	极小值	\uparrow

所以 $f(x)$ 的极大值是 $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{27} + a$, 极小值是 $f(1) = a - 1$ 。

(II) 函数 $f(x) = x^3 - x^2 - x + a = (x-1)^2(x+1) + a - 1$, 由此可知 x 取足够大的正数

时, 有 $f(x) > 0$, x 取足够小的负数时, 有 $f(x) < 0$, 所以曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴至少有一个交点。结合 $f(x)$ 的单调性可知:

当 $f(x)$ 的极大值 $\frac{5}{27} + a < 0$, 即 $a \in \left(-\infty, -\frac{5}{27}\right)$ 时, 它的极小值也小于 0, 因此曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴仅有一个交点, 它在 $(1, +\infty)$ 上; 当 $f(x)$ 的极小值 $a - 1 > 0$, 即 $a \in (1, +\infty)$ 时, 它的极大值也大于 0, 因此曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴仅有一个交点, 它在 $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ 上。

所以当 $a \in \left(-\infty, -\frac{5}{27}\right) \cup (1, +\infty)$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴仅有一个交点。

22. 本小题主要考查椭圆和直线的方程与性质, 两条直线垂直的条件, 两点间的距离, 不等式的性质等基本知识及综合分析能力。满分 14 分。

解: 如图, 由条件知 MN 和 PQ 是椭圆的两条弦, 相交于焦点 F (0, 1), 且 $PQ \perp MN$, 直线 PQ、NM 中至少有一条存在斜率, 不妨设 PQ 的斜率为 k 。

又 PQ 过点 F (0, 1), 故 PQ 方程为 $y = kx + 1$, 将此式代入椭圆方程得

$$(2 + k^2)x^2 + 2kx - 1 = 0$$

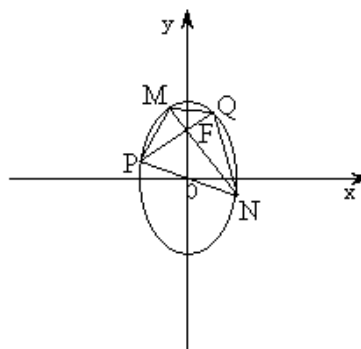
设 P、Q 两点的坐标分别为 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) ,

则

$$x_1 = \frac{-k - \sqrt{2k^2 + 2}}{2 + k^2}, \quad x_2 = \frac{-k + \sqrt{2k^2 + 2}}{2 + k^2}$$

$$\text{从而 } |PQ|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \frac{8(1 + k^2)^2}{(2 + k^2)^2}, \quad \therefore |PQ| = \frac{2\sqrt{2}(1 + k^2)}{2 + k^2}$$

$$(1) \text{ 当 } k \neq 0 \text{ 时, MN 的斜率为 } -\frac{1}{k}, \text{ 同上可推得 } |MN| = \frac{2\sqrt{2}(1 + (-\frac{1}{k})^2)}{2 + (-\frac{1}{k})^2}$$



故四边形的面积 $S = \frac{1}{2} |PQ| \cdot |MN| = \frac{4(1+k^2)(1+\frac{1}{k^2})}{(2+k^2)(2+\frac{1}{k^2})} = \frac{4(2+k^2+\frac{1}{k^2})}{5+2k^2+\frac{2}{k^2}}$

令 $u = k^2 + \frac{1}{k^2}$, 得 $S = \frac{4(2+u)}{5+2u} = 2(1 - \frac{1}{5+2u})$

因为 $u = k^2 + \frac{1}{k^2} \geq 2$,

当 $k = \pm 1$ 时, $u = 2, S = \frac{16}{9}$, 且 S 是以 u 为自变量的增函数,

所以 $\frac{16}{9} \leq S < 2$.

(2) 当 $k = 0$ 时, MN 为椭圆长轴, $|MN| = 2\sqrt{2}, |PQ| = \sqrt{2}$,

$S = \frac{1}{2} |PQ| \cdot |MN| = 2$

综合 (1), (2) 知, 四边形 $PMQN$ 面积的最大值为 2, 最小值为 $\frac{16}{9}$.