2015年全国普通高等学校招生考试(四川)

文科数学

一、选择题

1、设集合 $A=\{x|-1<x<2\}$，集合 $B=\{x|1<x<3\}$，则 $A\cup B=($　　$)$

(*A*)$\{x|-1<x<3\}$　　(*B*)$\{x|-1<x<1\}$　　(*C*)$\{x|1<x<2\}$　　(*D*)$\{x|2<x<3\}$

【答案】*A*

【解析】学科网

由已知，集合 $A=(-1，2)$，$B=(1，3)$，故 $A\cup B=(-1，3)$，选 *A*

【考点定位】本题主要考查集合的概念，集合的表示方法和并集运算.

【名师点睛】集合的运算通常作为试卷的第一小题，是因为概念较为简单，学生容易上手，可以让考生能够信心满满的尽快进入考试状态.另外，集合问题一般与函数、方程、不等式及其性质关联，也需要考生熟悉相关知识点和方法.本题最后求两个集合的并集，相对来说比较容易，与此相关的交集、补集等知识点也是常考点，应多加留意.属于简单题.

2、设向量 $a=(2，4)$与向量 $b=(x，6)$共线，则实数 $x=($　　$)$

(*A*)2　　(*B*)3　　(*C*)4　　(*D*)6

【答案】*B*

【解析】由向量平行的性质，有 $2∶4=x∶6$，解得 $x=3$，选 *B*

【考点定位】本题考查平面向量的坐标表示，向量共线的性质，考查基本的运算能力.

【名师点睛】平面向量的共线、垂直以及夹角问题，我们通常有两条解决通道：一是几何法，可以结合正余弦定理来处理.二是代数法，特别是非零向量的平行与垂直，一般都直接根据坐标之间的关系，两个非零向量平行时，对应坐标成比例(坐标中有 0 时单独讨论)；两个向量垂直时，对应坐标乘积之和等于 0，即通常所采用的“数量积”等于 0.属于简单题.

3、某学校为了了解三年级、六年级、九年级这三个年级之间的学生视力是否存在显著差异，拟从这三个年级中按人数比例抽取部分学生进行调查，则最合理的抽样方法是(　　)

(*A*)抽签法　　(*B*)系统抽样法　　(*C*)分层抽样法　　(*D*)随机数法

【答案】*C*

【解析】按照各种抽样方法的适用范围可知，应使用分层抽样.选 *C*

【考点定位】本题考查几种抽样方法的概念、适用范围的判断，考查应用数学方法解决实际问题的能

力.

【名师点睛】样本抽样是现实生活中常见的事件，一般地，抽签法和随机数表法适用于样本总体较少的抽样，系统抽样法适用于要将样本总体均衡地分为 n 个部分，从每一部分中按规则抽取一个个体；分层抽样法则是当总体明显的分为几个层次时，在每一个层次中按照相同的比例抽取抽取样本.本题条件适合于分层抽样的条件，故应选用分层抽样法.属于简单题.

4、设 a，b 为正实数，则“$a>b>1$”是“$log_2a>log_2b>0$”的(　　　)

(A)充要条件　　　　(B)充分不必要条件

(C)必要不充分条件　　　　(D)既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】$a>b>1$ 时，有 $log_2a>log_2b>0$ 成立，

反之当 $log_2a>log_2b>0$ 成立时，$a>b>1$ 也正确.选 A

【考点定位】本题考查对数函数的概念和性质、充要条件等基本概念，考查学生综合运用数学知识和方法解决问题的能力.

【名师点睛】判断条件的充要性，必须从“充分性”和“必要性”两个方向分别判断，同时注意涉及的相关概念和方法.本题中涉及对数函数基本性质——单调性和函数值的符号，因此可以结合对数函数的图象进行判断，从而得出结论.属于简单题.

5、下列函数中，最小正周期为 π 的奇函数是(　　　)

(A) $y=sin(2x+\frac{\pi}{2})$　　　　(B) $y=cos(2x+\frac{\pi}{2})$

(C) $y=sin2x+cos2x$　　　　(D) $y=sinx+cosx$

【答案】B

【解析】A、B、C 的周期都是 π，D 的周期是 2π

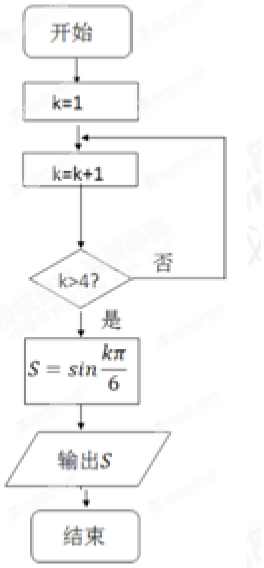
但 A 中，$y=cos2x$ 是偶函数，C 中 $y=\sqrt{2}\,sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 是非奇非偶函数

故正确答案为 B 学科网

【考点定位】本题考查三角函数的基本概念和性质，考查函数的周期性和奇偶性，考查简单的三角函数恒等变形能力.

【名师点睛】讨论函数性质时，应该先注意定义域，在不改变定义域的前提下，将函数化简整理为标准形式，然后结合图象进行判断.本题中，C、D 两个选项需要先利用辅助角公式整理，再结合三角函数的周期性和奇偶性(对称性)进行判断即可.属于中档题.

6、执行如图所示的程序框图，输出 S 的值为(　　　)



$(A)-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　$(B)\frac{\sqrt{3}}{2}$

$(C)-\frac{1}{2}$　　　　$(D)\frac{1}{2}$

【答案】D

【解析】第四次循环后，$k=5$，满足 $k>4$，输出 $S=sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$，选 D

【考点定位】本题考查循环结构形式的程序框图，考查特殊角的三角函数值，考查基本运算能力.

【名师点睛】在算法的考点上，四川省以程序框图的考查为主，而考查程序框图，必定是以循环结构形式出现，它可以包括程序框图的所有结构类型.本题只需对循环后的 k 值进行判定，最后输出相应的三角函数值即可，属于简单题.

7、过双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点且与 x 轴垂直的直线交该双曲线的两条渐近线于 A、B 两点，则 $|AB|=$(　　　)

$(A)\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　　　$(B)2\sqrt{3}$　　　　$(C)6$　　　　$(D)4\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】由题意，$a=1$，$b=\sqrt{3}$，故 $c=2$，

渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$

将 $x=2$ 代入渐近线方程，得 $y_{1,2}=\pm2\sqrt{3}$

故 $|AB|=4\sqrt{3}$，选 D

【考点定位】本题考查双曲线的概念、双曲线渐近线方程、直线与直线的交点、线段长等基础知识，考查简单的运算能力.

【名师点睛】本题跳出直线与圆锥曲线位置关系的常考点，进而考查直线与双曲线渐近线交点问题，考生在解题中要注意识别.本题需要首先求出双曲线的渐近线方程，然后联立方程组，接触线段 AB 的端点坐标，即可求得$|AB|$的值.属于中档题.

8、某食品的保鲜时间 y (单位：小时)与储藏温度 x (单位：℃)满足函数关系 $y=e^{kx+b}$ ($e=2.718...$为自然对数的底数，k,b 为常数).若该食品在 0 ℃的保鲜时间是 192 小时，在 22 ℃的保鲜时间是 48 小时，则该食品在 33 ℃的保鲜时间是(　　)

(A)16 小时　　(B)20 小时　　(C)24 小时　　(D)21 小时

【答案】C

【解析】由题意，$\begin{cases}192=e^{b}\\48=e^{22k+b}\end{cases}$ 得 $\begin{cases}192=e^{b}\\\frac{1}{2}=e^{11k}\end{cases}$

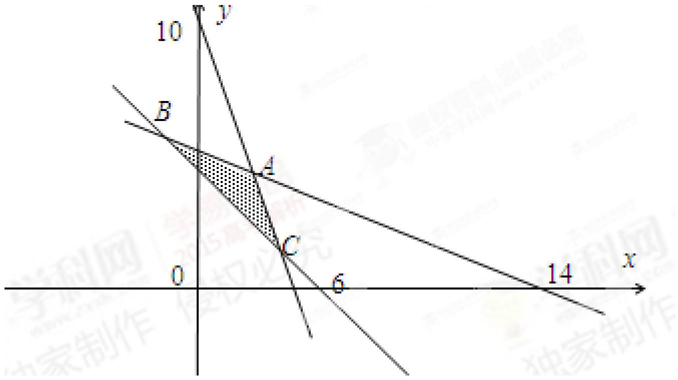
于是当 $x=33$ 时，$y=e^{33k+b}=(e^{11k})^3\cdot e^{b}=(\frac{1}{2})^3\times192=24$(小时) 学科网

【考点定位】本题考查指数函数的概念及其性质，考查函数模型在现实生活中的应用，考查整体思想，考查学生应用函数思想解决实际问题的能力.

【名师点睛】指数函数是现实生活中最常容易遇到的一种函数模型，如人口增长率、银行储蓄等等，与人们生活密切相关.本题已经建立好了函数模型，只需要考生将已知的两组数据代入，即可求出其中的待定常数.但本题需要注意的是：并不需要得到 k 和 b 的准确值，而只需求出 e^{b} 和 e^{11k}，然后整体代入后面的算式，即可得到结论，否则将增加运算量.属于中档题.

9、设实数 x，y 满足 $\begin{cases}2x+y\le10\\x+2y\le14\\x+y\ge6\end{cases}$，则 xy 的最大值为(　　)

(*A*) $\dfrac{25}{2}$　　　　(*B*) $\dfrac{49}{2}$　　　　(*C*)12　　　　(*D*)14



【答案】*A*

【解析】画出可行域如图

在△*ABC* 区域中结合图象可知

当动点在线段 *AC* 上时 *xy* 取得最大

此时 $2x+y=10$

$xy=\dfrac{1}{2}(2x\cdot y)\leqslant\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2x+y}{2}\right)^2=\dfrac{25}{2}$

当且仅当 $x=\dfrac{5}{2}$，$y=5$ 时取等号，对应点$\left(\dfrac{5}{2}，5\right)$落在线段 *AC* 上，

故最大值为 $\dfrac{25}{2}$

选 *A*

【考点定位】本题主要考查线性规划与基本不等式的基础知识，考查知识的整合与运用，考查学生综合运用知识解决问题的能力.

【名师点睛】本题中，对可行域的处理并不是大问题，关键是“求 *xy* 最大值”中，*xy* 已经不是“线性”问题了，如果直接设 $xy=k$，，则转化为反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的曲线与可行域有公共点问题，难度较大，且有超出“线性”的嫌疑.而上面解法中，用基本不等式的思想，通过系数的配凑，即可得到结论，当然，对于等号成立的条件也应该给以足够的重视.属于较难题.

10、设直线 *l* 与抛物线 $y^2=4x$ 相交于 *A*，*B* 两点，与圆 *C*：$(x-5)^2+y^2=r^2(r>0)$相切于点 *M*，且 *M* 为线段 *AB* 中点，若这样的直线 *l* 恰有 4 条，则 *r* 的取值范围是(　　　)

(*A*)(1，3)　　　　(*B*)(1，4)　　　　(*C*)(2，3)　　　　(*D*)(2，4)

【答案】*D*

【解析】不妨设直线 l：$x=ty+m$，

代入抛物线方程有：$y^2-4ty-4m=0$

则 $\Delta=16t^2+16m>0$

又中点 $M(2t^2+m，2t)$，则 $k_{MC}k_l=-1$

即 $m=3-2t^2$

当 $t=0$ 时，若 $r\geq 5$，满足条件的直线只有 1 条，不合题意，

若 $0<r<5$，则斜率不存在的直线有 2 条，此时只需对应非零的 t 的直线恰有 2 条即可.

当 $t\neq 0$ 时，将 $m=3-2t^2$ 代入 $\Delta=16t^2+16m$，可得 $3-t^2>0$，即 $0<t^2<3$

又由圆心到直线的距离等于半径，

可得 $d=r=\dfrac{|5-m|}{\sqrt{1+t^2}}=\dfrac{2+2t^2}{\sqrt{1+t^2}}=2\sqrt{1+t^2}$

由 $0<t^2<3$，可得 $r\in(2，4)$.选 D　学科网

【考点定位】本题考查直线、圆及抛物线等基本概念，考查直线与圆、直线与抛物线的位置关系、参数取值范围等综合问题，考查数形结合和分类与整合的思想，考查学生分析问题和处理问题的能力.

【名师点睛】本题实质是考查弦的中垂线过定点问题，注意到弦的斜率不可能为 0，但有可能不存在，故将直线方程设为 $x=ty+m$，可以避免忘掉对斜率不存在情况的讨论.在对 r 的讨论中，要注意图形的对称性，斜率存在时，直线必定是成对出现，因此，斜率不存在($t=0$)时也必须要有两条直线满足条件.再根据方程的判别式找到另外两条直线存在对应的 r 取值范围即可.属于难题.

二、填空题

11、设 i 是虚数单位，则复数 $i-\dfrac{1}{i}=$____________.

【答案】$2i$

【解析】$i-\dfrac{1}{i}=i+i=2i$

【考点定位】本题考查复数的概念，复数代数形式的四则运算等基础知识.

【名师点睛】解决本题的关键取决于对复数运算的熟练程度，也就是 $\dfrac{1}{i}=-i$ 的运算，容易误解为 $\dfrac{1}{i}=i$，从而导致答案错误.一般地，$i^{4n}=1$，$i^{4n+1}=i$，$i^{4n+2}=-1$，$i^{4n+3}=-i$，而 $\dfrac{1}{i}=i^{-1}=-i$. 属于容易题

12、$lg0.01+log_2 16=$____________.

【答案】2

【解析】$lg0.01+log_2 16=-2+4=2$

【考点定位】本题考查对数的概念、对数运算的基础知识，考查基本运算能力.

【名师点睛】对数的运算通常与指数运算相对应，即“若 $a^b=N$，则 $log_a N=b$”，因此，要求 $log_a N$ 的值，只需看 a 的多少次方等于 N 即可，由此可得结论.当然本题中还要注意的是：两个对数的底数是不相同的，对数符号的写法也有差异，要细心观察，避免过失性失误.属于简单题.

13、已知 $sin\alpha+2cos\alpha=0$，则 $2sin\alpha cos\alpha-cos^2\alpha$ 的值是______________.

【答案】-1

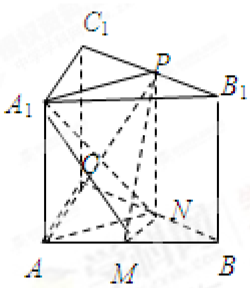
【解析】由已知可得，$sin\alpha=-2cos\alpha$，即 $tan\alpha=-2$

$$2sin\alpha cos\alpha-cos^2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha-1}{\tan^2\alpha+1}=\frac{-4-1}{4+1}=-1$$

【考点定位】本意考查同角三角函数关系式、三角函数恒等变形等基础知识，考查综合处理问题的能力.

【名师点睛】同角三角函数(特别是正余弦函数)求值问题的通常解法是：结合 $sin^2\alpha+cos^2\alpha=1$，解出 $sin\alpha$ 与 $cos\alpha$ 的值，然后代入计算，但这种方法往往比较麻烦，而且涉及符号的讨论.利用整体代换思想，先求出 $tan\alpha$ 的值，对所求式除以 $sin^2\alpha+cos^2\alpha(=1)$是此类题的常见变换技巧，通常称为“齐次式方法”，转化为 $tan\alpha$ 的一元表达式，可以避免诸多繁琐的运算.属于中档题.

14、在三棱住 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle BAC=90°$，其正视图和侧视图都是边长为 1 的正方形，俯视图是直角边长为 1 的等腰直角三角形，设点 M，N，P 分别是 AB，BC，B_1C_1 的中点，则三棱锥 $P-A_1MN$ 的体积是______.



【答案】$\frac{1}{24}$

【解析】由题意，三棱柱是底面为直角边长为 1 的

等腰直角三角形，高为 1 的直三棱柱，底面积为$\frac{1}{2}$

如图，因为 $AA_1 // PN$，故 $AA_1 //$ 面 PMN，

故三棱锥 $P-A_1MN$ 与三棱锥 $P-AMN$ 体积相等，

三棱锥 $P-AMN$ 的底面积是三棱锥底面积的 $\frac{1}{4}$，高为 1

故三棱锥 $P-A_1MN$ 的体积为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$ 学科网

【考点定位】本题主要考查空间几何体的三视图、直观图及空间线面关系、三棱柱与三棱锥的体积等基础知识，考查空间想象能力、图形分割与转换的能力，考查基本运算能力.

【名师点睛】解决本题，首先要正确画出三棱柱的直观图，包括各个点的对应字母所在位置，结合条件，三棱锥 $P-A_1MN$ 的体积可以直接计算，但转换为三棱锥 $P-AMN$ 的体积，使得计算更为简便，基本上可以根据条件直接得出结论.属于中档偏难题.

15、已知函数 $f(x)=2^x$，$g(x)=x^2+ax$(其中 $a\in R$).对于不相等的实数 x_1，x_2，设 $m=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$，$n=\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$，现有如下命题：

①对于任意不相等的实数 x_1，x_2，都有 $m>0$；

②对于任意的 a 及任意不相等的实数 x_1，x_2，都有 $n>0$；

③对于任意的 a，存在不相等的实数 x_1，x_2，使得 $m=n$；

④对于任意的 a，存在不相等的实数 x_1，x_2，使得 $m=-n$.

其中真命题有________________(写出所有真命题的序号).

【答案】①④

【解析】对于①，因为 $f'(x)=2^x ln2>0$ 恒成立，故①正确

对于②，取 $a=-8$，即 $g'(x)=2x-8$，当 x_1，$x_2<4$ 时 $n<0$，②错误

对于③，令 $f'(x)=g'(x)$，即 $2^x ln2=2x+a$

记 $h(x)=2^x ln2-2x$，则 $h'(x)=2^x(ln2)^2-2$

存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $h(x_0)=0$，可知函数 $h(x)$先减后增，有最小值.

因此，对任意的 a，$m=n$ 不一定成立.③错误

对于④，由 $f'(x)=-g'(x)$，即 $2^x ln2=-2x-a$

令 $h(x)=2^x ln2+2x$，则 $h'(x)=2^x(ln2)^2+2>0$ 恒成立，

即 $h(x)$是单调递增函数，

当 $x\to+\infty$时，$h(x)\to+\infty$

当 $x\to-\infty$时，$h(x)\to-\infty$

因此对任意的 a，存在 $y=a$ 与函数 $h(x)$有交点.④正确

【考点定位】本题主要考查函数的性质、函数的单调性、导数的运算等基础知识，考查函数与方程的思想和数形结合的思想，考查分析问题和解决能提的能力.

【名师点睛】本题首先要正确认识 m，n 的几何意义，它们分别是两个函数图象的某条弦的斜率，因此，借助导数研究两个函数的切线变化规律是本题的常规方法，解析中要注意“任意不相等的实数 x_1，x_2”与切线斜率的关系与差别，以及“都有”与“存在”的区别，避免过失性失误.属于较难题.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

16．(本小题满分 12 分)

设数列$\{a_n\}(n=1，2，3…)$的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=2a_n-a_3$，且 a_1，a_2+1，a_3 成等差数列.

(Ⅰ)求数列的通项公式;

(Ⅱ)设数列$\{\frac{1}{a_n}\}$的前 n 项和为 T_n，求 T_n.

【解析】(Ⅰ)由已知 $S_n=2a_n-a_1$，有

$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}(n\geqslant 2)$

即 $a_n=2a_{n-1}(n\geqslant 2)$

从而 $a_2=2a_1$，$a_3=2a_2=4a_1$，

又因为 a_1，a_2+1，a_3 成等差数列

即 $a_1+a_3=2(a_2+1)$

所以 $a_1+4a_1=2(2a_1+1)$，解得 $a_1=2$

所以，数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列

故 $a_n=2^n$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2^n}$ 所以 $T_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}=1-\dfrac{1}{2^n}$　学科网

【考点定位】本题考查等差数列与等比数列的概念、等比数列通项公式与前 n 项和等基础知识，考查运算求解能力.

【名师点睛】数列问题放在解答题第一题，通常就考查基本概念和基本运算，对于已知条件是 S_n 与 a_n 关系式的问题，基本处理方法是“变更序号作差”，这种方法中一定要注意首项 a_1 是否满足一般规律(代入检验即可，或者根据变换过程中 n 的范围和递推关系中的表达式判断).数列求和时，一定要注意首项、公比和项数都不能出错.同时注意，对于较为简单的试题，解析步骤一定要详细具体，不可随意跳步.属于简单题.

17、(本小题满分 12 分)

一辆小客车上有 5 个座位，其座位号为 1，2，3，4，5，乘客 P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 的座位号分别为 1，2，3，4，5，他们按照座位号顺序先后上车，乘客 P_1 因身体原因没有坐自己号座位，这时司机要求余下的乘客按以下规则就坐：如果自己的座位空着，就只能坐自己的座位.如果自己的座位已有乘客就坐，就在这 5 个座位的剩余空位中选择座位.

(Ⅰ)若乘客 P_1 坐到了 3 号座位，其他乘客按规则就座，则此时共有 4 种坐法.下表给出其中两种坐法，请填入余下两种坐法(将乘客就坐的座位号填入表中空格处)

乘客	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
座位号	3	2	1	4	5
	3	2	4	5	1

(Ⅱ)若乘客 P_1 坐到了 2 号座位，其他乘客按规则就坐，求乘客 P_1 坐到 5 号座位的概率.

【解析】(Ⅰ)余下两种坐法如下表所示

乘客	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
座位号	3	2	4	1	5
	3	2	5	4	1

(Ⅱ)若乘客 P_1 做到了 2 号座位，其他乘客按规则就坐

则所有可能坐法可用下表表示为

乘客	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
座位号	2	1	3	4	5
	2	3	1	4	5
	2	3	4	1	5
	2	3	4	5	1
	2	3	5	4	1
	2	4	3	1	5
	2	4	3	5	1
	2	5	3	4	1

于是，所有可能的坐法共 8 种

设“乘客 P_5 坐到 5 号座位”为事件 A，则事件 A 中的基本事件的个数为 4

所以 $P(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

答：乘客 P_5 坐到 5 号座位的概率为 $\frac{1}{2}$.学科网

【考点定位】本题主要考查随机事件的概率、古典概型等概念及相关计算，考查运用概率知识与方法分析和解决问题的能力，考查推理论证能力、应用意识.

【名师点睛】概率统计问题，文科的考查重点是随机事件、古典概型以及列举法求概率，本题需要考生根据条件细致填写座位表，通常采取按照某种顺序，如本题中已经设定的 P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 的座位号顺序填写，只要能正确填写好表格，相应概率随之得到.属于简单题.

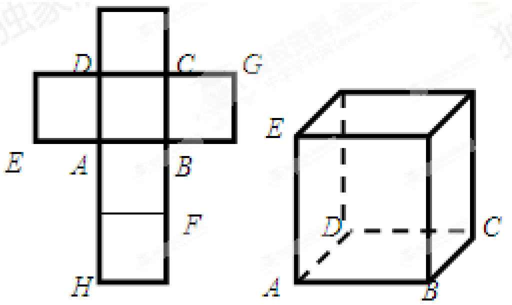
18、(本小题满分 12 分)

一个正方体的平面展开图及该正方体的直观图的示意图如图所示.

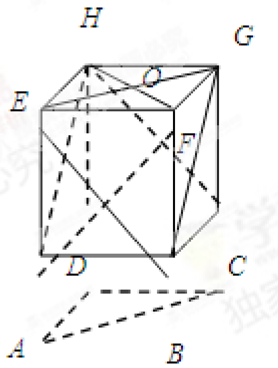
(Ⅰ)请按字母 F，G，H 标记在正方体相应地顶点处(不需要说明理由)

(Ⅱ)判断平面 BEG 与平面 ACH 的位置关系.并说明你的结论.

(Ⅲ)证明：直线 $DF\perp$ 平面 BEG



【解析】(Ⅰ)点 F，G，H 的位置如图所示



(Ⅱ)平面 BEG// 平面 ACH.证明如下

因为 $ABCD-EFGH$ 为正方体，所以 BC// FG，$BC=FG$

又 FG// EH，$FG=EH$，所以 BC// EH，$BC=EH$

于是 $BCEH$ 为平行四边形

所以 BE// CH

又 $CH\subset$平面 ACH，$BE\not\subset$平面 ACH，

所以 BE// 平面 ACH

同理 BG// 平面 ACH

又 $BE\cap BG=B$

所以平面 BEG// 平面 ACH

(III)连接 FH

因为 $ABCD-EFGH$ 为正方体，所以 $DH\perp$平面 $EFGH$

因为 $EG\subset$平面 $EFGH$，所以 $DH\perp EG$

又 $EG\perp FH$，$EG\cap FH=O$，所以 $EG\perp$平面 $BFHD$

又 $DF\subset$平面 $BFDH$，所以 $DF\perp EG$

同理 $DF\perp BG$

又 $EG\cap BG=G$

所以 $DF\perp$平面 BEG. 学科网

【考点定位】本题主要考查简单空间图形的直观图、空间线面平行与垂直的判定与性质等基础知识，考查空间想象能力、推理论证能力.

【名师点睛】本题引入了几何体表面的折展问题，对空间想象能力要求较高.立体几何的证明一定要详细写出所有步骤，列举(推证)出所有必备的条件，如在(Ⅱ)中证明两个平面平行时，除了找到两组平行线外，一定不能忘掉“相交”这个条件；同样，(III)中证明线面垂直，也不能忘掉“$EG\cap BG=G$”这个条件.属于中档题.

19、(本小题满分 12 分)

已知 A、B、C 为△ABC 的内角，$tanA$、$tanB$ 是关于方程 $x^2+\sqrt{3}px-p+1=0(p\in R)$两个实根.

(Ⅰ)求 C 的大小

(Ⅱ)若 $AB=1$，$AC=\sqrt{6}$，求 p 的值

【解析】(Ⅰ)由已知，方程 $x^2+\sqrt{3}px-p+1=0$ 的判别式

$\Delta=(\sqrt{3}p)^2-4(-p+1)=3p^2+4p-4\geqslant 0$

所以 $p\leqslant -2$ 或 $p\geqslant \dfrac{2}{3}$

由韦达定理，有 $tanA+tanB=-\sqrt{3}p$，$tanAtanB=1-p$

于是 $1-tanAtanB=1-(1-p)=p\neq 0$

从而 $tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\dfrac{-\sqrt{3}p}{p}=-\sqrt{3}$

所以 $tanC=-tan(A+B)=\sqrt{3}$

所以 $C=60°$

(Ⅱ)由正弦定理，得

$$sinB=\frac{AC\sin C}{AB}=\frac{\sqrt{6}\sin 60^{0}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

解得 $B=45°$或 $B=135°$(舍去)

于是 $A=180°-B-C=75°$

则 $tanA=tan75°=tan(45°+30°)=\frac{\tan 45^{0}+\tan 30^{0}}{1-\tan 45^{0}\tan 30^{0}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=2+\sqrt{3}$

所以 $p=-\frac{1}{\sqrt{3}}(tanA+tanB)=-\frac{1}{\sqrt{3}}(2+\sqrt{3}+1)=-1-\sqrt{3}$ 学科网

【考点定位】本题主要考查和角公式、诱导公式、正弦定理、一元二次方程根与系数关系等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程、化归与转化等数学思想.

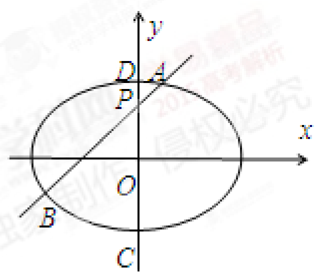
【名师点睛】本题利用一元二次方程的韦达定理，给出三角形两个内角正切值的关系式，求解过程中要注意对判别式的判定，表面上看，判别式对结论没有什么影响，但这对考查学生思维习惯及其严谨性是很有必要的.第(Ⅰ)问得到 $C=60°$后，第(Ⅱ)问中要注意舍去 $B=135°$，否则造成失误.属于中档题.

20、(本小题满分 13 分)

如图，椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率是$\frac{\sqrt{2}}{2}$，点 $P(0，1)$在短轴 CD 上，且$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}=-1$

(Ⅰ)求椭圆 E 的方程；

(Ⅱ)设 O 为坐标原点，过点 P 的动直线与椭圆交于 A、B 两点.是否存在常数 λ，使得$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$为定值？若存在，求 λ 的值；若不存在，请说明理由.



【解析】(Ⅰ)由已知，点 C，D 的坐标分别为$(0，-b)$，$(0，b)$

又点 P 的坐标为$(0，1)$，且 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}=-1$

于是$\begin{cases}1-b^2=-1\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ a^2-b^2=c^2\end{cases}$，解得 $a=2$，$b=\sqrt{2}$

所以椭圆 E 方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

(Ⅱ)当直线 AB 斜率存在时，设直线 AB 的方程为$y=kx+1$

A，B 的坐标分别为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=kx+1\end{cases}$，得$(2k^2+1)x^2+4kx-2=0$

其判别式$\Delta=(4k)^2+8(2k^2+1)>0$

所以$x_1+x_2=-\dfrac{4k}{2k^2+1},x_1x_2=-\dfrac{2}{2k^2+1}$

从而$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x_1x_2+y_1y_2+\lambda[x_1x_2+(y_1-1)(y_2-1)]$

$=(1+\lambda)(1+k^2)x_1x_2+k(x_1+x_2)+1$

$=\dfrac{(-2\lambda-4)k^2+(-2\lambda-1)}{2k^2+1}$

$=-\dfrac{\lambda-1}{2k^2+1}-\lambda-2$

所以，当$\lambda=1$时，$-\dfrac{\lambda-1}{2k^2+1}-\lambda-2=-3$

此时，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-3$为定值

当直线 AB 斜率不存在时，直线 AB 即为直线 CD

此时$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}=-2-1=-3$

故存在常数$\lambda=-1$，使得$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$为定值$-3$.

【考点定位】本题主要考查椭圆的标准方程、直线方程、平面向量等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力，考查数形结合、化归与转化、特殊与一般、分类与整合等数学思想.

【名师点睛】本题属于解析几何的基本题型，第(Ⅰ)问根据“离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，且 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}=-1$”建立方程组可以求出椭圆方程；第(Ⅱ)问设出直线方程后，代入椭圆方程，利用目标方程法，结合韦达定理，得到两交点横坐标的和与积，再代入 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 中化简整理.要得到定值，只需判断有无合适的 λ，使得结论与 k 无关即可，对考生代数式恒等变形能力要求较高.属于较难题.

21、(本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x)=-2\ln x+x^2-2ax+a^2$，其中 $a>0$.

(Ⅰ)设 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，讨论 $g(x)$ 的单调性；

(Ⅱ)证明：存在 $a\in(0,1)$，使得 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，且 $f(x)=0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内有唯一解.

【解析】(Ⅰ)由已知，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$

$g(x)=f'(x)=2(x-1-\ln x-a)$

所以 $g'(x)=2-\frac{2}{x}=\frac{2(x-1)}{x}$

当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增

(Ⅱ)由 $f'(x)=2(x-1-\ln x-a)=0$，解得 $a=x-1-\ln x$

令 $\Phi(x)=-2x\ln x+x^2-2x(x-1-\ln x)+(x-1-\ln x)^2=(1+\ln x)^2-2x\ln x$

则 $\Phi(1)=1>0$，$\Phi(e)=2(2-e)<0$

于是存在 $x_0\in(1,e)$，使得 $\Phi(x_0)=0$

令 $a_0=x_0-1-\ln x_0=u(x_0)$，其中 $u(x)=x-1-\ln x(x\geqslant 1)$

由 $u'(x)=1-\frac{1}{x}\geqslant 0$ 知，函数 $u(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增

故 $0=u(1)<a_0=u(x_0)<u(e)=e-2<1$

即 $a_0\in(0,1)$

当 $a=a_0$ 时，有 $f'(x_0)=0$，$f(x_0)=\Phi(x_0)=0$

再由(Ⅰ)知，$f'(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增

当 $x\in(1,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，从而 $f(x)>f(x_0)=0$

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，从而 $f(x)>f(x_0)=0$

又当 $x\in(0，1]$时，$f(x)=(x-a_0)^2-2x\ln x>0$

故 $x\in(0，+\infty)$时，$f(x)\geqslant 0$

综上所述，存在 $a\in(0，1)$，使得 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，且 $f(x)=0$ 在区间$(1，+\infty)$内有唯一解.

【考点定位】本题主要考查导数的运算、导数在研究函数中的应用、函数的零点等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力、创新意识，考查函数与方程、数形结合、化归与转化等数学思想.

【名师点睛】本题第(Ⅰ)问隐藏二阶导数知识点，由于连续两次求导后，参数 a 消失，故函数的单调性是确定的，讨论也相对简单.第(Ⅱ)问需要证明的是：对于某个 $a\in(0，1)$，$f(x)$ 的最小值恰好是 0，而且在$(1，+\infty)$上只有一个最小值.因此，本题仍然要先讨论 $f(x)$ 的单调性，进一步说明对于找到的 a，$f(x)$ 在$(1，+\infty)$上有且只有一个等于 0 的点，也就是在$(1，+\infty)$上有且只有一个最小值点.属于难题.