2015年浙江省高考数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分2015年普通高等学校招生全国统一考试（浙江卷）数学（理科）

1.（5分）（2015•浙江）已知集合P={x|x^2－2x≥0}，Q={x|1＜x≤2}，则（C_RP）∩Q=（　　）

A．[0，1）　　B．（0，2]　　C．（1，2）　　D．[1，2]

考点：　交、并、补集的混合运算．

专题：　集合．

分析：　求出P中不等式的解集确定出P，求出P补集与Q的交集即可．

解答：　解：由P中不等式变形得：x（x－2）≥0，

解得：x≤0或x≥2，即P=（－∞，0]∪[2，+∞），

∴C_RP=（0，2），

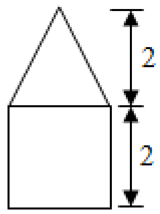
∵Q=（1，2]，

∴（C_RP）∩Q=（1，2），

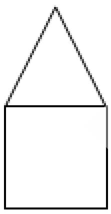
故选：C．

点评：　此题考查了交、并、补集的混合运算，熟练掌握运算法则是解本题的关键．

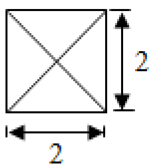
2.（5分）（2015•浙江）某几何体的三视图如图所示（单位：cm），则该几何体的体积是（　　）



主视图



侧视图



俯视图

A．$8cm^3$　　B．$12cm^3$　　C．$\frac{32}{3}cm^3$　　D．$\frac{40}{3}cm^3$

考点：　由三视图求面积、体积．

专题：　空间位置关系与距离．

分析：　判断几何体的形状，利用三视图的数据，求几何体的体积即可．

解答：解：由三视图可知几何体是下部为棱长为2的正方体，上部是底面为边长2的正方形奥为2的正四棱锥，

所求几何体的体积为：$2^3+\frac{1}{3}\times2\times2\times2=\frac{32}{3}cm^3$.

故选：C.

点评：本题考查三视图与直观图的关系的判断，几何体的体积的求法，考查计算能力.

3.（5分）（2015•浙江）已知$\{a_n\}$是等差数列，公差d不为零，前n项和是S_n，若a_3，a_4，a_8成等比数列，则（　　）

A. $a_1d>0, dS_4>0$　B. $a_1d<0, dS_4<0$　C. $a_1d>0, dS_4<0$　D. $a_1d<0, dS_4>0$

考点：等差数列与等比数列的综合.

专题：等差数列与等比数列.

分析：由a_3，a_4，a_8成等比数列，得到首项和公差的关系，即可判断a_1d和dS_4的符号.

解答：解：设等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1，则$a_3=a_1+2d$，$a_4=a_1+3d$，$a_8=a_1+7d$，

由a_3，a_4，a_8成等比数列，得$(a_1+3d)^2=(a_1+2d)(a_1+7d)$，整理得：$3a_1d=-5d^2$.

$\because d\neq0$，$\therefore d=-\frac{3}{5}a_1$，

$\therefore a_1d=-\frac{3}{5}a_1^2<0$，

$$dS_4=-\frac{3}{5}a_1\left(4a_1+\frac{4\times3\left(-\frac{3}{5}a_1\right)}{2}\right)=-\frac{3}{5}a_1\left(4a_1-\frac{18}{5}a_1\right)=-\frac{6a_1^2}{25}<0.$$

故选：B.

点评：本题考查了等差数列和等比数列的性质，考查了等差数列的前n项和，是基础题.

4.（5分）（2015•浙江）命题"$\forall n\in N^*$，$f(n)\in N^*$且$f(n)\le n$"的否定形式是（　　）

A. $\forall n\in N^*$，$f(n)\notin N^*$且$f(n)>n$　B. $\forall n\in N^*$，$f(n)\notin N^*$或$f(n)>n$

C. $\exists n_0\in N^*$，$f(n_0)\notin N^*$且$f(n_0)>n_0$　D. $\exists n_0\in N^*$，$f(n_0)\notin N^*$或$f(n_0)>n_0$

考点：命题的否定.

专题：简易逻辑.

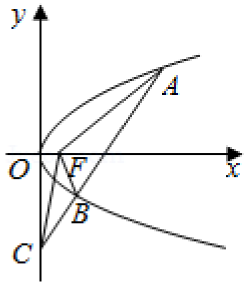
分析：根据全称命题的否定是特称命题即可得到结论.

析：

解答：解：命题为全称命题，
则命题的否定为：$\exists n_0 \in N^*$，f（n_0）$\notin N^*$或 f（n_0）$> n_0$，
故选：D．

点评：本题主要考查含有量词的命题的否定，比较基础．

5．（5 分）（2015•浙江）如图，设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，不经过焦点的直线上有三个不同的点 A，B，C，其中点 A，B 在抛物线上，点 C 在 y 轴上，则△BCF 与△ACF 的面积之比是（　　）



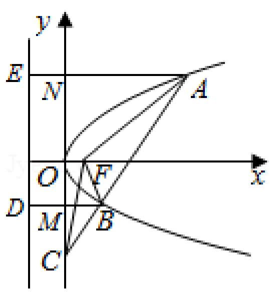
A．$\frac{|BF|-1}{|AF|-1}$　　B．$\frac{|BF|^2-1}{|AF|^2-1}$　　C．$\frac{|BF|+1}{|AF|+1}$　　D．$\frac{|BF|^2+1}{|AF|^2+1}$

考点：直线与圆锥曲线的关系．

专题：圆锥曲线的定义、性质与方程．

分析：根据抛物线的定义，将三角形的面积关系转化为$\frac{|BC|}{|AC|}$的关系进行求解即可．

解答：解：如图所示，抛物线的准线 DE 的方程为 x=－1，
过 A，B 分别作 AE⊥DE 于 E，交 y 轴于 N，BD⊥DE 于 E，交 y 轴于 M，
由抛物线的定义知 BF=BD，AF=AE，
则|BM|=|BD|－1=|BF|－1，
|AN|=|AE|－1=|AF|－1，
则$\frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle ACF}}=\frac{|BC|}{|AC|}=\frac{|BM|}{|AN|}=\frac{|BF|-1}{|AF|-1}$，
故选：A



点评：本题主要考查三角形的面积关系，利用抛物线的定义进行转化是解决本题的关键．

6．（5分）（2015•浙江）设A，B是有限集，定义：d（A，B）=card（A∪B）﹣card（A∩B），其中card（A）表示有限集A中的元素个数（　　）

命题①：对任意有限集A，B，“A≠B”是“d（A，B）＞0”的充分必要条件；

命题②：对任意有限集A，B，C，d（A，C）≤d（A，B）+d（B，C）

A．命题①和命题②都成立　　B．命题①和命题②都不成立

C．命题①成立，命题②不成立　　D．命题①不成立，命题②成立

考点：复合命题的真假．

专题：集合；简易逻辑．

分析：命题①根据充要条件分充分性和必要性判断即可，
③借助新定义，根据集合的运算，判断即可．

解答：解：命题①：对任意有限集A，B，若“A≠B”，则A∪B≠A∩B，则card（A∪B）＞card（A∩B），故“d（A，B）＞0”成立，

若d（A，B）＞0”，则card（A∪B）＞card（A∩B），则A∪B≠A∩B，故A≠B成立，故命题①成立，

命题②，d（A，B）=card（A∪B）﹣card（A∩B），d（B，C）=card（B∪C）﹣card（B∩C），

∴d（A，B）+d（B，C）=card（A∪B）﹣card（A∩B）+card（B∪C）﹣card（B∩C）=[card（A∪B）+card（B∪C）]﹣[card（A∩B）+card（B∩C）]

≥card（A∪C）﹣card（A∩C）=d（A，C），故命题②成立，

故选：A

点评：本题考查了，元素和集合的关系，以及逻辑关系，分清集合之间的关系与各集合元素个数之间的关系，注意本题对充要条件的考查．集合的元素个数，体现两个集合的关系，但仅凭借元素个数不能判断集合间的关系，属于基础题．

7．（5分）（2015•浙江）存在函数f（x）满足，对任意x∈R都有（　　）

A．$f(\sin 2x)=\sin x$　　B．$f(\sin 2x)=x^2+x$　　C．$f(x^2+1)=|x+1|$　　D．$f(x^2+2x)=|x+1|$

考点：函数解析式的求解及常用方法．

专题：函数的性质及应用．

分析：利用x取特殊值，通过函数的定义判断正误即可．

解答：解：A．取x=0，则sin2x=0，∴f（0）=0；

取$x=\frac{\pi}{2}$，则sin2x=0，∴f（0）=1；

∴f（0）=0，和1，不符合函数的定义；

∴不存在函数f（x），对任意x∈R都有f（sin2x）=sinx；

B．取 $x=0$，则 $f（0）=0$；

取 $x=\pi$，则 $f（0）=\pi^2+\pi$；

∴$f（0）$有两个值，不符合函数的定义；

∴该选项错误；

C．取 $x=1$，则 $f（2）=2$，取 $x=-1$，则 $f（2）=0$；

这样 $f（2）$有两个值，不符合函数的定义；

∴该选项错误；

D．令$|x+1|=t$，$t\geq 0$，则 $f（t^2-1）=t$；

令 $t^2-1=x$，则 $t=\sqrt{x+1}$；

∴$f（x）=\sqrt{x+1}$；

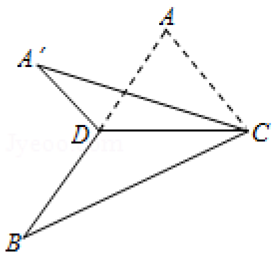
即存在函数 $f（x）=\sqrt{x+1}$，对任意 $x\in R$，都有 $f（x^2+2x）=|x+1|$；

∴该选项正确．

故选：D．

点评：本题考查函数的定义的应用，基本知识的考查，但是思考问题解决问题的方法比较难．

8．（5 分）（2015•浙江）如图，已知△ABC，D 是 AB 的中点，沿直线 CD 将△ACD 折成△A′CD，所成二面角 A′－CD－B 的平面角为 α，则（　　）



A．∠A′DB≤α　　B．∠A′DB≥α　　C．∠A′CB≤α　　D．∠A′CB≥α

考点：二面角的平面角及求法．

专题：创新题型；空间角．

分析：解：画出图形，分 AC=BC，AC≠BC 两种情况讨论即可．

解答：解：①当 AC=BC 时，∠A′DB=α；

②当 AC≠BC 时，如图，点 A′投影在 AE 上，

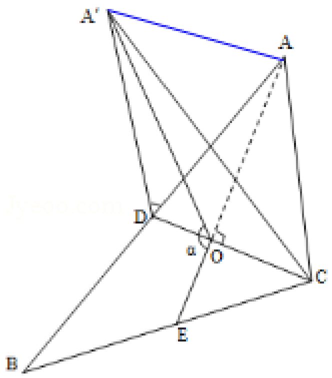
α=∠A′OE，连结 AA′，

易得∠ADA′＜∠AOA′，

∴∠A′DB＞∠A′OE，即∠A′DB＞α

综上所述，∠A′DB≥α，

故选：B．



点评：本题考查空间角的大小比较，注意解题方法的积累，属于中档题．

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分．

9．（6 分）（2015•浙江）双曲线$\frac{x^2}{2}-y^2=1$的焦距是____________，渐近线方程是____________．

考点：双曲线的简单性质．

专题：计算题；圆锥曲线的定义、性质与方程．

分析：确定双曲线中的几何量，即可求出焦距、渐近线方程．

解答：解：双曲线$\frac{x^2}{2}-y^2=1$中，$a=\sqrt{2}$，$b=1$，$c=\sqrt{3}$，

∴焦距是$2c=2\sqrt{3}$，渐近线方程是$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$．

故答案为：$2\sqrt{3}$；$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$．

点评：本题考查双曲线的方程与性质，考查学生的计算能力，比较基础．

10．（6 分）（2015•浙江）已知函数$f(x)=\begin{cases}x+\frac{2}{x}-3, & x\geqslant 1\\ \lg(x^2+1), & x<1\end{cases}$，则 f(f(﹣3))=____________，f（x）的最小值是____________．

考点：函数的值．

专题：计算题；函数的性质及应用．

分析：根据已知函数可先求 f（﹣3）=1，然后代入可求 f（f（﹣3））；由于 x≥1 时，f（x）$=x+\frac{2}{x}-3$，当 x＜1 时，f（x）=lg（x^2+1），分别求出每段函数的取值范围，即可求解

解答：解：$\because f(x)=\begin{cases} x+\frac{2}{x}-3, & x\geqslant 1 \\ \lg(x^2+1), & x<1 \end{cases}$，

$\therefore f(-3)=\lg 10=1$，

则 $f(f(-3))=f(1)=0$，

当 $x\geq 1$ 时，$f(x)=x+\frac{2}{x}-3\geqslant 2\sqrt{2}-3$，即最小值 $2\sqrt{2}-3$，

当 $x<1$ 时，$x^2+1\geq 1$，$(x)=\lg(x^2+1)\geq 0$ 最小值 0，

故 $f(x)$ 的最小值是 $2\sqrt{2}-3$.

故答案为：0；$2\sqrt{2}-3$.

点评：本题主要考查了分段函数的函数值的求解，属于基础试题.

11.（6 分）（2015•浙江）函数 $f(x)=\sin^2x+\sin x\cos x+1$ 的最小正周期是____________，单调递减区间是____________.

考点：两角和与差的正弦函数；三角函数的周期性及其求法；正弦函数的单调性.

专题：三角函数的求值.

分析：由三角函数公式化简可得 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})+\frac{3}{2}$，易得最小正周期，解不等式 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leq 2x-\frac{\pi}{4}\leq 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$ 可得函数的单调递减区间.

解答：解：化简可得 $f(x)=\sin^2x+\sin x\cos x+1$

$=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)+\frac{1}{2}\sin 2x+1$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})+\frac{3}{2}$，

$\therefore$原函数的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，

由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leq 2x-\frac{\pi}{4}\leq 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$ 可得 $k\pi+\frac{3\pi}{8}\leq x\leq k\pi+\frac{7\pi}{8}$，

$\therefore$函数的单调递减区间为 $[k\pi+\frac{3\pi}{8}, k\pi+\frac{7\pi}{8}]$（$k\in Z$）

故答案为：π；$[k\pi+\frac{3\pi}{8}, k\pi+\frac{7\pi}{8}]$（$k\in Z$）

点评：本题考查三角函数的化简，涉及三角函数的周期性和单调性，属基础题.

12.（4 分）（2015•浙江）若 $a=\log_4 3$，则 $2^a+2^{-a}=$____________.

考点：对数的运算性质.

专题：函数的性质及应用.

分析：直接把 a 代入 2^a+2^{-a}，然后利用对数的运算性质得答案．

解答：解：∵$a=\log_4 3$，可知 $4^a=3$，

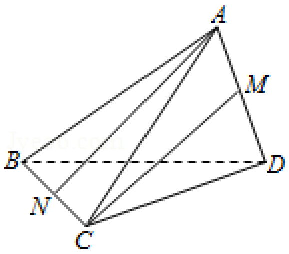
即 $2^a=\sqrt{3}$，

所以 $2^a+2^{-a}=\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$．

故答案为：$\frac{4\sqrt{3}}{3}$．

点评：本题考查对数的运算性质，是基础的计算题．

13．（4 分）（2015•浙江）如图，三棱锥 A﹣BCD 中，AB=AC=BD=CD=3，AD=BC=2，点 M，N 分别是 AD，BC 的中点，则异面直线 AN，CM 所成的角的余弦值是____________．



考点：异面直线及其所成的角．

专题：空间角．

分析：连结 ND，取 ND 的中点为：E，连结 ME 说明异面直线 AN，CM 所成的角就是∠EMC 通过解三角形，求解即可．

解答：解：连结 ND，取 ND 的中点为：E，连结 ME，则 ME∥AN，异面直线 AN，CM 所成的角就是∠EMC，

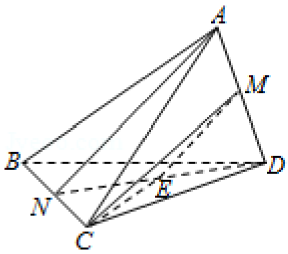
∵$AN=2\sqrt{2}$，

∴$ME=\sqrt{2}=EN$，$MC=2\sqrt{2}$，

又∵EN⊥NC，∴$EC=\sqrt{EN^2+NC^2}=\sqrt{3}$，

∴$\cos\angle EMC=\frac{EM^2+MC^2-EC^2}{2EM\cdot MC}=\frac{2+8-3}{2\times\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}}=\frac{7}{8}$．

故答案为：$\frac{7}{8}$．



点评：本题考查异面直线所成角的求法，考查空间想象能力以及计算能力．

14．（4 分）（2015•浙江）若实数 x，y 满足 $x^2+y^2\le1$，则$|2x+y-2|+|6-x-3y|$的最小值是__________.

考点：函数的最值及其几何意义．

专题：不等式的解法及应用；直线与圆．

分析：根据所给 x，y 的范围，可得$|6-x-3y|=6-x-3y$，再讨论直线 $2x+y-2=0$ 将圆 $x^2+y^2=1$ 分成两部分，分别去绝对值，运用线性规划的知识，平移即可得到最小值．

解答：解：由 $x^2+y^2\le1$，可得 $6-x-3y>0$，即$|6-x-3y|=6-x-3y$，

如图直线 $2x+y-2=0$ 将圆 $x^2+y^2=1$ 分成两部分，

在直线的上方（含直线），即有 $2x+y-2\ge0$，即$|2+y-2|=2x+y-2$，

此时$|2x+y-2|+|6-x-3y|=(2x+y-2)+(6-x-3y)=x-2y+4$，

利用线性规划可得在 A（$\frac{3}{5}$，$\frac{4}{5}$）处取得最小值 3；

在直线的下方（含直线），即有 $2x+y-2\le0$，

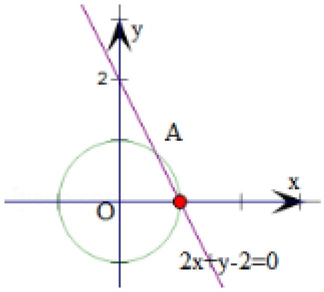
即$|2+y-2|=-(2x+y-2)$，

此时$|2x+y-2|+|6-x-3y|=-(2x+y-2)+(6-x-3y)=8-3x-4y$，

利用线性规划可得在 A（$\frac{3}{5}$，$\frac{4}{5}$）处取得最小值 3．

综上可得，当 $x=\frac{3}{5}$，$y=\frac{4}{5}$时，$|2x+y-2|+|6-x-3y|$的最小值为 3．

故答案为：3．



点评：本题考查直线和圆的位置关系，主要考查二元函数在可行域内取得最值的方法，属于中档题．

15．（6 分）（2015•浙江）已知$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$是空间单位向量，$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=\frac{1}{2}$，若空间向量$\vec{b}$满足

$\vec{b}\cdot\vec{e}_1=2$，$\vec{b}\cdot\vec{e}_2=\frac{5}{2}$，且对于任意 x，y∈R，

$|\vec{b}-(x\vec{e_1}+y\vec{e_2})|\geqslant|\vec{b}-(x_0\vec{e_1}+y_0\vec{e_2})|=1$（$x_0$，$y_0\overrightarrow{\in R)}$，则

x_0=__________，y_0=__________，$|\vec{b}|$=__________.

考点：空间向量的数量积运算；平面向量数量积的运算．

专题：创新题型；空间向量及应用．

题：

分析：由题意和数量积的运算可得$<\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}>=\frac{\pi}{3}$，不妨设$\overrightarrow{e_1}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$\overrightarrow{e_2}=(1,0,0)$，由已知可解$\overrightarrow{b}=(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},t)$，可得$|\overrightarrow{b}-(x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2})|^2=(x+\frac{y-4}{2})^2+\frac{3}{4}(y-2)^2+t^2$，由题意可得当$x=x_0=1$，$y=y_0=2$时，$(x+\frac{y-4}{2})^2+\frac{3}{4}(y-2)^2+t^2$取最小值1，由模长公式可得$|\overrightarrow{b}|$.

解答：解：$\because\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}=|\overrightarrow{e_1}||\overrightarrow{e_2}|\cos<\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}>=\cos<\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}>=\frac{1}{2}$，

$\therefore<\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}>=\frac{\pi}{3}$，不妨设$\overrightarrow{e_1}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$\overrightarrow{e_2}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{b}=(m,n,t)$，

则由题意可知$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{e_1}=\frac{1}{2}m+\frac{\sqrt{3}}{2}n=2$，$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{e_2}=m=\frac{5}{2}$，解得$m=\frac{5}{2}$，$n=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore\overrightarrow{b}=(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},t)$，

$\because\overrightarrow{b}-(x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2})=(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}x-y,\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}x,t)$，

$\therefore|\overrightarrow{b}-(x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2})|^2=(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}x-y)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2+t^2$

$=x^2+xy+y^2-4x-5y+t^2+7=(x+\frac{y-4}{2})^2+\frac{3}{4}(y-2)^2+t^2$，

由题意当$x=x_0=1$，$y=y_0=2$时，$(x+\frac{y-4}{2})^2+\frac{3}{4}(y-2)^2+t^2$取最小值1，

此时$t^2=1$，故$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{(\frac{5}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+t^2}=2\sqrt{2}$

故答案为：1；2；$2\sqrt{2}$

点评：本题考查空间向量的数量积，涉及向量的模长公式，属中档题．

三、解答题：本大题共5小题，共74分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

16．16．（14分）（2015•浙江）在△ABC中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，已知$A=\frac{\pi}{4}$，$b^2-a^2=\frac{1}{2}c^2$．

（1）求tanC的值；

（2）若△ABC的面积为3，求b的值．

考点：余弦定理．

专题：解三角形．

分析：（1）由余弦定理可得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{4}$，已知$b^2-a^2=\frac{1}{2}c^2$．可得$b=\frac{3\sqrt{2}c}{4}$，$a=\frac{\sqrt{10}}{4}c$．利用余弦定理可得cosC．可得$\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}$，即可得出$\tan C=\frac{\sin C}{\cos C}$．

（2）由$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{4}c\times\frac{3\sqrt{2}}{4}c\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=3$，可得c，即可得出b．

解答：解：（1）∵$A=\frac{\pi}{4}$，∴由余弦定理可得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{4}$，∴$b^2-a^2=\sqrt{2}bc-c^2$，

又$b^2-a^2=\frac{1}{2}c^2$．∴$\sqrt{2}bc-c^2=\frac{1}{2}c^2$．∴$\sqrt{2}b=\frac{3}{2}c$．可得$b=\frac{3\sqrt{2}c}{4}$，

∴$a^2=b^2-\frac{1}{2}c^2=\frac{5}{8}c^2$，即$a=\frac{\sqrt{10}}{4}c$．

∴$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\frac{5}{8}c^2+\frac{9}{8}c^2-c^2}{2\times\frac{\sqrt{10}}{4}c\times\frac{3\sqrt{2}}{4}c}=\frac{\sqrt{5}}{5}$．

∵C∈（0，π），

∴$\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$．

∴$\tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=2$．

（2）∵$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{4}c\times\frac{3\sqrt{2}}{4}c\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=3$，

解得$c=2\sqrt{2}$．

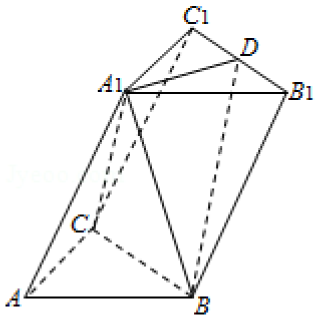
∴$b=\frac{3\sqrt{2}c}{4}=3$．

点评：本题考查了正弦定理余弦定理、同角三角形基本关系式、三角形面积计算公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题．

17．（15分）（2015•浙江）如图，在三棱柱ABC﹣$A_1B_1C_1$中，∠BAC=90°，AB=AC=2，$A_1A=4$，A_1在底面ABC的射影为BC的中点，D是B_1C_1的中点．

（1）证明：$A_1D\perp$平面A_1BC；

（2）求二面角A_1﹣BD﹣B_1的平面角的余弦值．



考点：二面角的平面角及求法；直线与平面垂直的判定．

专题：空间位置关系与距离；空间角．

分析：（1）以BC中点O为坐标原点，以OB、OA、OA_1所在直线分别为x、y、z轴建系，通过$\overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{BC}=0$及线面垂直的判定定理即得结论；

（2）所求值即为平面A_1BD的法向量与平面B_1BD的法向量的夹角的余弦值的绝对值的相反数，计算即可．

解（1）证明：如图，以BC中点O为坐标原点，以OB、OA、OA_1所在直线分别为

答： x、y、z 轴建系．

则 $BC=\sqrt{2}AC=2\sqrt{2}$，$A_1O=\sqrt{AA_1^{\ 2}-AO^2}=\sqrt{14}$，

易知 A_1（0，0，$\sqrt{14}$），B（$\sqrt{2}$，0，0），C（$-\sqrt{2}$，0，0），
A（0，$\sqrt{2}$，0），D（0，$-\sqrt{2}$，$\sqrt{14}$），B_1（$\sqrt{2}$，$-\sqrt{2}$，$\sqrt{14}$），

$\overrightarrow{A_1D}=(0,\ -\sqrt{2},\ 0)$，$\overrightarrow{BD}=(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ \sqrt{14})$，

$\overrightarrow{B_1D}=(-\sqrt{2},\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{BC}=(-2\sqrt{2},\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{OA_1}=(0,\ 0,\ \sqrt{14})$，

∵$\overrightarrow{A_1D}\bullet\overrightarrow{OA_1}=0$，∴$A_1D\perp OA_1$，

又∵$\overrightarrow{A_1D}\bullet\overrightarrow{BC}=0$，∴$A_1D\perp BC$，

又∵$OA_1\cap BC=O$，∴$A_1D\perp$平面 A_1BC；

（2）解：设平面 A_1BD 的法向量为$\vec{m}=(x,\ y,\ z)$，

由$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BD}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}-\sqrt{2}y=0\\ -\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+\sqrt{14}z=0\end{cases}$，

取 z=1，得$\vec{m}=(\sqrt{7},\ 0,\ 1)$，

设平面 B_1BD 的法向量为$\vec{n}=(x,\ y,\ z)$，

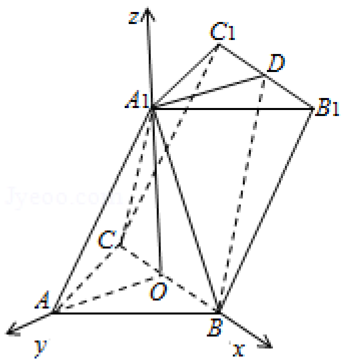
由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1D}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+\sqrt{14}z=0\\ -\sqrt{2}x=0\end{cases}$，

取 z=1，得$\vec{n}=(0,\ \sqrt{7},\ 1)$，

∴$\cos<\vec{m},\ \vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{8}$，

又∵该二面角为钝角，

∴二面角 A_1-BD-B_1 的平面角的余弦值为$-\dfrac{1}{8}$.



点 本题考查空间中线面垂直的判定定理，考查求二面角的三角函数值，注意解题方法

评： 的积累，属于中档题．

18．（15 分）（2015•浙江）已知函数 f（x）=x^2+ax+b（a，b∈R），记 M（a，b）是|f（x）|在区间[﹣1，1]上的最大值．
（1）证明：当|a|≥2 时，M（a，b）≥2；
（2）当 a，b 满足 M（a，b）≤2 时，求|a|+|b|的最大值．

考点： 二次函数在闭区间上的最值．

专题： 函数的性质及应用．

分析： （1）明确二次函数的对称轴，区间的端点值，由 a 的范围明确函数的单调性，结合已知以及三角不等式变形所求得到证明；
（2）讨论 a=b=0 以及分析 M（a，b）≤2 得到﹣3≤a+b≤1 且﹣3≤b﹣a≤1，进一步求出|a|+|b|的求值．

解答： 解：（1）由已知可得 f（1）=1+a+b，f（﹣1）=1﹣a+b，对称轴为 $x=-\frac{a}{2}$，

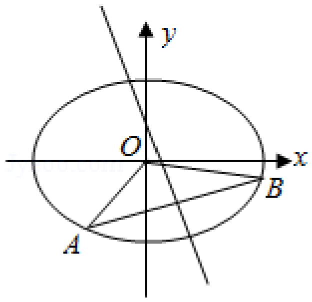
因为|a|≥2，所以 $-\frac{a}{2}\leqslant-1$或 $-\frac{a}{2}\geq1$，

所以函数 f（x）在[﹣1，1]上单调，
所以 M（a，b）=max{|f（1）|，|f（﹣1）|}=max{|1+a+b|，|1﹣a+b|}，
所以 M（a，b）$\geq\frac{1}{2}$（|1+a+b|+|1﹣a+b|）$\geq\frac{1}{2}$|（1+a+b）﹣（1﹣a+b）|$\geq\frac{1}{2}$|2a|≥2；

（2）当 a=b=0 时，|a|+|b|=0 又|a|+|b|≥0，所以 0 为最小值，符合题意；
又对任意 x∈[﹣1，1]．有﹣2≤x^2+ax+b≤2 得到﹣3≤a+b≤1 且﹣3≤b﹣a≤1，易知|a|+|b|=max{|a﹣b|，|a+b|}=3，在 b=﹣1，a=2 时符合题意，
所以|a|+|b|的最大值为 3．

点评： 本题考查了二次函数闭区间上的最值求法；解答本题的关键是正确理解 M（a，b）是|f（x）|在区间[﹣1，1]上的最大值，以及利用三角不等式变形．

19．（15 分）（2015•浙江）已知椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$上两个不同的点 A，B 关于直线 $y=mx+\frac{1}{2}$对称．
（1）求实数 m 的取值范围；
（2）求△AOB 面积的最大值（O 为坐标原点）．



考点：直线与圆锥曲线的关系．

专题：创新题型；圆锥曲线中的最值与范围问题．

分析：（1）由题意，可设直线AB的方程为x=－my+n，代入椭圆方程可得（m^2+2）$y^2-2mny+n^2-2=0$，设A（x_1，y_1），B（x_2，y_2）．可得△＞0，设线段AB的中点P（x_0，y_0），利用中点坐标公式及其根与系数的可得P，代入直线$y=mx+\frac{1}{2}$，可得$n=-\frac{m^2+2}{2m}$，代入△＞0，即可解出．

（2）直线AB与x轴交点横坐标为n，可得$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|n||y_1-y_2|$，再利用均值不等式即可得出．

解答：解：（1）由题意，可设直线AB的方程为x=－my+n，代入椭圆方程$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，可得（m^2+2）$y^2-2mny+n^2-2=0$，

设A（x_1，y_1），B（x_2，y_2）．由题意，$\triangle=4m^2n^2-4(m^2+2)(n^2-2)=8(m^2-n^2+2)>0$，

设线段AB的中点P（x_0，y_0），则$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{mn}{m^2+2}$．$x_0=-m\times\frac{mn}{m^2+2}+n=\frac{2n}{m^2+2}$，

由于点P在直线$y=mx+\frac{1}{2}$上，$\therefore\frac{mn}{m^2+2}=\frac{2mn}{m^2+2}+\frac{1}{2}$，

$\therefore n=-\frac{m^2+2}{2m}$，代入△＞0，可得$3m^4+4m^2-4>0$，

解得$m^2>\frac{2}{3}$，$\therefore m<-\frac{\sqrt{6}}{3}$或$m>\frac{\sqrt{6}}{3}$．

（2）直线AB与x轴交点纵坐标为n，

$\therefore S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|n||y_1-y_2|=\frac{1}{2}|n|\cdot\frac{\sqrt{8(m^2-n^2+2)}}{m^2+2}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{n^2(m^2-n^2+2)}{(m^2+2)^2}}$，

由均值不等式可得：$n^2(m^2-n^2+2)\leqslant\left(\frac{n^2+m^2-n^2+2}{2}\right)^2=\frac{(m^2+2)^2}{4}$，

$\therefore S_{\triangle AOB}\leqslant\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，当且仅当 $n^2=m^2-n^2+2$，即 $2n^2=m^2+2$，又$\because n=-\frac{m^2+2}{2m}$，解得 $m=\pm\sqrt{2}$，

当且仅当 $m=\pm\sqrt{2}$时，$S_{\triangle AOB}$ 取得最大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

点评：本题考查了椭圆的定义标准方程及其性质、直线与椭圆相交问题转化为方程联立可得根与系数的关系、中点坐标公式、线段垂直平分线的性质、三角形面积计算公式、弦长公式、均值不等式的性质，考查了推理能力与计算能力，属于难题.

20.（15 分）20.（15 分）（2015•浙江）已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=\frac{1}{2}$且 $a_{n+1}=a_n-a_n^2$（$n\in N^*$）

（1）证明：$1\leq\frac{a_n}{a_{n+1}}\leq 2$（$n\in N^*$）；

（2）设数列$\{a_n^2\}$的前 n 项和为 S_n，证明$\frac{1}{2(n+2)}\leqslant\frac{S_n}{n}\leqslant\frac{1}{2(n+1)}$（$n\in N^*$）.

考点：数列的求和；数列与不等式的综合.

专题：创新题型；点列、递归数列与数学归纳法.

分析：（1）通过题意易得 $0<a_n\leq\frac{1}{2}$（$n\in N^*$），利用 $a_n-a_{n+1}=a_n^2$可得$\frac{a_n}{a_{n+1}}\geq 1$，利用

$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{a_n}{a_n-a_n^2}=\frac{1}{1-a_n}\leq 2$，即得结论；

（2）通过 $a_n^2=a_n-a_{n+1}$ 累加得 $S_n=\frac{1}{2}-a_{n+1}$，利用数学归纳法可证明$\frac{1}{1+n}\geq a_n\geq\frac{1}{2n}$（$n\geq 2$），从而$\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2(n+1)}}{n}\geq\frac{\frac{1}{2}-a_{n+1}}{n}\geq\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}}{n}$，化简即得结论.

解答：证明：（1）由题意可知：$0<a_n\leq\frac{1}{2}$（$n\in N^*$），

又$\because a_2=a_1-a_1^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$，$\therefore\frac{a_1}{a_2}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=2$，

又$\because a_n-a_{n+1}=a_n^2$，$\therefore a_n>a_{n+1}$，$\therefore\frac{a_n}{a_{n+1}}\geq 1$，

$\therefore\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{a_n}{a_n-a_n^2}=\frac{1}{1-a_n}\leq 2$，

$\therefore 1\leq\frac{a_n}{a_{n+1}}\leq 2$（$n\in N^*$）；

（2）由已知，$a_n^2=a_n-a_{n+1}$，$a_{n-1}^2=a_{n-1}-a_n$，…，$a_1^2=a_1-a_2$，

累加，得 $S_n=a_n^2+a_{n-1}^2+\ldots+a_1^2=a_1-a_{n+1}=\frac{1}{2}-a_{n+1}$，

易知当 n=1 时，要证式子显然成立；

当 n≥2 时，$\frac{S_n}{n}=\frac{\frac{1}{2}-a_{n+1}}{n}$.

下面证明：$\frac{1}{1+n}\geq a_n\geq\frac{1}{2n}$（n≥2）.

易知当 n=2 时成立，假设当 n=k 时也成立，则 $a_{k+1}=-\left(a_k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$，

由二次函数单调性知：$a_{n+1}\geq-\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}=\frac{2k-1}{4k^2}\geq\frac{1}{2(k+1)}$，

$a_{n+1}\leq-\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}=\frac{k}{(k+1)^2}\leq\frac{1}{k+2}$，

$\therefore\frac{1}{2(k+1)}\leq\frac{1}{a_{k+1}}\leq\frac{1}{k+2}$，即当 n=k+1 时仍然成立，

故对 n≥2，均有$\frac{1}{1+n}\geq a_n\geq\frac{1}{2n}$，

$\therefore\frac{1}{2(n+1)}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2(n+1)}}{n}\geq\frac{\frac{1}{2}-a_{n+1}}{n}\geq\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}}{n}=\frac{1}{2(n+2)}$，

即$\frac{1}{2(n+2)}\leqslant\frac{S_n}{n}\leqslant\frac{1}{2(n+1)}$（$n\in N^*$）.

点评：本题是一道数列与不等式的综合题，考查数学归纳法，对表达式的灵活变形是解决本题的关键，注意解题方法的积累，属于难题．