

1998 年天津高考文科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分, 满分 150 分, 考试 120 分钟.

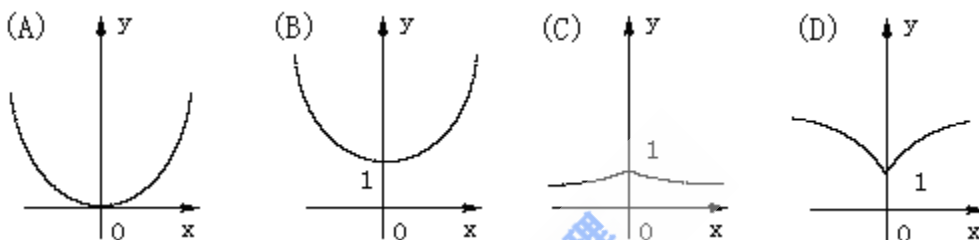
第 I 卷(选择题共 65 分)

一. 选择题: 本大题共 15 小题; 第(1)–(10)题每小题 4 分, 第(11)–第(15)题每小题 5 分, 65 分. 在每小题给出四项选项, 只一项符合题目要求的.

(1) $\sin 600^\circ$ ()

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) 函数 $y=a^{|x|}$ ($a>1$) 的图像是 ()



(3) 已知直线 $x=a$ ($a>0$) 和圆 $(x-1)^2+y^2=4$ 相切, 那么 a 的值是 ()

- (A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2

(4) 两条直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ 垂直的充要条件是 ()

- (A) $A_1A_2+B_1B_2=0$ (B) $A_1A_2-B_1B_2=0$ (C) $\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=-1$ (D) $\frac{B_1B_2}{A_1A_2}=1$

(5) 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ ($x\neq 0$) 的反函数 $f^{-1}(x)=$ ()

- (A) $x(x\neq 0)$ (B) $\frac{1}{x}$ ($x\neq 0$) (C) $-x(x\neq 0)$ (D) $-\frac{1}{x}$ ($x\neq 0$)

(6) 已知点 $P(\sin a - \cos a, \operatorname{tg} a)$ 在第一象限, 则 $[0, 2\pi]$ 内 a 的取值范围是 ()

- (A) $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}) \cup (\pi, \frac{5\pi}{4})$ (B) $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{5\pi}{4})$
 (C) $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}) \cup (\frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ (D) $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \pi)$

(7) 已知圆锥的全面积是底面积的 3 倍, 那么该圆锥的侧面积展开图扇形的圆心角为 ()

- (A) 120° (B) 150° (C) 180° (D) 240°

(8) 复数 $-i$ 的一个立方根是 i , 它的另外两个立方根是 ()

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$ (B) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$ (C) $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ (D) $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

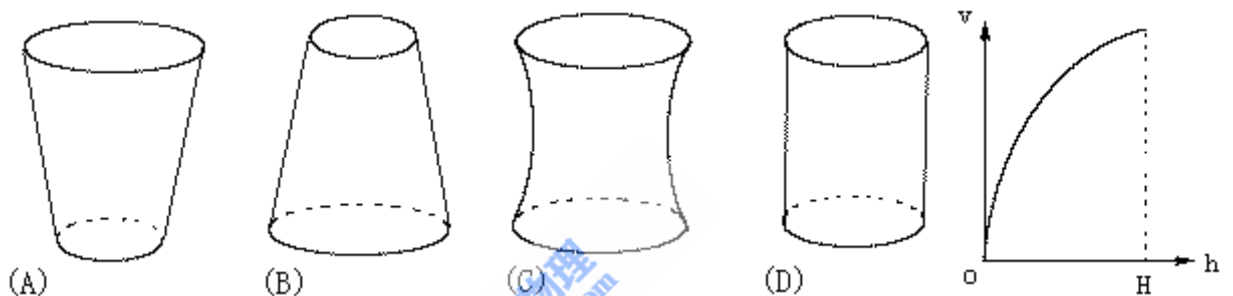
(9) 如果棱台的两底面积是 S, S' ，中截面的面积是 S_0 ，那么 ()

- (A) $2\sqrt{S_0} = \sqrt{S} + \sqrt{S'}$ (B) $S_0 = \sqrt{S'S}$
 (C) $2S_0 = S + S'$ (D) $S_0^2 = 2S'S$

(10) 2 名医生和 4 名护士被分配到 2 所学校为学生体检，每校分配 1 名医生和 2 名护士. 不同的分配方法共 ()

- (A) 6 种 (B) 12 种 (C) 18 种 (D) 24 种

(11) 向高为 H 的水瓶中注水，注满为止，如果注水量 V 与水深 h 的函数关系的图像如右图所示，那么水瓶的形状是 ()



(12) 椭圆 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦点为 F_1 ，点 P 在椭圆上，如果线段 PF_1 的中点 M 在 y 轴上，那么点 M 的纵坐标是 ()

- (A) $\pm \frac{\sqrt{3}}{4}$ (B) $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\pm \frac{3}{4}$

(13) 球面上有 3 个点，其中任意两点的球面距离都等于大圆周长为 $\frac{1}{6}$ ，经过这 3 个点的小圆的周长为 4π ，那么这个球的半径为 ()

- (A) $4\sqrt{3}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) 2 (D) $\sqrt{3}$

(14) 一个直角三角形三内角的正弦值成等比数列，其最小内角的正弦值为 ()

- (A) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+2}}{2}$

(15) 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $-\frac{1}{2}$ ，前 n 项的和 S_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{a_1}$ ，那么 $\frac{1}{a_1}$ 的值为 ()

- (A) $\pm \sqrt{3}$ (B) $\pm \frac{3}{2}$ (C) $\pm \sqrt{2}$ (D) $\pm \frac{\sqrt{6}}{2}$

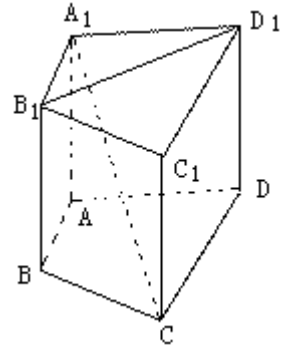
二. 填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分, 把答案填在题中横线上.

(16) 设圆过双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的一个顶点和一个焦点, 圆心在双曲线上, 则

圆心到双曲线中心距离是_____.

(17) $(x+2)^{10}(x^2-1)$ 的展开的 x^{10} 系数为_____ (用数字作答).

(18) 如图, 在直四棱柱 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 中, 当底面四边形 $ABCD$ 满足条件_____时, 有 $A_1C \perp B_1D_1$. (注: 填上你认为正确的一种条件即可, 不必考试所有可能的情形.)



(19) 关于函数 $f(x) = 4\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ ($x \in \mathbb{R}$), 有下列命题

① $y=f(x)$ 的表达式可改写为 $y=4\cos(2x - \frac{\pi}{6})$; ② $y=f(x)$ 是以 2π 为最小正周期的周期函数;

③ $y=f(x)$ 的图像关于点 $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ 对称; ④ $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x = -\frac{\pi}{6}$ 对称.

其中正确的命题的序号是_____. (注: 把你认为正确的命题的序号都填上.)

三. 解答题: 本大题共 6 小题; 共 69 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(20) (本小题满分 10 分)

设 $a \neq b$, 解关于 x 的不等式 $a^2x + b^2(1-x) \geq [ax + b(1-x)]^2$.

(21) (本小题满分 11 分)

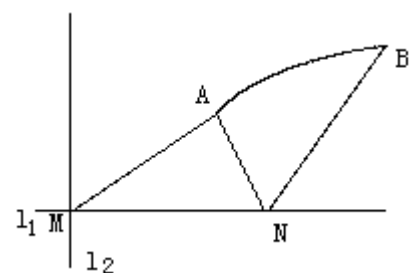
在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 设 $a+c=2b, A-C=\frac{\pi}{3}$, 求 $\sin B$ 的

值. 以下公式供解题时参考:

$$\begin{aligned} \sin \theta + \sin \varphi &= 2 \sin \frac{\theta + \varphi}{2} \cos \frac{\theta - \varphi}{2}, & \sin \theta - \sin \varphi &= 2 \cos \frac{\theta + \varphi}{2} \sin \frac{\theta - \varphi}{2}, \\ \cos \theta + \cos \varphi &= 2 \cos \frac{\theta + \varphi}{2} \cos \frac{\theta - \varphi}{2}, & \cos \theta - \cos \varphi &= -2 \sin \frac{\theta + \varphi}{2} \sin \frac{\theta - \varphi}{2}. \end{aligned}$$

(22) (本小题满分 12 分)

如图, 直线 l_1 和 l_2 相交于点 $M, l_1 \perp l_2$, 点 $N \in l_1$. 以 A, B 为端点的曲线段 C 上的任一点到 l_2 的距离与到点 N 的距离相等. 若

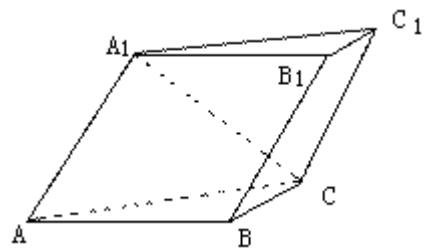


$\triangle AMN$ 为锐角三角形, $|AM|=\sqrt{17}$, $|AN|=3$, 且 $|MN|=6$. 建立适当的坐标系, 求曲线 C 的方程.

(23) (本小题满分 12 分)

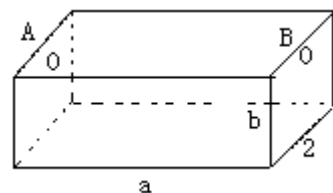
已知斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面 A_1ACC_1 与底面 ABC 垂直, $\angle ABC=90^\circ$, $BC=2$, $AC=2\sqrt{3}$, 且 $AA_1 \perp A_1C$, $AA_1=A_1C$.

- (I) 求侧棱 A_1A 与底面 ABC 所成角的大小;
- (II) 求侧面 A_1ABB_1 与底面 ABC 所成二面角的大小;
- (III) 求侧棱 B_1B 和侧面 A_1ACC_1 的距离.



(24) (本小题满分 12 分)

如图, 为处理含有某种杂质的污水, 要制造一底宽为 2 米的无盖长方体沉淀箱. 污水从 A 孔流入, 经沉淀后从 B 孔流出. 设箱体的长度为 a 米, 高度为 b 米. 已知流出的水中该杂质的质量分数与 a, b 的乘积 ab 成反比. 现有制箱材料 60 平方米. 问当 a, b 各为多少米时, 经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小 (A, B 孔的面积忽略不计).



(25) (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, $b_1=1$, $b_1+b_2+\dots+b_{10}=100$.

(I) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项 b_n ;

(II) 设数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = \lg(1 + \frac{1}{b_n})$, 记 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和. 试比较 S_n 与

$\frac{1}{2} \lg b_{n+1}$ 的大小, 并证明你的结论.

1998 年普通高等学校招生全国统一考试

数学试题(文史类)参考解答及评分标准

一. 选择题 本题考查基本知识和基本运算. 第(1) - (10)题每小题 4 分, 第(11) - (15)题

每小题 5 分. 满分 65 分.

- (1) D (2) B (3) C (4) A (5) B (6) B (7) C (8) D (9)
A (10) B (11) B (12) A (13) B (14) C (15) D

二. 填空题: 本题考查基本知识和基本运算. 每小题 4 分, 满分 16 分.

(16) $\frac{16}{3}$ (17) -5120

(18) $AC \perp BD$, 或任何能推导出这个条件的其他条件. 例如 $ABCD$ 是正方形, 菱形等

(19) ①, ③注: 第(19)题多填、漏填的错填均给 0 分.

三. 解答题:

(20) 本小题主要考查不等式基本知识, 不等式的解法. 满分 10 分.

解: 将原不等式化为

$$(a^2 - b^2)x + b^2 \geq (a - b)^2 x^2 + 2(a - b)bx + b^2,$$

移项, 整理后得 $(a - b)^2(x^2 - x) \leq 0$,

$$\because a \neq b \text{ 即 } (a - b)^2 > 0,$$

$$\therefore x^2 - x \leq 0,$$

$$\text{即 } x(x - 1) \leq 0.$$

解此不等式, 得解集 $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$.

(21) 本小题考查正弦定理, 同角三角函数基本公式, 诱导公式等基础知识, 考查利用三角公式进行恒等变形的技能及运算能力. 满分 11 分.

解: 由正弦定理和已知条件 $a + c = 2b$ 得

$$\sin A + \sin C = 2\sin B.$$

$$\text{由和差化积公式得 } 2\sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} = 2\sin B.$$

$$\text{由 } A+B+C = \pi, \text{ 得 } \frac{\sin(A+C)}{2} = \frac{\cos B}{2},$$

$$\text{又 } A-C = \frac{\pi}{3}, \text{ 得 } \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{B}{2} = \sin B,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{B}{2} = 2\sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}.$$

$$\because 0 < \frac{B}{2} < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\cos B}{2} \neq 0,$$

$$\therefore \sin \frac{B}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\text{从而 } \cos \frac{B}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{B}{2}} = \frac{\sqrt{13}}{4}$$

$$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{13}}{4} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

(22) 本小题主要考查根据所给条件选择适当的坐标系, 求曲线方程的解析几何的基本思想. 考查抛物线的概念和性质, 曲线与方程的关系以及综合运用知识的能力. 满分 12 分.

解法一: 如图建立坐标系, 以 l_1 为 x 轴, MN 的垂直平分线为 y 轴, 点 O 为坐标原点.

依题意知: 曲线段 C 是以点 N 为焦点, 以 l_2 为准线的抛物线的一段, 其中 A 、 B 分别为 C 的端点.

设曲线段 C 的方程为

$$y^2 = 2px \quad (p > 0), \quad (x_A \leq x \leq x_B, y > 0),$$

其中 x_A , x_B 分别为 A ,

B 的横坐标, $P = |MN|$.

$$\text{所以 } M \left(-\frac{P}{2}, 0\right), N \left(\frac{P}{2}, 0\right).$$

$$\text{由 } |AM| = \sqrt{17}, |AN| = 3 \text{ 得}$$

$$\left(x_A + \frac{P}{2}\right)^2 + 2Px_A = 17, \quad \textcircled{1}$$

$$\left(x_A - \frac{P}{2}\right)^2 + 2Px_A = 9. \quad \textcircled{2}$$

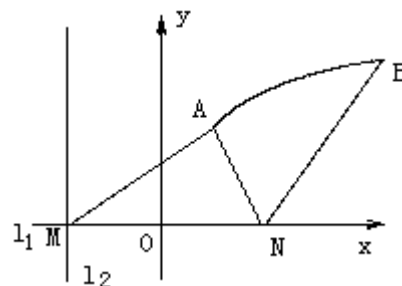
由①、②两式联立解得 $x_A = \frac{4}{P}$, 再将其代入①式并由 $p > 0$ 解得

$$\begin{cases} p = 4 \\ x_A = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} p = 2 \\ x_A = 2 \end{cases}.$$

因为 $\triangle AMN$ 是锐角三角形, 所以 $\frac{P}{2} > x_A$, 故舍去 $\begin{cases} p = 2 \\ x_A = 2 \end{cases}$.

$$\therefore P = 4, x_A = 1.$$

$$\text{由点 } B \text{ 在曲线段 } C \text{ 上, 得 } x_B = |BM| - \frac{P}{2} = 4.$$



综上得曲线段 C 的方程为 $y^2=8x$ ($1 \leq x \leq 4, y > 0$).

解法二：如图建立坐标系，分别以 l_1, l_2 为 x, y 轴， M 为坐标原点.

作 $AE \perp l_1, AD \perp l_2, BF \perp l_2$ ，垂足分别为 E, D, F .

设 $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), N(x_N, 0)$.

依题意有

$$x_A = |ME| = |DA| = |AN| = 3,$$

$$y_A = |DM| = \sqrt{|AM|^2 - |DA|^2} = 2\sqrt{2}, \text{ 由于 } \triangle AMN \text{ 为锐角三角形, 故}$$



有

$$x_N = |AE| + |EN| = 4.$$

$$= |ME| + \sqrt{|AN|^2 - |AE|^2} = 4$$

$$x_B = |BF| = |BN| = 6.$$

设点 $P(x, y)$ 是曲线段 C 上任一点，则由题意知 P 属于集合

$$\{(x, y) \mid (x - x_N)^2 + y^2 = x^2, x_A \leq x \leq x_B, y > 0\}.$$

故曲线段 C 的方程

$$y^2 = 8(x - 2) \quad (3 \leq x \leq 6, y > 0).$$

(23) 本小题主要考查直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系，棱柱的性质，空间的角和距离的概念，逻辑思维能力、空间想象能力及运算能力。满分 12 分。

注：题中赋分为得到该结论时所得分值，不给中间分。

解：(I) 作 $A_1D \perp AC$ ，垂足为 D ，由面 $A_1ACC_1 \perp$ 面 ABC ，得 $A_1D \perp$ 面 ABC ，

$\therefore \angle A_1AD$ 为 A_1A 与面 ABC 所成的角。

$\because AA_1 \perp A_1C, AA_1 = A_1C,$

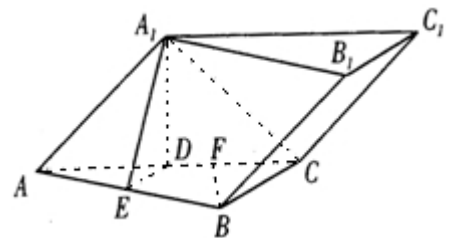
$\therefore \angle A_1AD = 45^\circ$ 为所求。

(II) 作 $DE \perp AB$ ，垂足为 E ，连 A_1E ，则由 $A_1D \perp$ 面 ABC ，得 $A_1E \perp AB$ 。

$\therefore \angle A_1ED$ 是面 A_1ABB_1 与面 ABC 所成二面角的平面角。

由已知， $AB \perp BC$ ，得 $ED \parallel BC$ 。又 D 是 AC 的中点， $BC = 2, AC = 2\sqrt{3}$ ，

$$\therefore DE = 1, AD = A_1D = \sqrt{3}, \operatorname{tg} \angle A_1ED = \frac{A_1D}{DE} = \sqrt{3}.$$



故 $\angle A_1ED=60^\circ$ 为所求.

(III) 作 $BF \perp AC$, F 为垂足, 由面 $A_1ACC_1 \perp$ 面 ABC , 知 $BF \perp$ 面 A_1ACC_1 .

$\because B_1B \parallel$ 面 A_1ACC_1 ,

$\therefore BF$ 的长是 B_1B 和面 A_1ACC_1 的距离.

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = 2\sqrt{2}$,

$\therefore BF = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ 为所求.

(24) 本小题主要考查综合应用所学数学知识、思想和方法解决实际问题的能力, 考查建立函数关系、不等式性质、最大值、最小值等基础知识. 满分 12 分.

解法一: 设 y 为流出的水中杂质的质量分数, 则 $y = \frac{k}{ab}$, 其中 $k > 0$ 为比例系数, 依题意, 即所求的 a, b 值使 y 值最小.

根据题设, 有 $4b + 2ab + 2a = 60$ ($a > 0, b > 0$),

得 $b = \frac{30 - a}{2 + a}$ ($0 < a < 30$), ①

$$\begin{aligned} \text{于是 } y &= \frac{k}{ab} = \frac{k}{\frac{30a - a^2}{2 + a}} \\ &= \frac{k}{-a + 32 - \frac{64}{a + 2}} \\ &= \frac{k}{34 - \left(a + 2 + \frac{64}{a + 2}\right)} \\ &\geq \frac{k}{34 - 2\sqrt{(a + 2) \cdot \frac{64}{a + 2}}} \\ &= \frac{k}{18} \end{aligned}$$

当 $a + 2 = \frac{64}{a + 2}$ 时取等号, y 达最小值.

这时 $a = 6, a = -10$ (舍去).

将 $a = 6$ 代入①式得 $b = 3$.

故当 a 为 6 米, b 为 3 米时, 经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小.

解法二: 依题意, 即所求的 a, b 的值使 ab 最大.

由题设知 $4a+2ab+2a=60$ ($a>0, b>0$)

即 $a+2b+ab=30$ ($a>0, b>0$).

$\therefore a+2b \geq 2\sqrt{ab}$,

$\therefore 2\sqrt{2}\sqrt{ab} + ab \leq 30$,

当且仅当 $a=2b$ 时, 上式取等号.

由 $a>0, b>0$, 解得 $0 < ab \leq 18$.

即当 $a=2b$ 时, ab 取得最大值, 其最大值 18.

$\therefore 2b^2=18$. 解得 $b=3, a=6$.

故当 a 为 6 米, b 为 3 米时, 经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小.

(25) 本小题主要考查等差数列基本概念及其通项求法, 考查对数函数性质, 考查归纳, 推理能力以及用数学归纳法进行论证的能力. 满分 12 分.

解: (I) 设数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d , 由题意得

$$\begin{cases} b_1=1, \\ 10b_1 + \frac{10(10-1)}{2d} = 100. \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} b_1=1, \\ d=2. \end{cases}$$

$\therefore b_n=2n-1$.

(II) 由 $b_n=2n-1$, 知

$$\begin{aligned} S_n &= \lg(1+1) + \lg\left(1+\frac{1}{3}\right) + \cdots + \lg\left(1+\frac{1}{2n-1}\right) \\ &= \lg\left[(1+1)\left(1+\frac{1}{3}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1+\frac{1}{2n-1}\right)\right], \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \lg b_{n+1} = \lg \sqrt{2n+1}.$$

因此要比较 S_n 与 $\frac{1}{2} \lg b_{n+1}$ 的大小, 可先比较 $(1+1)\left(1+\frac{1}{3}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1+\frac{1}{2n-1}\right)$ 与 $\sqrt{2n+1}$ 的大小.

取 $n=1$ 有 $(1+1) > \sqrt{2 \cdot 1 + 1}$,

取 $n=2$ 有 $(1+1)(1+\frac{1}{3}) > \sqrt{2 \cdot 1 + 1}$

由此推测 $(1+1)(1+\frac{1}{3}) \cdot \dots \cdot (1+\frac{1}{2n-1}) > \sqrt{2n+1}$. ①

若①式成立，则由对数函数性质可判定：

$$S_n > \frac{1}{2} \lg b_{n+1}.$$

下面用数学归纳法证明①式.

(i) 当 $n=1$ 时已验证①式成立.

(ii) 假设当 $n=k$ ($k \geq 1$) 时，①式成立，即

$$(1+1)(1+\frac{1}{3}) \cdot \dots \cdot (1+\frac{1}{2k-1}) > \sqrt{2k+1},$$

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$(1+1)(1+\frac{1}{3}) \cdot \dots \cdot (1+\frac{1}{2k-1})(1+\frac{1}{2(k+1)-1})$$

$$> \sqrt{2k+1} (1+\frac{1}{2k+1})$$

$$= \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+1} (2k+2).$$

$$\therefore [\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+1} (2k+2)]^2 - [\sqrt{2k+3}]^2$$

$$= \frac{4k^2 + 8k + 4k^2 + 8k + 3}{2k+1}$$

$$= \frac{1}{2k+1} > 0,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+1} (2k+2) > \sqrt{2k+3} = \sqrt{2(k+1)+1}.$$

因而 $(1+1)(1+\frac{1}{3}) \cdot \dots \cdot (1+\frac{1}{2k-1})(1+\frac{1}{2k+1}) > \sqrt{2(k+1)+1}$.

这就是说①式当 $n=k+1$ 时也成立.

由(i)，(ii) 知①式对任何正整数 n 都成立. 由此证得： $S_n > \frac{1}{2} \lg b_{n+1}$.