

2015 年北京市高考数学试卷（文科）

参考答案与试题解析

一、选择题（每小题 5 分,共 40 分）

1. (5 分) 若集合 $A = \{x \mid -5 < x < 2\}$, $B = \{x \mid -3 < x < 3\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{x \mid -3 < x < 2\}$ B. $\{x \mid -5 < x < 2\}$ C. $\{x \mid -3 < x < 3\}$ D. $\{x \mid -5 < x < 3\}$

【考点】 1E: 交集及其运算.

【专题】 5J: 集合.

【分析】 直接利用集合的交集的运算法则求解即可.

【解答】 解: 集合 $A = \{x \mid -5 < x < 2\}$, $B = \{x \mid -3 < x < 3\}$,

则 $A \cap B = \{x \mid -3 < x < 2\}$.

故选: A.

【点评】 本题考查集合的交集的运算法则, 考查计算能力.

2. (5 分) 圆心为 $(1, 1)$ 且过原点的圆的标准方程是 ()

- A. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ B. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$
C. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$ D. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$

【考点】 J1: 圆的标准方程.

【专题】 11: 计算题; 5B: 直线与圆.

【分析】 利用两点间距离公式求出半径, 由此能求出圆的方程.

【解答】 解: 由题意知圆半径 $r = \sqrt{2}$,

\therefore 圆的方程为 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$.

故选: D.

【点评】 本题考查圆的方程的求法, 解题时要认真审题, 注意圆的方程的求法, 是基础题.

3. (5分) 下列函数中为偶函数的是 ()

- A. $y=x^2\sin x$ B. $y=x^2\cos x$ C. $y=|\ln x|$ D. $y=2^{-x}$

【考点】 3K: 函数奇偶性的性质与判断.

【专题】 51: 函数的性质及应用.

【分析】 首先从定义域上排除选项 C, 然后在其他选项中判断 $-x$ 与 x 的函数值关系, 相等的就是偶函数.

【解答】 解: 对于 A, $(-x)^2\sin(-x) = -x^2\sin x$; 是奇函数;

对于 B, $(-x)^2\cos(-x) = x^2\cos x$; 是偶函数;

对于 C, 定义域为 $(0, +\infty)$, 是非奇非偶的函数;

对于 D, 定义域为 \mathbb{R} , 但是 $2^{-(-x)} = 2^x \neq 2^{-x}$, $2^x \neq -2^{-x}$; 是非奇非偶的函数;

故选: B.

【点评】 本题考查了函数奇偶性的判断; 首先判断定义域是否关于原点对称; 如果不对称, 函数是非奇非偶的函数; 如果对称, 再判断 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 关系, 相等是偶函数, 相反是奇函数.

4. (5分) 某校老年、中年和青年教师的人数见如表, 采用分层抽样的方法调查教师的身体状况, 在抽取的样本中, 青年教师有 320 人, 则该样本的老年教师人数为 ()

类别	人数
老年教师	900
中年教师	1800
青年教师	1600
合计	4300

- A. 90 B. 100 C. 180 D. 300

【考点】 B3: 分层抽样方法.

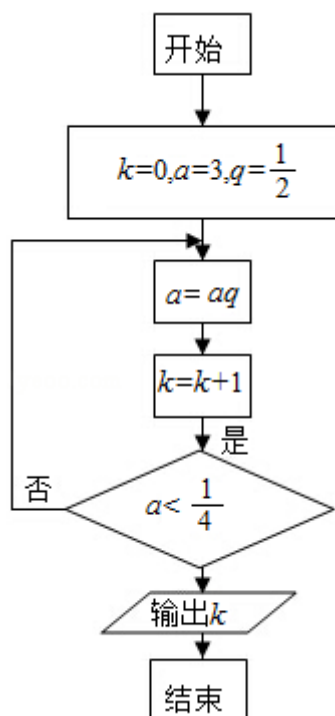
【专题】 11: 计算题; 5I: 概率与统计.

【分析】 由题意, 老年和青年教师的人数比为 $900:1600=9:16$, 即可得出结论.

【解答】解：由题意，老年和青年教师的人数比为 $900:1600=9:16$ ，
因为青年教师有 320 人，所以老年教师有 180 人，
故选：C.

【点评】本题考查分层抽样，考查学生的计算能力，比较基础.

5. (5 分) 执行如图所示的程序框图，输出的 k 值为 ()



A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

【考点】EF：程序框图.

【专题】27：图表型；5K：算法和程序框图.

【分析】模拟执行程序框图，依次写出每次循环得到的 a, k 的值，当 $a=\frac{3}{16}$ 时满

足条件 $a < \frac{1}{4}$ ，退出循环，输出 k 的值为 4.

【解答】解：模拟执行程序框图，可得

$$k=0, a=3, q=\frac{1}{2}$$

$$a=\frac{3}{2}, k=1$$

$$\text{不满足条件 } a < \frac{1}{4}, a=\frac{3}{4}, k=2$$

不满足条件 $a < \frac{1}{4}$, $a = \frac{3}{8}$, $k=3$

不满足条件 $a < \frac{1}{4}$, $a = \frac{3}{16}$, $k=4$

满足条件 $a < \frac{1}{4}$, 退出循环, 输出 k 的值为 4.

故选: B.

【点评】本题主要考查了循环结构的程序框图, 属于基础题.

6. (5分) 设 \vec{a} , \vec{b} 是非零向量, “ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$ ”是“ $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ”的 ()

- A. 充分而不必要条件
- B. 必要而不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

【考点】29: 充分条件、必要条件、充要条件; 90: 平面向量数量积的性质及其运算.

【专题】5A: 平面向量及应用; 5L: 简易逻辑.

【分析】由 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$ 便可得到 \vec{a} , \vec{b} 夹角为 0, 从而得到 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 而 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 并不能得到 \vec{a} 夹角为 0, 从而得不到 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$, 这样根据充分条件、必要条件的概念即可找出正确选项.

【解答】解: (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$;

$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$ 时, $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 1$;

$\therefore \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$;

$\therefore \vec{a} \parallel \vec{b}$;

\therefore “ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$ ”是“ $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ”的充分条件;

(2) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 时, \vec{a} , \vec{b} 的夹角为 0 或 π ;

$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$, 或 $-|\vec{a}| |\vec{b}|$;

即 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 得不到 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$;

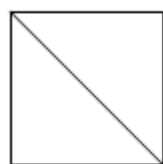
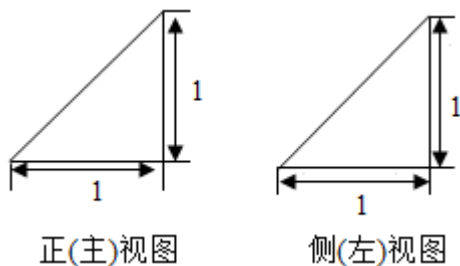
\therefore “ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$ ”不是“ $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ”的必要条件;

∴ 总上可得“ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$ ”是“ $\vec{a} // \vec{b}$ ”的充分不必要条件.

故选：A.

【点评】 考查充分条件，必要条件，及充分不必要条件的概念，以及判断方法与过程，数量积的计算公式，向量共线的定义，向量夹角的定义.

7. (5分) 某四棱锥的三视图如图所示，该四棱锥最长棱的棱长为 ()



俯视图

A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$

D. 2

【考点】 L1: 由三视图求面积、体积.

【专题】 26: 开放型; 5F: 空间位置关系与距离.

【分析】 几何体是四棱锥，且四棱锥的一条侧棱与底面垂直，结合直观图求相关几何量的数据，可得答案

【解答】 解：由三视图知：几何体是四棱锥，且四棱锥的一条侧棱与底面垂直，底面为正方形如图：

其中 $PB \perp$ 平面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 为正方形

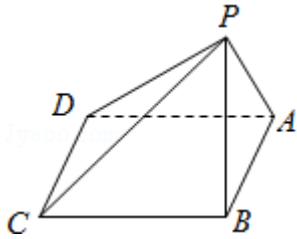
$$\therefore PB=1, AB=1, AD=1,$$

$$\therefore BD=\sqrt{2}, PD=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}.$$

$$PC=PA=\sqrt{2}$$

该几何体最长棱的棱长为： $\sqrt{3}$

故选：C.



【点评】 本题考查了由三视图求几何体的最长棱长问题，根据三视图判断几何体的结构特征是解答本题的关键

8. (5分) 某辆汽车每次加油都把油箱加满，下表记录了该车相邻两次加油时的情况

加油时间	加油量 (升)	加油时的累计里程 (千米)
2015年5月1日	12	35000
2015年5月15日	48	35600

注：“累计里程”指汽车从出厂开始累计行驶的路程，在这段时间内，该车每 100 千米平均耗油量为 ()

- A. 6 升 B. 8 升 C. 10 升 D. 12 升

【考点】 3U: 一次函数的性质与图象.

【专题】 51: 函数的性质及应用.

【分析】 由表格信息，得到该车加了 48 升的汽油，跑了 600 千米，由此得到该车每 100 千米平均耗油量.

【解答】 解：由表格信息，得到该车加了 48 升的汽油，跑了 600 千米，所以该车每 100 千米平均耗油量 $48 \div 6 = 8$;

故选：B.

【点评】 本题考查了学生对表格的理解以及对数据信息的处理能力.

二、填空题

9. (5分) 复数 $i(1+i)$ 的实部为 -1.

【考点】 A1: 虚数单位 i、复数.

【专题】 5N: 数系的扩充和复数.

【分析】 直接利用复数的乘法运算法则, 求解即可.

【解答】 解: 复数 $i(1+i) = -1+i$,

所求复数的实部为: -1 .

故答案为: -1 .

【点评】 本题考查复数的基本运算, 复数的基本概念, 考查计算能力.

10. (5分) 2^{-3} , $\frac{1}{3^2}$, $\log_2 5$ 三个数中最大数的是 $\log_2 5$.

【考点】 72: 不等式比较大小.

【专题】 51: 函数的性质及应用.

【分析】 运用指数函数和对数函数的单调性, 可得 $0 < 2^{-3} < 1$, $1 < \frac{1}{3^2} < 2$, $\log_2 5 > \log_2 4 = 2$, 即可得到最大数.

【解答】 解: 由于 $0 < 2^{-3} < 1$, $1 < \frac{1}{3^2} < 2$,

$\log_2 5 > \log_2 4 = 2$,

则三个数中最大的数为 $\log_2 5$.

故答案为: $\log_2 5$.

【点评】 本题考查数的大小比较, 主要考查指数函数和对数函数的单调性的运用, 属于基础题.

11. (5分) 在 $\triangle ABC$ 中, $a=3$, $b=\sqrt{6}$, $\angle A = \frac{2\pi}{3}$, 则 $\angle B = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$.

【考点】 HP: 正弦定理.

【专题】 58: 解三角形.

【分析】 由正弦定理可得 $\sin B$, 再由三角形的边角关系, 即可得到角 B .

【解答】 解: 由正弦定理可得,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

$$\text{即有 } \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

由 $b < a$, 则 $B < A$,

$$\text{可得 } B = \frac{\pi}{4}.$$

故答案为: $\frac{\pi}{4}$.

【点评】 本题考查正弦定理的运用, 同时考查三角形的边角关系, 属于基础题.

12. (5分) 已知 $(2, 0)$ 是双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$) 的一个焦点, 则 $b = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$.

【考点】 KC: 双曲线的性质.

【专题】 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】 求得双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$) 的焦点为 $(\sqrt{1+b^2}, 0)$, $(-\sqrt{1+b^2},$

$0)$, 可得 b 的方程, 即可得到 b 的值.

【解答】 解: 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$) 的焦点为 $(\sqrt{1+b^2}, 0)$, $(-\sqrt{1+b^2},$

$0)$,

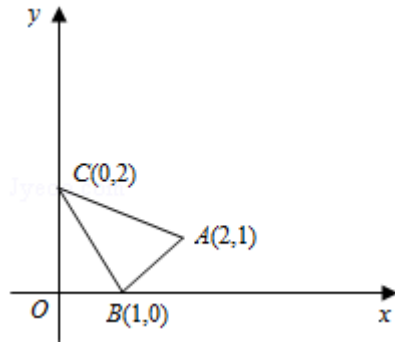
由题意可得 $\sqrt{1+b^2} = 2$,

解得 $b = \sqrt{3}$.

故答案为: $\sqrt{3}$.

【点评】 本题考查双曲线的方程和性质, 主要考查双曲线的焦点的求法, 属于基础题.

13. (5分) 如图, $\triangle ABC$ 及其内部的点组成的集合记为 D , $P(x, y)$ 为 D 中任意一点, 则 $z = 2x + 3y$ 的最大值为 $\underline{\underline{7}}$.



【考点】7C: 简单线性规划.

【专题】26: 开放型; 59: 不等式的解法及应用.

【分析】利用线性规划的知识, 通过平移即可求 z 的最大值.

【解答】解: 由 $z=2x+3y$, 得 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$,

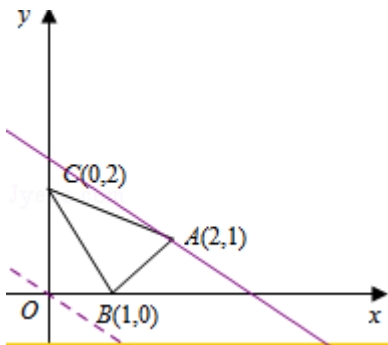
平移直线 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$, 由图象可知当直线 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$ 经过点 A 时, 直线 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$

的截距最大, 此时 z 最大.

即 A (2, 1).

此时 z 的最大值为 $z=2 \times 2+3 \times 1=7$,

故答案为: 7.

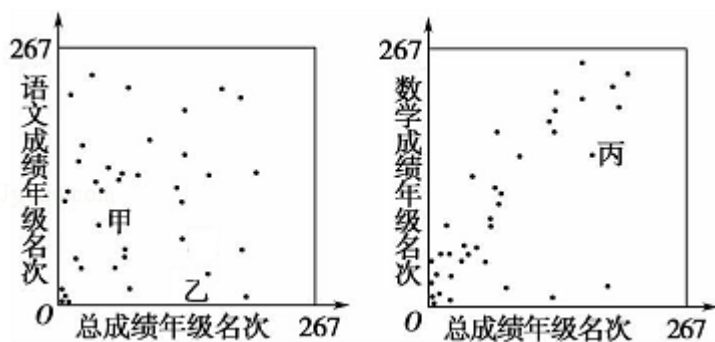


【点评】本题主要考查线性规划的应用, 利用数形结合是解决线性规划题目的常用方法.

14. (5 分) 高三年级 267 位学生参加期末考试, 某班 37 位学生的语文成绩, 数学成绩与总成绩在全年级的排名情况如图所示, 甲、乙、丙为该班三位学生. 从这次考试成绩看,

①在甲、乙两人中, 其语文成绩名次比其总成绩名次靠前的学生是 乙;

②在语文和数学两个科目中，丙同学的成绩名次更靠前的科目是数学。



【考点】 BG: 变量间的相关关系.

【专题】 5I: 概率与统计.

【分析】 (1) 根据散点图 1 分析甲乙两人所在的位置的纵坐标确定总成绩名次;

(2) 根据散点图 2, 观察丙的对应的坐标, 如果横坐标大于纵坐标, 说明总成绩名次大于数学成绩名次, 反之小于.

【解答】 解: 由高三年级 267 位学生参加期末考试, 某班 37 位学生的语文成绩, 数学成绩与总成绩在全年级的排名情况的散点图可知, 两个图中, 同一个人的总成绩是不会变的. 从第二个图看, 丙是从右往左数第 5 个点, 即丙的总成绩在班里倒数第 5. 在左边的图中, 找到倒数第 5 个点, 它表示的就是丙, 发现这个点的位置比右边图中丙的位置高, 所以语文名次更“大”

①在甲、乙两人中, 其语文成绩名次比其总成绩名次靠前的学生是 乙;

②观察散点图, 作出对角线 $y=x$, 发现丙的坐标横坐标大于纵坐标, 说明数学成绩的名次小于总成绩名次, 所以在语文和数学两个科目中, 丙同学的成绩名次更靠前的科目是数学;

故答案为: 乙; 数学.

【点评】 本题考查了对散点图的认识; 属于基础题.

三、解答题 (共 80 分)

15. (13 分) 已知函数 $f(x) = \sin x - 2\sqrt{3}\sin^2 \frac{x}{2}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{2\pi}{3}]$ 上的最小值.

【考点】 GP: 两角和与差的三角函数; H1: 三角函数的周期性; HW: 三角函数的最值.

【专题】 57: 三角函数的图像与性质.

【分析】 (1) 由三角函数恒等变换化简函数解析式可得 $f(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{3}) - \sqrt{3}$, 由三角函数的周期性及其求法即可得解;

(2) 由 $x \in [0, \frac{2\pi}{3}]$, 可求范围 $x + \frac{\pi}{3} \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$, 即可求得 $f(x)$ 的取值范围, 即可得解.

【解答】 解: (1) $\because f(x) = \sin x - 2\sqrt{3}\sin^2 \frac{x}{2}$

$$= \sin x - 2\sqrt{3} \times \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$= \sin x + \sqrt{3}\cos x - \sqrt{3}$$

$$= 2\sin(x + \frac{\pi}{3}) - \sqrt{3}$$

$$\therefore f(x) \text{ 的最小正周期 } T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi;$$

$$(2) \because x \in [0, \frac{2\pi}{3}],$$

$$\therefore x + \frac{\pi}{3} \in [\frac{\pi}{3}, \pi],$$

$$\therefore \sin(x + \frac{\pi}{3}) \in [0, 1], \text{ 即有: } f(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{3}) - \sqrt{3} \in [-\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}],$$

$$\therefore \text{可解得 } f(x) \text{ 在区间 } [0, \frac{2\pi}{3}] \text{ 上的最小值为: } -\sqrt{3}.$$

【点评】 本题主要考查了三角函数恒等变换的应用, 三角函数的周期性及其求法, 三角函数的最值的应用, 属于基本知识的考查.

16. (13分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_2 = 10$, $a_4 - a_3 = 2$

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_2 = a_3$, $b_3 = a_7$, 问: b_6 与数列 $\{a_n\}$ 的第几项相等?

【考点】 83: 等差数列的性质.

【专题】 11: 计算题; 54: 等差数列与等比数列.

【分析】(I) 由 $a_4 - a_3 = 2$, 可求公差 d , 然后由 $a_1 + a_2 = 10$, 可求 a_1 , 结合等差数列的通项公式可求

(II) 由 $b_2 = a_3 = 8$, $b_3 = a_7 = 16$, 可求等比数列的首项及公比, 代入等比数列的通项公式可求 b_6 , 结合 (I) 可求

【解答】解: (I) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

$$\because a_4 - a_3 = 2, \text{ 所以 } d = 2$$

$$\because a_1 + a_2 = 10, \text{ 所以 } 2a_1 + d = 10$$

$$\therefore a_1 = 4,$$

$$\therefore a_n = 4 + 2(n - 1) = 2n + 2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(II) 设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ,

$$\because b_2 = a_3 = 8, \quad b_3 = a_7 = 16,$$

$$\therefore \begin{cases} b_1 q = 8 \\ b_1 q^2 = 16 \end{cases}$$

$$\therefore q = 2, \quad b_1 = 4$$

$$\therefore b_6 = 4 \times 2^{6-1} = 128, \text{ 而 } 128 = 2n + 2$$

$$\therefore n = 63$$

$\therefore b_6$ 与数列 $\{a_n\}$ 中的第 63 项相等

【点评】本题主要考查了等差数列与等比数列通项公式的简单应用, 属于对基本公式应用的考查, 试题比较容易.

17. (13 分) 某超市随机选取 1000 位顾客, 记录了他们购买甲、乙、丙、丁四种商品的情况, 整理成如下统计表, 其中“√”表示购买, “×”表示未购买.

	甲	乙	丙	丁
100	√	×	√	√
217	×	√	×	√
200	√	√	√	×
300	√	×	√	×
85	√	×	×	×

98	×	√	×	×
----	---	---	---	---

- (1) 估计顾客同时购买乙和丙的概率；
- (2) 估计顾客在甲、乙、丙、丁中同时购买 3 种商品的概率；
- (3) 如果顾客购买了甲，则该顾客同时购买乙、丙、丁中哪种商品的可能性最大？

【考点】 C8: 相互独立事件和相互独立事件的概率乘法公式.

【专题】 5I: 概率与统计.

【分析】 (1) 从统计表可得, 在这 1000 名顾客中, 同时购买乙和丙的有 200 人, 从而求得顾客同时购买乙和丙的概率.

(2) 根据在甲、乙、丙、丁中同时购买 3 种商品的有 300 人, 求得顾客顾客在甲、乙、丙、丁中同时购买 3 种商品的概率.

(3) 在这 1000 名顾客中, 求出同时购买甲和乙的概率、同时购买甲和丙的概率、同时购买甲和丁的概率, 从而得出结论.

【解答】 解: (1) 从统计表可得, 在这 1000 名顾客中, 同时购买乙和丙的有 200 人,

故顾客同时购买乙和丙的概率为 $\frac{200}{1000}=0.2$.

(2) 在这 1000 名顾客中, 在甲、乙、丙、丁中同时购买 3 种商品的有 $100+200=300$ (人),

故顾客顾客在甲、乙、丙、丁中同时购买 3 种商品的概率为 $\frac{300}{1000}=0.3$.

(3) 在这 1000 名顾客中, 同时购买甲和乙的概率为 $\frac{200}{1000}=0.2$,

同时购买甲和丙的概率为 $\frac{100+200+300}{1000}=0.6$,

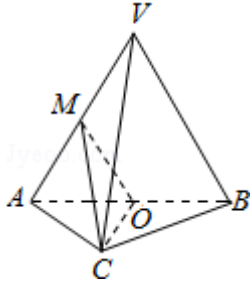
同时购买甲和丁的概率为 $\frac{100}{1000}=0.1$,

故同时购买甲和丙的概率最大.

【点评】 本题主要考查古典概率、互斥事件的概率加法公式的应用, 属于基础题.

18. (14 分) 如图, 在三棱锥 $V-ABC$ 中, 平面 $VAB \perp$ 平面 ABC , $\triangle VAB$ 为等边三角形, $AC \perp BC$ 且 $AC=BC=\sqrt{2}$, O, M 分别为 AB, VA 的中点.

- (1) 求证：VB // 平面 MOC；
 (2) 求证：平面 MOC ⊥ 平面 VAB
 (3) 求三棱锥 V - ABC 的体积.



【考点】 LF: 棱柱、棱锥、棱台的体积；LS: 直线与平面平行；LY: 平面与平面垂直.

【专题】 15: 综合题；5F: 空间位置关系与距离.

【分析】 (1) 利用三角形的中位线得出 $OM // VB$ ，利用线面平行的判定定理证明 $VB //$ 平面 MOC；

(2) 证明：OC ⊥ 平面 VAB，即可证明平面 MOC ⊥ 平面 VAB

(3) 利用等体积法求三棱锥 V - ABC 的体积.

【解答】 (1) 证明：∵ O, M 分别为 AB, VA 的中点，

∴ $OM // VB$,

∵ $VB \notin$ 平面 MOC, $OM \subset$ 平面 MOC,

∴ $VB //$ 平面 MOC；

(2) ∵ $AC=BC$, O 为 AB 的中点，

∴ $OC \perp AB$,

∵ 平面 VAB ⊥ 平面 ABC, $OC \subset$ 平面 ABC,

∴ $OC \perp$ 平面 VAB,

∵ $OC \subset$ 平面 MOC,

∴ 平面 MOC ⊥ 平面 VAB

(3) 在等腰直角三角形 ACB 中, $AC=BC=\sqrt{2}$, ∴ $AB=2$, $OC=1$,

∴ $S_{\triangle VAB}=\sqrt{3}$,

∵ $OC \perp$ 平面 VAB,

$$\therefore V_{C-VAB} = \frac{1}{3} OC \cdot S_{\Delta VAB} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore V_{V-ABC} = V_{C-VAB} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

【点评】 本题考查线面平行的判定，考查平面与平面垂直的判定，考查体积的计算，正确运用线面平行、平面与平面垂直的判定定理是关键。

19. (13分) 设函数 $f(x) = \frac{x^2}{2} - k \ln x$, $k > 0$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(2) 证明: 若 $f(x)$ 存在零点, 则 $f(x)$ 在区间 $(1, \sqrt{e}]$ 上仅有一个零点.

【考点】 6B: 利用导数研究函数的单调性; 6D: 利用导数研究函数的极值.

【专题】 26: 开放型; 53: 导数的综合应用.

【分析】 (1) 利用 $f'(x) \geq 0$ 或 $f'(x) \leq 0$ 求得函数的单调区间并能求出极值;

(2) 利用函数的导数的极值求出最值, 利用最值讨论存在零点的情况.

【解答】 解: (1) 由 $f(x) = \frac{x^2}{2} - k \ln x (k > 0)$

$$f'(x) = x - \frac{k}{x} = \frac{x^2 - k}{x}$$

由 $f'(x) = 0$ 解得 $x = \sqrt{k}$

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的情况如下:

x	$(0, \sqrt{k})$	\sqrt{k}	$(\sqrt{k}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↓	$\frac{k(1-\ln k)}{2}$	↑

所以, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\sqrt{k}, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, \sqrt{k})$;

$f(x)$ 在 $x = \sqrt{k}$ 处的极小值为 $f(\sqrt{k}) = \frac{k(1-\ln k)}{2}$, 无极大值.

(2) 证明: 由 (1) 知, $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的最小值为 $f(\sqrt{k}) = \frac{k(1-\ln k)}{2}$.

因为 $f(x)$ 存在零点, 所以 $\frac{k(1-\ln k)}{2} \leq 0$, 从而 $k \geq e$

当 $k=e$ 时, $f(x)$ 在区间 $(1, \sqrt{e})$ 上单调递减, 且 $f(\sqrt{e})=0$

所以 $x=\sqrt{e}$ 是 $f(x)$ 在区间 $(1, \sqrt{e})$ 上唯一零点.

当 $k > e$ 时, $f(x)$ 在区间 $(0, \sqrt{e})$ 上单调递减, 且

$$f(1)=\frac{1}{2}>0, f(\sqrt{e})=\frac{e-k}{2}<0,$$

所以 $f(x)$ 在区间 $(1, \sqrt{e})$ 上仅有一个零点.

综上所述, 若 $f(x)$ 存在零点, 则 $f(x)$ 在区间 $(1, \sqrt{e}]$ 上仅有一个零点.

【点评】 本题考查利用函数的导数求单调区间和导数的综合应用, 在高考中属于常见题型.

20. (14分) 已知椭圆 $C: x^2+3y^2=3$, 过点 $D(1, 0)$ 且不过点 $E(2, 1)$ 的直线与椭圆 C 交于 A, B 两点, 直线 AE 与直线 $x=3$ 交于点 M .

- (1) 求椭圆 C 的离心率;
- (2) 若 AB 垂直于 x 轴, 求直线 BM 的斜率;
- (3) 试判断直线 BM 与直线 DE 的位置关系, 并说明理由.

【考点】 K3: 椭圆的标准方程; KH: 直线与圆锥曲线的综合.

【专题】 26: 开放型; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

- 【分析】** (1) 通过将椭圆 C 的方程化成标准方程, 利用离心率计算公式即得结论;
(2) 通过令直线 AE 的方程中 $x=3$, 得点 M 坐标, 即得直线 BM 的斜率;
(3) 分直线 AB 的斜率不存在与存在两种情况讨论, 利用韦达定理, 计算即可.

【解答】 解: (1) \because 椭圆 $C: x^2+3y^2=3$,

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的标准方程为: } \frac{x^2}{3}+y^2=1,$$

$$\therefore a=\sqrt{3}, b=1, c=\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的离心率 } e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3};$$

(2) $\because AB$ 过点 $D(1, 0)$ 且垂直于 x 轴,

\therefore 可设 $A(1, y_1), B(1, -y_1)$,

$\because E(2, 1)$, \therefore 直线 AE 的方程为: $y-1=(1-y_1)(x-2)$,

令 $x=3$, 得 $M(3, 2-y_1)$,

$$\therefore \text{直线 BM 的斜率 } k_{BM} = \frac{2-y_1+y_1}{3-1} = 1;$$

(3) 结论: 直线 BM 与直线 DE 平行.

证明如下:

当直线 AB 的斜率不存在时, 由 (2) 知 $k_{BM}=1$,

又 \because 直线 DE 的斜率 $k_{DE} = \frac{1-0}{2-1} = 1$, $\therefore BM \parallel DE$;

当直线 AB 的斜率存在时, 设其方程为 $y=k(x-1)$ ($k \neq 1$),

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{则直线 AE 的方程为 } y - 1 = \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2} (x - 2),$$

$$\text{令 } x=3, \text{ 则点 } M\left(3, \frac{x_1 + y_1 - 3}{x_1 - 2}\right),$$

$$\therefore \text{直线 BM 的斜率 } k_{BM} = \frac{\frac{x_1 + y_1 - 3}{x_1 - 2} - y_2}{3 - x_2},$$

$$\text{联立 } \begin{cases} x^2 + 3y^2 = 3 \\ y = k(x-1) \end{cases}, \text{ 得 } (1+3k^2)x^2 - 6k^2x + 3k^2 - 3 = 0,$$

$$\text{由韦达定理, 得 } x_1 + x_2 = \frac{6k^2}{1+3k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{3k^2 - 3}{1+3k^2},$$

$$\therefore k_{BM} - 1 = \frac{k(x_1 - 1) + x_1 - 3 - k(x_2 - 1)(x_1 - 2) - (3 - x_2)(x_1 - 2)}{(3 - x_2)(x_1 - 2)}$$

$$= \frac{(k-1)[-x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) - 3]}{(3 - x_2)(x_1 - 2)}$$

$$= \frac{(k-1)\left(\frac{-3k^2 + 3}{1+3k^2} + \frac{12k^2}{1+3k^2} - 3\right)}{(3 - x_2)(x_1 - 2)}$$

$$= 0,$$

$\therefore k_{BM} = 1 = k_{DE}$, 即 $BM \parallel DE$;

综上所述, 直线 BM 与直线 DE 平行.

【点评】 本题是一道直线与椭圆的综合题, 涉及到韦达定理等知识, 考查计算能

力，注意解题方法的积累，属于中档题.