1997 年天津高考理科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分．共 150 分．考试时间 120 分钟．

第 I 卷（选择题共 65 分）

一．选择题:本大题共 15 小题；第(1)—(10)题每小题 4 分,第(11)—(15)题每小题 5 分,共 65 分．在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1．设集合 $M=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$，集合 $N=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$，集合 $M\cap N=$　　（　　）

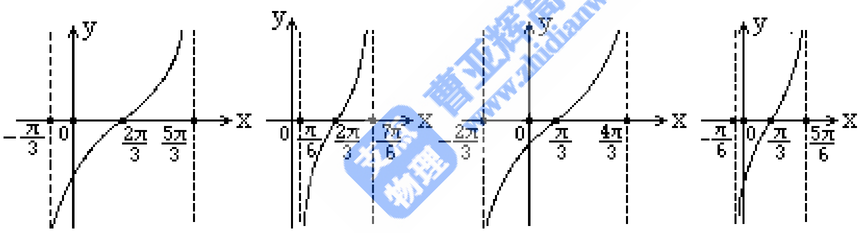
(A) $\{x|0\le x<1\}$　　(B) $\{x|0\le x<2\}$

(C) $\{x|0\le x\le 1\}$　　(D) $\{x|0\le x\le 2\}$

2．如果直线 $ax+2y+2=0$ 与直线 $3x-y-2=0$ 平行,那么系数 $a=$　　（　　）

(A) -3　　(B) -6　　(C) $-\frac{3}{2}$　　(D) $\frac{2}{3}$

3．函数 $y=\operatorname{tg}(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\pi)$ 在一个周期内的图像是　　（　　）



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

4．已知三棱锥 D-ABC 的三个侧面与底面全等，且 $AB=AC=\sqrt{3}$，$BC=2$，则以 BC 为棱，以面 BCD 与面 BCA 为面的二面角的大小是　　（　　）

(A) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(B) $\arccos\frac{1}{3}$　　(C) $\frac{\pi}{2}$　　(D) $\frac{2\pi}{3}$

5．函数 $y=\sin(\frac{\pi}{3}-2x)+\cos 2x$ 的最小正周期是　　（　　）

(A) $\frac{\pi}{2}$　　(B) π　　(C) 2π　　(D) 4π

6．满足 $\arccos(1-x)\geq\arccos x$ 的 x 的取值范围是　　（　　）

(A) $[-1,-\frac{1}{2}]$　　(B) $[-\frac{1}{2},0]$　　(C) $[0,\frac{1}{2}]$　　(D) $[\frac{1}{2},1]$

7．将 $y=2^x$ 的图像　　（　　）

(A) 先向左平行移动 1 个单位　　(B) 先向右平行移动 1 个单位

(C) 先向上平行移动 1 个单位　　(D) 先向下平行移动 1 个单位

再作关于直线 $y=x$ 对称的图像，可得到函数 $y=\log_2(x+1)$ 的图像.

8．长方体一个顶点上三条棱的长分别是 3,4,5,且它的八个顶点都在同一个球面上，这个球的表面积是 (　　)

(A) $20\sqrt{2}\pi$　　(B) $25\sqrt{2}\pi$　　(C) 50π　　(D) 200π

9．曲线的参数方程是 $\begin{cases} x=1-\dfrac{1}{t} \\ y=1-t^2 \end{cases}$ （t 是参数，$t\neq 0$)，它的普通方程是 (　　)

(A) $(x-1)^2(y-1)=1$　　(B) $y=\dfrac{x(x-2)}{(1-x)^2}$

(C) $y=\dfrac{1}{(1-x)^2}-1$　　(D) $y=\dfrac{x}{1-x^2}+1$

10．函数 $y=\cos^2 x-3\cos x+2$ 的最小值为 (　　)

(A) 2　　(B) 0　　(C) $-\dfrac{1}{4}$　　(D) 6

11.椭圆 C 与椭圆 $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$ 关于直线 $x+y=0$ 对称，椭圆 C 的方程是 (　　)

(A) $\dfrac{(x+2)^2}{4}+\dfrac{(y+3)^2}{9}=1$　　(B) $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y-3)^2}{4}=1$

(C) $\dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y+3)^2}{4}=1$　　(D) $\dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$

12．圆台上、下底面积分别为 π 、4π，侧面积为 6π，这个圆台的体积是 (　　)

(A) $\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{3}$　　(B) $2\sqrt{3}\pi$　　(C) $\dfrac{7\sqrt{3}\pi}{6}$　　(D) $\dfrac{7\sqrt{3}\pi}{3}$

13．定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 的奇函数 $f(x)$ 为增函数；偶函数 $g(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 的图像与 $f(x)$ 的图像重合，设 $a>b>0$，给出下列不等式：

①$f(b)-f(-a)>g(a)-g(-b)$；

②$f(b)-f(-a)<g(a)-g(-b)$；

③$f(a)-f(-b)>g(b)-g(-a)$；

④$f(a)-f(-b)<g(b)-g(-a)$，

其中成立的是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

(A) ①与④　　　　(B) ②与③　　　　(C) ①与③　　　　(D) ②与④

14．不等式组$\begin{cases} x>0 \\ \dfrac{3-x}{3+x}>\left|\dfrac{2-x}{2+x}\right| \end{cases}$的解集是　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

(A) $\{x|0<x<2\}$　　　　　　　　(B) $\{x|0<x<2.5\}$

(C) $\{x|0<x<\sqrt{6}\}$　　　　　　　　(D) $\{x|0<x<3\}$

15．四面体的顶点和各棱中点共 10 个点，在其中取 4 个不共面的点，不同的取法共有

（　　）

(A) 150 种　　　　(B) 147 种　　　　(C) 144 种　　　　(D) 141 种

第Ⅱ卷（非选择题共 85 分）

二．填空题:本大题共 4 小题;每小题 4 分,共 16 分．把答案填在题中横线上．

16．已知$(\frac{a}{x}-\sqrt{\frac{x}{2}})^9$的展开式中$x^3$的系数为$\frac{9}{4}$，常数 a 的值为________.

17．已知直线的极坐标方程为$\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则极点到该直线的距离是_____.

18．$\dfrac{\sin 7^\circ+\cos 15^\circ\sin 8^\circ}{\cos 7^\circ-\sin 15^\circ\sin 8^\circ}$的值为_______.

19．已知 m, l 是直线，α、β 是平面，给出下列命题：

①若 l 垂直于α内的两条相交直线，则 $l\perp\alpha$；

②若 l 平行于α，则 l 平行于α内的所有直线；

③若$m\subset\alpha$，$l\subset\beta$，且$l\perp m$，则$\alpha\perp\beta$；

④若$l\subset\beta$，且$l\perp\alpha$，则$\alpha\perp\beta$；

⑤若$m\subset\alpha$，$l\subset\beta$，且$\alpha\parallel\beta$，则$m\parallel l$.

其中正确的命题的序号是________（注:把你认为正确的命题的序号都填上）

三．解答题:本大题共 6 小题;共 69 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

20．（本小题满分 10 分）

已知复数 $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$，$\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$．复数 $\overline{z\omega}$，$z^2\omega^3$ 在复数平面上所对应的点分别为 P, Q．证明 ΔOPQ 是等腰直角三角形（其中 O 为原点）．

21．（本小题满分 11 分）

已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 都是由正数组成的等比数列，公比分别为 p、q，其中 $p>q$，且 $p\neq 1$，$q\neq 1$．设 $c_n=a_n+b_n$，S_n 为数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{S_{n-1}}$．

22．（本小题满分 12 分）

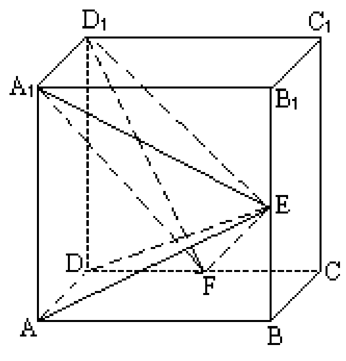
甲、乙两地相距 S 千米，汽车从甲地匀速行驶到乙地，速度不得超过 c 千米/时．已知汽车每小时的运输成本（以元为单位）由可变部分和固定部分组成：可变部分与速度 v（千米/时）的平方成正比、比例系数为 b；固定部分为 a 元．

I．把全程运输成本 y（元）表示为速度 v（千米/时）的函数，并指出这个函数的定义域；

II．为了使全程运输成本最小，汽车应以多大速度行驶？

23．（本小题满分 12 分）

如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别是 BB_1、CD 的中点．



I．证明 $AD\perp D_1F$；

II．求 AE 与 D_1F 所成的角；

III．证明面 $AED\perp$ 面 A_1FD_1；

IV．设 $AA_1=2$，求三棱锥 $F-A_1ED_1$ 的体积 $V_{F-A_1ED_1}$

24．（本小题满分 12 分）

设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c\,(a>0)$，方程 $f(x)-x=0$ 的两个根 x_1，x_2 满足 $0<x_1<x_2<\frac{1}{a}$．

I．当 $x\in(0,\ x_1)$ 时，证明 $x<f(x)<x_1$；

II．设函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=x_0$ 对称，证明 $x_0<\frac{x_1}{2}$25.

(25)（本小题满分 12 分）

设圆满足：①截 y 轴所得弦长为 2；②被 x 轴分成两段圆弧，其弧长的比为 3:1，在满足条件①、②的所有圆中，求圆心到直线 $l: x-2y=0$ 的距离最小的圆的方程.

1997 年普通高等学校招生全国统一考试

数学试题(理工农医类)参考解答及评分标准

一．选择题:本题考查基本知识和基本运算.

1．B　2．B　3．A　4．C　5．B　6．D　7．D　8．C　9．B　10．B

11．A　12．D　13．C　14．C　15．D

二．填空题:本题考查基本知识和基本运算.

16．4　17．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　18．$2-\sqrt{3}$　19．①，④

注:第(19)题多填、漏填和错填均给 0 分.

三．解答题

20．本小题主要考查复数的基本概念、复数的运算以及复数的几何意义等基础知识，考查运算能力和逻辑推理能力.

解法一：

$$z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6}),$$

$$\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$$

于是

$$z\omega=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12},$$

$$\overline{z\omega}=\cos(-\frac{\pi}{12})+i\sin(-\frac{\pi}{12}),$$

$$z^2\omega^3=[\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})]\times(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$$

$$=\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}$$

因为 OP 与 OQ 的夹角为 $\frac{5\pi}{12}-(-\frac{\pi}{12})=\frac{\pi}{2}$，所以 $OP\perp OQ$.

因为 $|OP|=|\overline{z\varpi}|=1.|OQ|=|z^2\varpi^3|=1$，所以 $|OP|=|OQ|$

由此知△OPQ有两边相等且其夹角为直角，故△OPQ为等腰直角三角形.

解法二:

因为 $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6})$，所以 $z^3=-i$.

因为 $\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$，所以 $\omega^4=-1$

于是 $\frac{z^2\omega^3}{\overline{z\omega}}=\frac{z^2\omega^3}{\overline{z\omega}}\cdot\frac{z\omega}{z\omega}=\frac{z^3\omega^4}{|z|^2|\omega|^2}=i$

由此得 $OP\perp OQ$, $|OP|=|OQ|$.

由此知△OPQ有两边相等且其夹角为直角，故△OPQ为等腰直角三角形.

(21)本小题主要考查等比数列的概念、数列极限的运算等基础知识，考查逻辑推理能力和运算能力．满分 11 分.

解:

$$S_n=\frac{a_1(p^n-1)}{p-1}+\frac{b_1(q^n-1)}{q-1},$$

$$\frac{S_n}{S_{n-1}}=\frac{a_1(q-1)(p^n-1)+b_1(p-1)(q^n-1)}{a_1(q-1)(p^{n-1}-1)+b_1(p-1)(q^{n-1}-1)}.$$

分两种情况讨论.

(Ⅰ) $p>1$.

$\because p>q>0, 0<\frac{q}{p}<1,$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{S_{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{p^n[a_1(q-1)(1-\frac{1}{p^n})+b_1(p-1)(\frac{q^n}{p^n}-\frac{1}{p^n})]}{p^{n-1}[a_1(q-1)(1-\frac{1}{p^{n-1}})+b_1(p-1)(\frac{q^{n-1}}{p^{n-1}}-\frac{1}{p^{n-1}})]}$$

$$=p\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{a_1(q-1)(1-\frac{1}{p^n})+b_1(p-1)[(\frac{q}{p})^n-\frac{1}{p^n}]}{a_1(q-1)(1-\frac{1}{p^{n-1}})+b_1(p-1)[(\frac{q}{p})^{n-1}-\frac{1}{p^{n-1}}]}$$

$$=p\cdot\frac{a_1(q-1)}{a_1(q-1)}$$

$=p$.

(Ⅱ) $p<1$.

∵ $0<q<p<1$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{S_{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1(q-1)(p^n-1)+b_1(p-1)(q^n-1)}{a_1(q-1)(p^{n-1}-1)+b_1(p-1)(q^{n-1}-1)}$$

$$=\frac{-a_1(q-1)-b_1(p-1)}{-a_1(q-1)-b_1(p-1)}=1$$

(22)本小题主要考查建立函数关系、不等式性质、最大值、最小值等基础知识，考查综合应用所学数学知识、思想和方法解决实际问题的能力，满分 12 分.

解：（Ⅰ）依题意知汽车从甲地匀速行驶到乙地所用时间为$\frac{s}{v}$，全程运输成本为

$$y=a\cdot\frac{S}{v}+bv^2\cdot\frac{S}{v}=S(\frac{a}{v}+bv)$$

故所求函数及其定义域为

$$y=S(\frac{a}{v}+bv),v\in(0,c]$$

(Ⅱ)依题意知 S，a，b，v 都为正数，故有

$$S(\frac{a}{v}+bv)\ge 2S\sqrt{ab}$$

当且仅当 $\frac{a}{v}=bv,$. 即 $v=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 时上式中等号成立

若 $\sqrt{\frac{a}{b}}\le c$，则当 $v=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 时，全程运输成本 y 最小，

若 $\sqrt{\frac{a}{b}}>c$，则当 $v\in(0,c]$ 时，有

$$S(\frac{a}{v}+bv)-S(\frac{a}{c}+bc)$$
$$=S[(\frac{a}{v}-\frac{a}{c})+(bv-bc)]$$
$$=\frac{S}{vc}(c-v)(a-bcv)$$

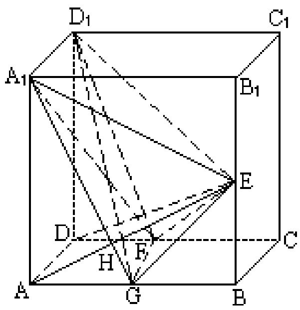
因为 $c-v\geqslant0$，且 $a>bc^2$，故有 $a-bcv\geqslant a-bc^2>0$，

所以 $S(\frac{a}{v}+bv)\ge S(\frac{a}{c}+bc)$，且仅当 $v=c$ 时等号成立，

也即当 $v=c$ 时，全程运输成本 y 最小.

综上知，为使全程运输成本 y 最小，当 $\frac{\sqrt{ab}}{b}\le c$ 时行驶速度应为 $v=\frac{\sqrt{ab}}{b}$；当 $\frac{\sqrt{ab}}{b}>c$ 时行驶速度应为 $v=c$.

(23)本小题主要考查直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系，考查逻辑推理能力和空间想象能力，满分 12 分.



解:(Ⅰ)∵AC_1是正方体，

∴$AD\perp$面 DC_1.

又 $D_1F\subset$面 DC_1，

∴$AD\perp D_1F$.

(Ⅱ)取 AB 中点 G，连结 A_1G，FG. 因为 F 是 CD 的中点，所以 GF、AD 平行且相等，又 A_1D_1、AD 平行且相等，所以 GF、A_1D_1 平行且相等，故 GFD_1A_1 是平行四边形，$A_1G/\!/D_1F$.

设 A_1G 与 AE 相交于点 H，则∠AHA_1 是 AE 与 D_1F 所成的角，因为 E 是 BB_1 的中点，所以 Rt△A_1AG≌Rt△ABE，∠GA_1A=∠GAH，从而∠AHA_1=90°，即直线 AE 与 D_1F 所成角为直角.

(III)由(Ⅰ)知 $AD\perp D_1F$，由(Ⅱ)知 $AE\perp D_1F$，又 $AD\cap AE=A$，所以 $D_1F\perp$ 面 AED. 又因为 $D_1F\subset$ 面 A_1FD_1，所以面 $AED\perp$ 面 A_1FD_1.

(Ⅳ)连结 GE，GD_1.

$\because FG/\!/A_1D_1$，$\therefore FG/\!/$ 面 A_1ED_1，

$\therefore V_{F-A_1ED_1}=V_{G-A_1ED_1}=V_{D_1-A_1GE}$

$\because AA_1=2$，

$\therefore S_{\Delta A_1GE}=S_{\text{正方形ABB1A1}}-2S_{\Delta A_1AG}-S_{\Delta GBE}=\dfrac{3}{2}$

$V_{F-A_1ED_1}=V_{D_1-A_1GE}=\dfrac{1}{3}\times A_1D_1\times S_{\Delta A_1GE}=\dfrac{1}{3}\times 2\times\dfrac{3}{2}=1$

(24)本小题主要考查一元二次方程、二次函数和不等式的基础知识，考查综合运用数学知识分析问题和解决问题的能力．满分 12 分．

证明:(Ⅰ)令 $F(x)=f(x)-x$. 因为 x_1，x_2 是方程 $f(x)-x=0$ 的根，所以

$F(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.

当 $x\in(0,x_1)$ 时，由于 $x_1<x_2$，得 $(x-x_1)(x-x_2)>0$，又 $a>0$，得

$F(x)=a(x-x_1)(x-x_2)>0$，

即 $x<f(x)$.

$$\begin{aligned}&x_1-f(x)\\&=x_1-[x+F(x)]\\&=x_1-x+a(x_1-x)(x-x_2)\\&=(x_1-x)[1+a(x-x_2)]\end{aligned}$$

因为 $0<x<x_1<x_2<\dfrac{1}{a}$

所以 $x_1-x>0$，$1+a(x-x_2)=1+ax-ax_2>1-ax_2>0$.

得　$x_1-f(x)>0$.

由此得 $f(x)<x_1$.

(Ⅱ)依题意知

$$x_0=-\frac{b}{2a}$$

因为 x_1，x_2 是方程 $f(x)-x=0$ 的根，即 x_1，x_2 是方程 $ax^2+(b-1)x+c=0$ 的根.

$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{b-1}{a}$，

$$x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{a(x_1+x_2)-1}{2a}=\frac{ax_1+ax_2-1}{2a}$$

因为 $ax_2<1$，所以 $x_0<\frac{ax_1}{2a}=\frac{x_1}{2}$.

(25)本小题主要考查轨迹的思想，求最小值的方法，考查综合运用知识建立曲线方程的能力．满分 12 分．

解法一:设圆的圆心为 $P(a,b)$，半径为 r，则点 P 到 x 轴，y 轴的距离分别为 $|b|$，$|a|$.

由题设知圆 P 截 x 轴所得劣弧对的圆心角为 90°，知圆 P 截 X 轴所得的弦长为 $\sqrt{2}r$，故 $r^2=2b^2$,

又圆 P 截 y 轴所得的弦长为 2，所以有

$r^2=a^2+1$.

从而得 $2b^2-a^2=1$.

又点 $P(a,b)$ 到直线 $x-2y=0$ 的距离为

$$d=\frac{|a-2b|}{\sqrt{5}},$$

所以 $5d^2=|a-2b|^2$

$=a^2+4b^2-4ab$

$\geqslant a^2+4b^2-2(a^2+b^2)$

$=2b^2-a^2=1$,

当且仅当 $a=b$ 时上式等号成立，此时 $5d^2=1$，从而 d 取得最小值.

由此有

$$\begin{cases}a=b,\\2b^2-a^2=1\end{cases}$$

解此方程组得

$$\begin{cases}a=1,\\b=1;\end{cases}或\begin{cases}a=-1,\\b=-1.\end{cases}$$

由于 $r^2=2b^2$ 知 $r=\sqrt{2}$.

于是，所求圆的方程是

$(x-1)^2+(y-1)^2=2$，或 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$.

解法二:同解法一，得 $d=\frac{|a-2b|}{\sqrt{5}}$

$\therefore a-2b=\pm\sqrt{5}d$

得 $a^2=4b^2\pm4\sqrt{5}bd+5d^2$ ①

将 $a^2=2b^2-1$ 代入①式，整理得

$2b^2\pm4\sqrt{5}db+5d^2+1=0$ ②

把它看作 b 的二次方程，由于方程有实根，故判别式非负，即

$\triangle=8(5d^2-1)\geqslant0$,

得 $5d^2\geqslant1$.

$\therefore 5d^2$ 有最小值 1，从而 d 有最小值 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

将其代入②式得 $2b^2\pm4b+2=0$. 解得 $b=\pm1$.

将 $b=\pm1$ 代入 $r^2=2b^2$，得 $r^2=2$. 由 $r^2=a^2+1$ 得 $a=\pm1$.

综上 $a=\pm1$，$b=\pm1$，$r^2=2$.

由 $|a-2b|=1$ 知 a，b 同号.

于是，所求圆的方程是

$(x-1)^2+(y-1)^2=2$，或 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$.