

2025年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 150 分，考试用时 120 分钟。第 I 卷 1 至 3 页第 II 卷 4 至 6 页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。在天津考生获取更多学习资料祝各位考生考试顺利！

第 I 卷（选择题）

注意事项：

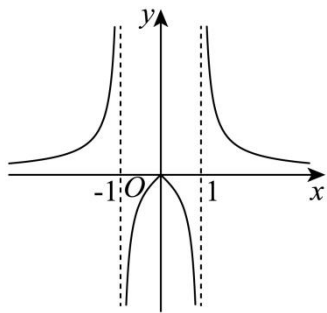
1. 每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。
2. 本卷共 9 小题，每小题 5 分，共 45 分。

参考公式：

- 如果事件 A, B 互斥，那么 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- 如果事件 A, B 相互独立，那么 $P(AB) = P(A)P(B)$
- 棱柱的体积公式 $V = \frac{1}{3}Sh$ ，其中 S 表示棱柱的底面面积， h 表示棱柱的高。
- 圆锥的体积公式 $V = \frac{1}{3}Sh$ ，其中 S 表示圆锥的底面面积， h 表示圆锥的高。

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1. 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ ，则 $\complement_U(A \cup B) = ()$
A. $\{1, 2, 3, 4\}$ B. $\{2, 3, 4\}$ C. $\{2, 4\}$ D. $\{4\}$
2. 设 $x \in \mathbf{R}$ ，则“ $x = 0$ ”是“ $\sin 2x = 0$ ”的 ()
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 已知函数 $y = f(x)$ 的图象如下，则 $f(x)$ 的解析式可能为 ()



A. $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ B. $f(x) = \frac{x}{|x|-1}$ C. $f(x) = \frac{|x|}{1-x^2}$ D. $f(x) = \frac{|x|}{x^2-1}$

4. 若 m 为直线, α, β 为两个平面, 则下列结论中正确的是 ()

- A. 若 $m \parallel \alpha, n \subset \alpha$, 则 $m \parallel n$ B. 若 $m \perp \alpha, m \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$
 C. 若 $m \parallel \alpha, m \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$ D. 若 $m \subset \alpha, \alpha \perp \beta$, 则 $m \perp \beta$

5. 下列说法中错误的是 ()

- A. 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(X \leq \mu - \sigma) = P(X \geq \mu + \sigma)$
 B. 若 $X \sim N(1, 2^2), Y \sim N(2, 2^2)$, 则 $P(X < 1) < P(Y < 2)$
 C. $|r|$ 越接近 1, 相关性越强
 D. $|r|$ 越接近 0, 相关性越弱

6. $S_n = -n^2 + 8n$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 12 项和为 ()

- A. 112 B. 48 C. 80 D. 64

7. 函数 $f(x) = 0.3^x - \sqrt{x}$ 的零点所在区间是 ()

- A. (0, 0.3) B. (0.3, 0.5) C. (0.5, 1) D. (1, 2)

8. $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, -\pi < \varphi < \pi)$, 在 $[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}]$ 上单调递增, 且 $x = \frac{\pi}{12}$ 为它的一条对称轴, $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 是它的一个对称中心, 当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $f(x)$ 的最小值为 ()

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 1 D. 0

9. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 以右焦点 F_2 为焦点的抛物线

$y^2 = 2px (p > 0)$ 与双曲线交于另一象限点为 P , 若 $|PF_1| + |PF_2| = 3|F_1F_2|$, 则双曲线的离心率 $e = ()$

- A. 2 B. 5 C. $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

第II卷（非选择题）

注意事项：

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上.

2. 本卷共 11 小题，共 105 分.

二、填空题：本大题共 6 个小题，每小题 5 分，共 30 分.

10. 已知 i 是虚数单位，则 $\left|\frac{3+i}{i}\right| =$ _____.

11. 在 $(x-1)^6$ 的展开式中， x^3 项的系数为 _____.

12. $l_1: x-y+6=0$ ，与 x 轴交于点 A ，与 y 轴交于点 B ，与 $(x+1)^2+(y-3)^2=r^2$ 交于 C 、 D 两点， $|AB|=3|CD|$ ，则 $r =$ _____.

13. 小桐操场跑圈，一周 2 次，一次 5 圈或 6 圈. 第一次跑 5 圈或 6 圈的概率均为 0.5，若第一次跑 5 圈，则第二次跑 5 圈的概率为 0.4，6 圈的概率为 0.6；若第一次跑 6 圈，则第二次跑 5 圈的概率为 0.6，6 圈的概率为 0.4. 小桐一周跑 11 圈的概率为 _____；若一周至少跑 11 圈为动量达标，则连续跑 4 周，记合格周数为 X ，则期望 $E(x) =$ _____.

14. $\forall \triangle ABC$ 中， D 为 AB 边中点， $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ ， $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，则 $\overrightarrow{AE} =$ _____（用 \vec{a} ， \vec{b} 表示），若 $|\overrightarrow{AE}| = 5$ ， $AE \perp CB$ ，则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CD} =$ _____.

15. 若 $a, b \in \mathbb{R}$ ，对 $\forall x \in [-2, 2]$ ，均有 $(2a+b)x^2 + bx - a - 1 \leq 0$ 恒成立，则 $2a+b$ 的最小值为 _____.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 75 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

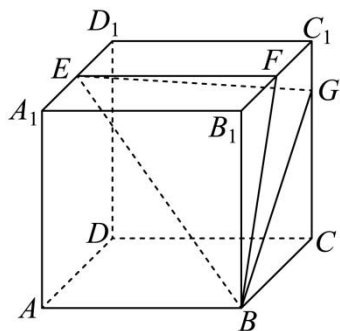
16. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $a \sin B = \sqrt{3}b \cos A$ ， $c - 2b = 1$ ， $a = \sqrt{7}$.

(1) 求 A 的值；

(2) 求 c 的值；

(3) 求 $\sin(A+2B)$ 的值.

17. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4， E 、 F 分别为 A_1D_1 、 C_1B_1 中点， $CG = 3GC_1$.



(1) 求证: $GF \perp$ 平面 FBE ;

(2) 求平面 FBE 与平面 EBG 夹角的余弦值;

(3) 求三棱锥 $D-FBE$ 的体积.

18. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 右顶点为 A , P 为 $x = a$ 上一点, 且直线 PF 的斜率为 $\frac{1}{3}$, $\triangle PFA$ 的面积为 $\frac{3}{2}$, 离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 过点 P 的直线与椭圆有唯一交点 B (异于点 A), 求证: PF 平分 $\angle AFB$.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, $a_1 = b_1 = 2, a_2 = b_2 + 1, a_3 = b_3$.

(1) 求 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, I \in \{0, 1\}$, 有 $T_n = \{p_1 a_1 b_1 + p_2 a_2 b_2 + \dots + p_{n-1} a_{n-1} b_{n-1} + p_n a_n b_n \mid p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n \in I\}$,

(i) 求证: 对任意实数 $t \in T_n$, 均有 $t < a_{n+1} b_{n+1}$;

(ii) 求 T_n 所有元素之和.

20. 已知函数 $f(x) = ax - (\ln x)^2$

(1) $a = 1$ 时, 求 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) $f(x)$ 有 3 个零点, x_1, x_2, x_3 且 $(x_1 < x_2 < x_3)$.

(i) 求 a 的取值范围;

(ii) 证明 $(\ln x_2 - \ln x_1) \cdot \ln x_3 < \frac{4e}{e-1}$.

1. D

【分析】由集合的并集、补集的运算即可求解.

【详解】由 $A = \{1, 3\}, B = \{2, 3, 5\}$, 则 $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$,

集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

故 $\complement_U(A \cup B) = \{4\}$

故选: D.

2. A

【分析】通过判断是否能相互推出, 由充分条件与必要条件的定义可得.

【详解】由 $x = 0 \Rightarrow \sin 2x = \sin 0 = 0$, 则“ $x = 0$ ”是“ $\sin 2x = 0$ ”的充分条件;

又当 $x = \pi$ 时, $\sin 2x = \sin 2\pi = 0$, 可知 $\sin 2x = 0 \not\Rightarrow x = 0$,

故“ $x = 0$ ”不是“ $\sin 2x = 0$ ”的必要条件,

综上所述, “ $x = 0$ ”是“ $\sin 2x = 0$ ”的充分不必要条件.

故选: A.

3. D

【分析】先由函数奇偶性排除 AB, 再由 $x \in (0, 1)$ 时函数值正负情况可得解.

【详解】由图可知函数为偶函数, 而函数 $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ 和函数 $f(x) = \frac{x}{|x|-1}$ 为奇函数, 故排除选项 AB;

除选项 AB;

又当 $x \in (0, 1)$ 时 $1-x^2 > 0, x^2-1 < 0$, 此时 $f(x) = \frac{|x|}{1-x^2} > 0, f(x) = \frac{|x|}{x^2-1} < 0$,

由图可知当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) < 0$, 故 C 不符合, D 符合.

故选: D

4. C

【分析】根据线面平行的定义可判断 A 的正误, 根据空间中垂直关系的转化可判断 BCD 的正误.

【详解】对于 A, 若 $m // \alpha, n \subset \alpha$, 则 m, n 可平行或异面, 故 A 错误;

对于 B, 若 $m \perp \alpha, m \perp \beta$, 则 $\alpha // \beta$, 故 B 错误;

对于 C, 两条平行线有一条垂直于一个平面, 则另一个必定垂直这个平面,

现 $m // a, m \perp \beta$, 故 $a \perp \beta$, 故 C 正确;

对于 D, $m \subset \alpha, \alpha \perp \beta$, 则 m 与 β 可平行或相交或 $m \subset \beta$, 故 D 错误;

故选: C.

5. B

【分析】根据正态分布以及相关系数的概念直接判断即可.

【详解】对于 A, 根据正态分布对称性可知, $P(X \leq \mu - \sigma) = P(X \geq \mu + \sigma)$, A 说法正确;

对于 B, 根据正态分布对称性可知, $P(X < 1) = P(Y < 2) = 0.5$, B 说法错误;

对于 C 和 D, 相关系数 $|r|$ 越接近 0, 相关性越弱, 越接近 1, 相关性越强, 故 C 和 D 说法正确.

故选: B

6. C

【分析】先由题设结合 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 再结合数列 $\{a_n\}$ 各项正负情况即可求解.

【详解】因为 $S_n = -n^2 + 8n$,

所以当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = -1^2 + 8 \times 1 = 7$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (-n^2 + 8n) - [-(n-1)^2 + 8(n-1)] = -2n + 9$,

经检验, $a_1 = 7$ 满足上式,

所以 $a_n = -2n + 9 (n \in \mathbb{N}^*)$, 令 $a_n = -2n + 9 \geq 0 \Rightarrow n \leq 4$, $a_n = -2n + 9 \leq 0 \Rightarrow n \geq 5$,

设数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和为 T_n ,

则数列 $\{|a_n|\}$ 的前 4 项和为 $T_4 = S_4 = -4^2 + 8 \times 4 = 16$

数列 $\{|a_n|\}$ 的前 12 项和为

$$T_{2n} = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{12}| = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5 - a_6 - \cdots - a_{12}$$

$$= 2S_4 - S_{12} = 2 \times 16 - (-12^2 + 8 \times 12) = 80.$$

故选: C

7. B

【分析】利用指数函数与幂函数的单调性结合零点存在性定理计算即可.

【详解】由指数函数、幂函数的单调性可知： $y = 0.3^x$ 在 \mathbb{R} 上单调递减， $y = \sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增，

所以 $f(x) = 0.3^x - \sqrt{x}$ 在定义域上单调递减，

显然 $f(0) = 1 > 0, f(0.3) = 0.3^{0.3} - 0.3^{0.5} > 0, f(0.5) = 0.3^{0.5} - 0.5^{0.5} < 0$ ，

所以根据零点存在性定理可知 $f(x)$ 的零点位于 $(0.3, 0.5)$ 。

故选：B

8. A

【分析】利用正弦函数的对称性得出 $\omega = 4n + 2$ ，根据单调性得出 $0 < \omega \leq 2$ ，从而确定 ω ，结合对称轴与对称中心再求出 φ ，得出函数解析式，利用整体思想及正弦函数的性质即可得解。

【详解】设 $f(x)$ 的最小正周期为 T ，根据题意有
$$\begin{cases} \frac{\pi}{12}\omega + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{3}\omega + \varphi = m\pi \end{cases}, (m, k \in \mathbb{Z}),$$

由正弦函数的对称性可知 $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{(2n+1)T}{4} (n \in \mathbb{Z})$ ，

即 $\frac{\pi}{4} = \frac{2n\pi + \pi}{2\omega}$ ， $\therefore \omega = 4n + 2$ ，

又 $f(x)$ 在 $[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}]$ 上单调递增，则 $\frac{T}{2} \geq \frac{\pi}{12} - (-\frac{5\pi}{12})$ ， $\therefore \frac{\pi}{\omega} \geq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \omega \leq 2$ ，

$\therefore \omega = 2$ ，则
$$\begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \varphi = m\pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$\therefore \varphi \in (-\pi, \pi)$ ， $\therefore k = 0, m = 1$ 时， $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ， $\therefore f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，

当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时， $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$ ，

由正弦函数的单调性可知 $f(x)_{\min} = \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

故选：A

9. A

【分析】利用抛物线与双曲线的定义与性质得出
$$\begin{cases} |PF_1| = 3c + a \\ |PF_2| = 3c - a = |PA| \end{cases}$$
，根据勾股定理从而确定 P 的坐标，利用点在双曲线上构造齐次方程计算即可。

【详解】根据题意可设 $F_2\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ ，双曲线的半焦距为 c ， $P(x_0, y_0)$ ，则 $p=2c$ ，

过 F_1 作 x 轴的垂线 l ，过 P 作 l 的垂线，垂足为 A ，显然直线 AF_1 为抛物线的准线，

则 $|PA|=|PF_2|$ ，

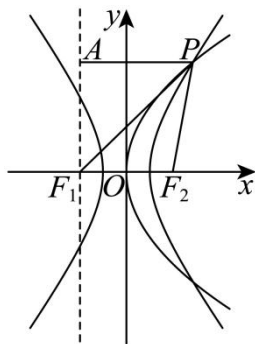
由双曲线的定义及已知条件可知 $\begin{cases} |PF_1|-|PF_2|=2a \\ |PF_1|+|PF_2|=6c \end{cases}$ ，则 $\begin{cases} |PF_1|=3c+a \\ |PF_2|=3c-a=|PA| \end{cases}$ ，

由勾股定理可知 $|AF_1|^2 = y_0^2 = |PF_1|^2 - |PA|^2 = 12ac$ ，

易知 $y_0^2 = 4cx_0, \therefore x_0 = 3a$ ，即 $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{9a^2}{a^2} - \frac{12ac}{c^2 - a^2} = 1$ ，

整理得 $2c^2 - 3ac - 2a^2 = 0 = (2c+a)(c-2a)$ ， $\therefore c=2a$ ，即离心率为 2.

故选：



10. $\sqrt{10}$

【分析】先由复数除法运算化简 $\frac{3+i}{i}$ ，再由复数模长公式即可计算求解.

【详解】先由题得 $\frac{3+i}{i} = -i(3+i) = 1-3i$ ，所以 $\left|\frac{3+i}{i}\right| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$.

故答案为： $\sqrt{10}$

11. -20

【分析】根据二项式定理相关知识直接计算即可.

【详解】 $(x-1)^6$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} \cdot (-1)^r$ ，

当 $r=3$ 时， $T_4 = C_6^3 x^3 \cdot (-1)^3 = -20x^3$ ，

即 $(x-1)^6$ 展开式中 x^3 的系数为 -20.

故答案为：-20

12. 2

【分析】先根据两点间距离公式得出 $|AB| = 6\sqrt{2}$ ，再计算出圆心到直线的距离 d ，根据弦长公式 $|CD| = 2\sqrt{r^2 - d^2}$ 列等式求解即可.

【详解】因为直线 $l_1: x - y + 6 = 0$ 与 x 轴交于 $A(-6, 0)$ ，与 y 轴交于 $B(0, 6)$ ，所以

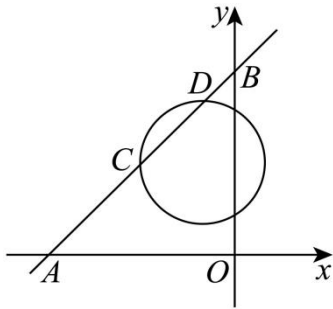
$$|AB| = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}, \text{ 所以 } |CD| = 2\sqrt{2},$$

圆 $(x+1)^2 + (y-3)^2 = r^2$ 的半径为 r ，圆心 $(-1, 3)$ 到直线 $l_1: x - y + 6 = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|-1 - 3 + 6|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

$$\text{故 } |CD| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{r^2 - (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}, \text{ 解得 } r = 2;$$

故答案为：2.



13. 0.6 3.2

【分析】先根据全概率公式计算求解空一，再求出概率根据二项分布数学期望公式计算求解.

【详解】设小桐一周跑 11 圈为事件 A ，设第一次跑 5 圈为事件 B ，设第二次跑 5 圈为事件 C ，

$$\text{则 } P(A) = P(B)P(\bar{C}|B) + P(\bar{B})P(C|\bar{B}) = 0.5 \times 0.6 + 0.5 \times 0.6 = 0.6;$$

$$\text{若至少跑 11 圈为运动量达标为事件 } D, P(D) = P(A) + P(\bar{B})P(\bar{C}|\bar{B}) = 0.6 + 0.5 \times 0.4 = 0.8,$$

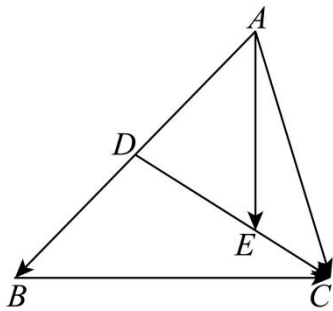
$$\text{所以 } X \sim B(4, 0.8), E(X) = 4 \times 0.8 = 3.2;$$

故答案为：0.6；3.2

14. $\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$; -15

【分析】根据向量的线性运算求解即可空一，应用数量积运算律计算求解空二.

【详解】如图，



因为 $\overline{CE} = \frac{1}{3}\overline{CD}$ ，所以 $\overline{AE} - \overline{AC} = \frac{1}{3}(\overline{AD} - \overline{AC})$ ，所以 $\overline{AE} = \frac{1}{3}\overline{AD} + \frac{2}{3}\overline{AC}$ 。

因为 D 为线段 AB 的中点，所以 $\overline{AE} = \frac{1}{6}\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AC} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ ；

又因为 $|\overline{AE}| = 5, AE \perp CB$ ，所以 $\overline{AE}^2 = \left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right)^2 = \frac{1}{36}\vec{a}^2 + \frac{2}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{4}{9}\vec{b}^2 = 25$ ，

$\overline{AE} \cdot \overline{CB} = \left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{6}\vec{a}^2 + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{2}{3}\vec{b}^2 = 0$ ，所以 $\vec{a}^2 + 3\vec{a} \cdot \vec{b} = 4\vec{b}^2$

所以 $\vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 180$ ，

所以 $\overline{AE} \cdot \overline{CD} = \left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) \cdot \left(-\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{1}{12}\vec{a}^2 + \frac{1}{6}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{2}{3}\vec{b}^2 = \frac{1}{12}(\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b}^2)$
 $= \frac{1}{12}(\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{a}^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{1}{12}(-\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b}) = -15$ 。

故答案为： $\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ ； -15 。

15. -4

【分析】先设 $t = 2a + b$ ，根据不等式的形式，为了消 a 可以取 $x = -\frac{1}{2}$ ，得到 $t \geq -4$ ，验证 $t = -4$ 时， a, b 是否可以取到，进而判断该最小值是否可取即可得到答案。

【详解】设 $t = 2a + b$ ，原题转化为求 t 的最小值，

原不等式可化为对任意的 $-2 \leq x \leq 2$ ， $tx^2 + (t - 2a)x - a - 1 \leq 0$ ，

不妨代入 $x = -\frac{1}{2}$ ，得 $\frac{1}{4}t - \frac{1}{2}(t - 2a) - a - 1 \leq 0$ ，得 $t \geq -4$ ，

当 $t = -4$ 时，原不等式可化为 $-4x^2 + (-4 - 2a)x - a - 1 \leq 0$ ，

即 $-\left[2x + \left(\frac{1}{2}a + 1\right)\right]^2 + \frac{1}{4}a^2 \leq 0$ ，

观察可知，当 $a = 0$ 时， $-(2x + 1)^2 \leq 0$ 对 $-2 \leq x \leq 2$ 一定成立，当且仅当 $x = -\frac{1}{2}$ 取等号，

此时， $a = 0, b = -4$ ，说明 $t = -4$ 时， a, b 均可取到，满足题意，

故 $t = 2a + b$ 的最小值为 -4 .

故答案为: -4

16. (1) $\frac{\pi}{3}$

(2) 3

(3) $\frac{4\sqrt{3}}{7}$

【分析】(1) 由正弦定理化边为角再化简可求;

(2) 由余弦定理, 结合 (1) 结论与已知代入可得关于 b 的方程, 求解可得 b , 进而求得 c ;

(3) 利用正弦定理先求 B , 再由二倍角公式分别求 $\sin 2B, \cos 2B$, 由两角和的正弦可得.

【详解】(1) 已知 $a \sin B = \sqrt{3}b \cos A$, 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

得 $a \sin B = b \sin A = \sqrt{3}b \cos A$, 显然 $\cos A \neq 0$,

得 $\tan A = \sqrt{3}$, 由 $0 < A < \pi$,

故 $A = \frac{\pi}{3}$;

(2) 由 (1) 知 $\cos A = \frac{1}{2}$, 且 $c = 2b + 1$, $a = \sqrt{7}$,

由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

则 $7 = b^2 + (2b + 1)^2 - 2 \times \frac{1}{2} b(2b + 1) = 3b^2 + 3b + 1$,

解得 $b = 1$ ($b = -2$ 舍去),

故 $c = 3$;

(3) 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 且 $b = 1, a = \sqrt{7}, \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

得 $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{\sqrt{21}}{14}$, 且 $a > b$, 则 B 为锐角,

故 $\cos B = \frac{5}{14} \sqrt{7}$, 故 $\sin 2B = 2 \sin B \cos B = \frac{5\sqrt{3}}{14}$,

且 $\cos 2B = 1 - 2 \sin^2 B = 1 - 2 \times \left(\frac{\sqrt{21}}{14}\right)^2 = \frac{11}{14}$;

故 $\sin(A + 2B) = \sin A \cos 2B + \cos A \sin 2B = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{11}{14} + \frac{1}{2} \times \frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$.

17. (1) 证明见解析

(2) $\frac{4}{5}$

(3) $\frac{32}{3}$

【分析】(1) 法一、利用正方形的性质先证明 $FG \perp BF$ ，再结合正方体的性质得出 $EF \perp$ 平面 BCC_1B_1 ，利用线面垂直的性质与判定定理证明即可；法二、建立空间直角坐标系，利用空间向量证明线面垂直即可；

(2) 利用空间向量计算面面夹角即可；

(3) 利用空间向量计算点面距离，再利用锥体的体积公式计算即可.

【详解】(1) 法一、在正方形 BCC_1B_1 中，

由条件易知 $\tan \angle C_1FG = \frac{C_1G}{C_1F} = \frac{1}{2} = \frac{FB_1}{BB_1} = \tan \angle B_1BF$ ，所以 $\angle C_1FG = \angle B_1BF$ ，

则 $\angle B_1FB + \angle B_1BF = \frac{\pi}{2} = \angle C_1FG + \angle B_1FB$ ，

故 $\angle BFG = \pi - (\angle C_1FG + \angle B_1FB) = \frac{\pi}{2}$ ，即 $FG \perp BF$ ，

在正方体中，易知 $D_1C_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1 ，且 $EF \parallel D_1C_1$ ，

所以 $EF \perp$ 平面 BCC_1B_1 ，

又 $FG \subset$ 平面 BCC_1B_1 ， $\therefore EF \perp FG$ ，

$\because EF \cap BF = F, EF, BF \subset$ 平面 BEF ， $\therefore GF \perp$ 平面 BEF ；

法二、如图以 D 为中心建立空间直角坐标系，

则 $B(4, 4, 0), E(2, 0, 4), F(2, 4, 4), G(0, 4, 3)$ ，

所以 $\overrightarrow{EF} = (0, 4, 0), \overrightarrow{EB} = (2, 4, -4), \overrightarrow{FG} = (-2, 0, -1)$ ，

设 $\vec{m} = (a, b, c)$ 是平面 BEF 的一个法向量，

则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{EF} = 4b = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{EB} = 2a + 4b - 4c = 0 \end{cases}$ ，令 $a = 2$ ，则 $b = 0, c = 1$ ，所以 $\vec{m} = (2, 0, 1)$ ，

易知 $\overrightarrow{FG} = -\vec{m}$ ，则 \overrightarrow{FG} 也是平面 BEF 的一个法向量， $\therefore GF \perp$ 平面 BEF ；

(2) 同上法二建立的空间直角坐标系，

所以 $\overrightarrow{EG} = (-2, 4, -1), \overrightarrow{BG} = (-4, 0, 3)$ ，

由 (1) 知 \overrightarrow{FG} 是平面 BEF 的一个法向量，

设平面 BEG 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 所以
$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{EG} = -2x + 4y - z = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{BG} = -4x + 3z = 0 \end{cases},$$

令 $x = 6$, 则 $z = 8, y = 5$, 即 $\vec{n} = (6, 5, 8)$,

设平面 BEF 与平面 BEG 的夹角为 α ,

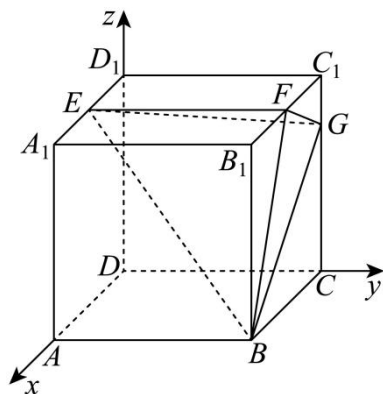
$$\text{则 } \cos \alpha = \left| \cos \langle \vec{FG}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\vec{FG} \cdot \vec{n}|}{|\vec{FG}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{20}{\sqrt{5} \times \sqrt{125}} = \frac{4}{5};$$

(3) 由 (1) 知 $EF \perp$ 平面 BCC_1B_1 , $FB \subset$ 平面 BCC_1B_1 , $\therefore EF \perp FB$,

$$\text{易知 } S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} EF \cdot BF = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{4^2 + 2^2} = 4\sqrt{5},$$

$$\text{又 } \vec{DE} = (2, 0, 4), \text{ 则 } D \text{ 到平面 } BEF \text{ 的距离为 } d = \frac{|\vec{DE} \cdot \vec{FG}|}{|\vec{FG}|} = \frac{8}{\sqrt{5}},$$

$$\text{由棱锥的体积公式知: } V_{D-BEF} = \frac{1}{3} d \times S_{\triangle BEF} = \frac{1}{3} \times \frac{8}{\sqrt{5}} \times 4\sqrt{5} = \frac{32}{3}.$$



18. (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2) 证明见解析

【分析】(1) 根据题意, 利用椭圆的离心率得到 $a = 2c$, 再由直线 PF 的斜率得到 $m = c$, 从而利用三角形的面积公式得到关于 c 的方程, 解之即可得解;

(2) 联立直线与椭圆方程, 利用其位置关系求得 k , 进而得到直线 PB 的方程与点 B 的坐标, 法一: 利用向量的夹角公式即可得证; 法二: 利用两直线的夹角公式即可得证; 法三利用正切的倍角公式即可得证; 法四: 利用角平分线的性质与点线距离公式即可得证.

【详解】(1) 依题意, 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的半焦距为 c ,

则左焦点 $F(-c, 0)$, 右顶点 $A(a, 0)$, 离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 即 $a = 2c$,

因为 P 为 $x = a$ 上一点, 设 $P(a, m)$,

又直线 PF 的斜率为 $\frac{1}{3}$, 则 $\frac{m-0}{a-(-c)} = \frac{1}{3}$, 即 $\frac{m}{a+c} = \frac{1}{3}$,

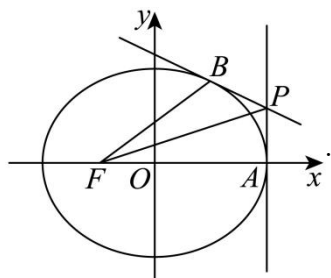
所以 $\frac{m}{2c+c} = \frac{1}{3}$, 解得 $m=c$, 则 $P(a,c)$, 即 $P(2c,c)$,

因为 $\triangle PFA$ 的面积为 $\frac{3}{2}$, $|AF| = a - (-c) = a+c = 3c$, 高为 $|m| = c$,

所以 $S_{\triangle PFA} = \frac{1}{2}|AF||m| = \frac{1}{2} \times 3c \times c = \frac{3}{2}$, 解得 $c=1$,

则 $a=2c=2$, $b^2 = a^2 - c^2 = 3$,

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.



(2) 由 (1) 可知 $P(2,1)$, $F(-1,0)$, $A(2,0)$,

易知直线 PB 的斜率存在, 设其方程为 $y=kx+m$, 则 $1=2k+m$, 即 $m=1-2k$,

$$\text{联立} \begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 消去 } y \text{ 得, } (3+4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0,$$

因为直线与椭圆有唯一交点, 所以 $\Delta = (8k \cdot m)^2 - 4(3+4k^2) \cdot (4m^2 - 12) = 0$,

即 $4k^2 - m^2 + 3 = 0$, 则 $4k^2 - (1-2k)^2 + 3 = 0$, 解得 $k = -\frac{1}{2}$, 则 $m=2$,

所以直线 PB 的方程为 $y = -\frac{1}{2}x + 2$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 2 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 解得} \begin{cases} x=1 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}, \text{ 则 } B(1, \frac{3}{2}),$$

以下分别用四种方法证明结论:

法一: 则 $\overrightarrow{FB} = (2, \frac{3}{2})$, $\overrightarrow{FP} = (3, 1)$, $\overrightarrow{FA} = (3, 0)$,

$$\text{所以 } \cos \angle BFP = \frac{\overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{FP}}{|\overrightarrow{FB}| \cdot |\overrightarrow{FP}|} = \frac{2 \times 3 + \frac{3}{2} \times 1}{\sqrt{2^2 + (\frac{3}{2})^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\cos \angle PFA = \frac{\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FP}}{|\overrightarrow{FA}| \cdot |\overrightarrow{FP}|} = \frac{3 \times 3 + 1 \times 0}{3 \sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

则 $\cos \angle BFP = \cos \angle PFA$ ，又 $\angle BFP, \angle PFA \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，

所以 $\angle BFP = \angle PFA$ ，即 PF 平分 $\angle AFB$ 。

法二：所以 $k_{FB} = \frac{\frac{3}{2} - 0}{1 - (-1)} = \frac{3}{4}$ ， $k_{PF} = \frac{1 - 0}{2 - (-1)} = \frac{1}{3}$ ， $k_{AF} = 0$ ，

由两直线夹角公式，得 $\tan \angle BFP = \left| \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}} \right| = \frac{1}{3}$ ， $\tan \angle PFA = \left| \frac{\frac{1}{3} - 0}{1 + 0} \right| = \frac{1}{3}$ ，

则 $\tan \angle BFP = \tan \angle PFA$ ，又 $\angle BFP, \angle PFA \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，

所以 $\angle BFP = \angle PFA$ ，即 PF 平分 $\angle AFB$ 。

法三：则 $\tan \angle PFA = k_{PF} = \frac{1}{3}$ ， $\tan \angle BFP = k_{FB} = \frac{3}{4}$ ，

故 $\tan 2\angle PFA = \frac{2 \tan \angle PFA}{1 - \tan^2 \angle PFA} = \frac{2 \times \frac{1}{3}}{1 - (\frac{1}{3})^2} = \frac{3}{4} = \tan \angle BFP$ ，

又 $\angle BFP, \angle PFA \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，

所以 $\angle BFP = \angle PFA$ ，即 PF 平分 $\angle AFB$ 。

法四：则 $k_{FB} = \frac{\frac{3}{2} - 0}{1 - (-1)} = \frac{3}{4}$ ，

所以直线 FB 的方程为 $y = \frac{3}{4}(x+1)$ ，即 $3x - 4y + 3 = 0$ ，

则点 P 到直线 FB 的距离为 $d = \frac{|3 \times 2 - 4 \times 1 + 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 1$ ，

又点 P 到直线 FA 的距离也为 1，

所以 PF 平分 $\angle AFB$ 。

19. (1) $a_n = 3n - 1, b_n = 2^n$ ；

(2) (i) 证明见解析；(ii) $2^{n-1} \cdot [8 + (3n - 4)2^{n+1}]$

【分析】(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，数列 $\{b_n\}$ 公比为 $q (q \neq 0)$ ，由题设列出关于 d 和 $q (q \neq 0)$ 的方程求解，再结合等差和等比数列通项公式即可得解；

(2) (i) 由题意结合 (1) 求出 $a_{n+1}b_{n+1}$ 和 $p_1a_1b_1 + p_2a_2b_2 + \dots + p_{n-1}a_{n-1}b_{n-1} + p_n a_n b_n$ 的最大值，

再作差比较两者大小即可证明；

(ii) 法一：根据 $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$ 中全为 1、一个为 0 其余为 1、2 个为 0 其余为、...、全为 0 几个情况将 T_n 中的所有元素分系列，并求出各系列中元素的和，最后将所有系列所得的和加起来即可得解；

法二：根据 T_n 元素的特征得到 T_n 中的所有元素的和中各项 $a_i b_i (i \in \{1, 2, \dots, n\})$ 出现的次数均为 2^{n-1} 次即可求解。

【详解】(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，数列 $\{b_n\}$ 公比为 $q (q \neq 0)$ ，

$$\text{则由题得 } \begin{cases} 2+d=2q+1 \\ 2+2d=2q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=3 \\ q=2 \end{cases},$$

所以 $a_n = 2 + 3(n-1) = 3n-1, b_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$ ；

(2)(i) 证明：由(1) $p_n a_n b_n = (3n-1)2^n, p_n = 0$ 或 $p_n a_n b_n = (3n-1)2^n > 0, a_{n+1} b_{n+1} = (3n+2)2^{n+1}$ ，

当 $p_n a_n b_n = (3n-1)2^n > 0$ 时，

设 $S_n = p_1 a_1 b_1 + p_2 a_2 b_2 + \dots + p_{n-1} a_{n-1} b_{n-1} + p_n a_n b_n = 2 \times 2 + 5 \times 2^2 + \dots + (3n-4)2^{n-1} + (3n-1)2^n$ ，

所以 $2S_n = 2 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \dots + (3n-4)2^n + (3n-1)2^{n+1}$ ，

所以

$$-S_n = 4 + 3 \times (2^2 + 2^3 + \dots + 2^n) - (3n-1)2^{n+1} = 4 + 3 \times \frac{2^2(1-2^{n-1})}{1-2} - (3n-1)2^{n+1} = -8 + (4-3n)2^{n+1},$$

所以 $S_n = 8 + (3n-4)2^{n+1}$ ，为 T_n 中的最大元素，

此时 $a_{n+1} b_{n+1} - S_n = (3n+2)2^{n+1} - [8 + (3n-4)2^{n+1}] = 6 \cdot 2^{n+1} - 8 > 0$ 恒成立，

所以对 $\forall t \in T_n$ ，均有 $t < a_{n+1} b_{n+1}$ 。

(ii) 法一：由(i)得 $S_n = 8 + (3n-4)2^{n+1}$ ，为 T_n 中的最大元素，

由题意可得 T_n 中的所有元素由以下系列中所有元素组成：

当 $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$ 均为 1 时：此时该系列元素只有 $S_n = 8 + (3n-4)2^{n+1}$ 即 C_n^0 个；

当 $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$ 中只有一个为 0，其余均为 1 时：

此时该系列的元素有 $S_n - a_1 b_1, S_n - a_2 b_2, S_n - a_3 b_3, \dots, S_n - a_n b_n$ 共有 C_n^1 个，

则这 n 个元素的和为 $C_n^1 S_n - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) = (C_n^1 - C_n^0) S_n$;

当 $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$ 中只有 2 个为 0, 其余均为 1 时:

此时该系列的元素为 $S_n - a_i b_i - a_j b_j (i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j)$ 共有 C_n^2 个,

则这 n 个元素的和为 $C_n^2 S_n - C_{n-1}^1 (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) = (C_n^2 - C_{n-1}^1) S_n$;

当 $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$ 中有 2 个为 0, 其余均为 1 时: 此时该系列的元素为

$S_n - a_i b_i - a_j b_j - a_k b_k (i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j \neq k)$ 共有 C_n^3 个,

则这 n 个元素的和为 $C_n^3 S_n - C_{n-1}^2 (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) = (C_n^3 - C_{n-1}^2) S_n$;

...

当 $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$ 中有 $n-1$ 个为 0, 1 个为 1 时: 此时该系列的元素为 $a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n$ 共有

C_n^{n-1} 个,

则这 n 个元素的和为 $C_n^{n-1} S_n - C_{n-1}^{n-2} (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) = (C_n^{n-1} - C_{n-1}^{n-2}) S_n$;

当 $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$ 均为 0 时: 此时该系列的元素为 $0 = (C_n^n - C_{n-1}^{n-1}) S_n$ 即 $C_n^n = 1$ 个,

综上所述, T_n 中的所有元素之和为

$$\begin{aligned} & S_n + (C_n^1 - 1) S_n + (C_n^2 - C_{n-1}^1) S_n + (C_n^3 - C_{n-1}^2) S_n + \dots + (C_n^{n-1} - C_{n-1}^{n-2}) S_n + 0 \\ &= \left[(C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n) - (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}) \right] S_n \\ &= (2^n - 2^{n-1}) S_n = 2^{n-1} S_n = 2^{n-1} \cdot [8 + (3n-4) 2^{n+1}]; \end{aligned}$$

法二: 由 (i) 得 $S_n = 8 + (3n-4) 2^{n+1}$, 为 T_n 中的最大元素,

由题意可得

$$T_n = \{S_n, S_n - a_i b_i, S_n - a_i b_i - a_j b_j, S_n - a_i b_i - a_j b_j - a_k b_k, \dots, a_i b_i + a_j b_j, a_i b_i, 0\}, (i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j \neq k)$$

,

所以 T_n 的所有的元素的和中各项 $a_i b_i (i \in \{1, 2, \dots, n\})$ 出现的次数均为

$$C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1} = 2^{n-1} \text{ 次},$$

所以 T_n 中的所有元素之和为 $2^{n-1} (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) = 2^{n-1} S_n = 2^{n-1} \cdot [8 + (3n-4) 2^{n+1}]$.

20. (1) $y = x$

(2) (i) $\left(0, \frac{4}{e^2}\right)$; (ii) 证明见解析.

【分析】(1) 利用导数的几何意义, 求导数值得斜率, 由点斜式方程可得;

(2) (i) 令 $f(x) = 0$, 分离参数得 $a = \frac{(\ln x)^2}{x}$, 作出函数 $g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ 图象, 数形结合可得

a 范围; (ii) 由 (2) 结合图象, 可得 x_1, x_2, x_3 范围, 整体换元 $\ln x_1 = t_1, \ln x_2 = t_2, \ln x_3 = t_3$, 转

化为 $\begin{cases} ae^{t_1} = t_1^2 \textcircled{1} \\ ae^{t_2} = t_2^2 \textcircled{2} \\ ae^{t_3} = t_3^2 \textcircled{3} \end{cases}$, 结合由 ②③ 可得 $\begin{cases} \ln a + t_2 = 2 \ln t_2 \\ \ln a + t_3 = 2 \ln t_3 \end{cases}$, 两式作差, 利用对数平均不等式可得

$t_1 t_3 < 4$, 再由 $t_1^2 = ae^{t_1} < a$ 得 $-t_1 < \sqrt{a}$, 结合 $a = \frac{t_3^2}{e^{t_3}}$ 减元处理, 再构造函数求最值, 放缩法可证明不等式.

【详解】(1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = x - (\ln x)^2$, $x > 0$,

则 $f'(x) = 1 - \frac{2 \ln x}{x}$, 则 $f'(1) = 1$, 且 $f(1) = 1$,

则切点 $(1, 1)$, 且切线的斜率为 1,

故函数 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = x$;

(2) (i) 令 $f(x) = ax - (\ln x)^2 = 0$, $x > 0$,

得 $a = \frac{(\ln x)^2}{x}$,

设 $g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}, x > 0$,

则 $g'(x) = \frac{\frac{2 \ln x}{x} \cdot x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}$,

由 $g'(x) = 0$ 解得 $x = 1$ 或 e^2 , 其中 $g(1) = 0$, $g(e^2) = \frac{4}{e^2}$;

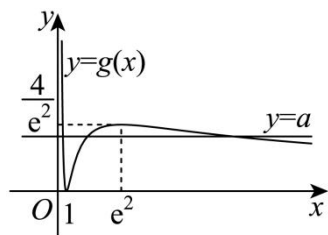
当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减;

当 $1 < x < e^2$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(1, e^2)$ 上单调递增;

当 $x > e^2$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(e^2, +\infty)$ 上单调递减;

且当 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow 0$;

如图作出函数 $g(x)$ 的图象,



要使函数 $f(x)$ 有 3 个零点,

则方程 $a = g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有 3 个根, 即直线 $y = a$ 与函数 $g(x)$ 的图象有 3 个交点.

结合图象可知, $0 < a < \frac{4}{e^2}$.

故 a 的取值范围为 $(0, \frac{4}{e^2})$;

(ii) 由图象可知, $0 < x_1 < 1 < x_2 < e^2 < x_3$,

设 $\ln x_1 = t_1, \ln x_2 = t_2, \ln x_3 = t_3$, 则 $t_1 < 0 < t_2 < 2 < t_3$,

$$\text{满足 } \begin{cases} ae^{t_1} = t_1^2 \text{ ①} \\ ae^{t_2} = t_2^2 \text{ ②} \\ ae^{t_3} = t_3^2 \text{ ③} \end{cases}, \text{ 由 ②③ 可得 } \begin{cases} \ln a + t_2 = 2 \ln t_2 \\ \ln a + t_3 = 2 \ln t_3 \end{cases},$$

两式作差可得 $t_3 - t_2 = 2(\ln t_3 - \ln t_2)$,

则由对数均值不等式可得 $2 = \frac{t_3 - t_2}{\ln t_3 - \ln t_2} > \sqrt{t_2 t_3}$,

则 $t_2 t_3 < 4$, 故要证 $(\ln x_2 - \ln x_1) \cdot \ln x_3 < \frac{4e}{e-1}$,

即证 $t_2 t_3 - t_1 t_3 < \frac{4e}{e-1}$, 只需证 $4 - t_1 t_3 \leq \frac{4e}{e-1}$,

即证 $-t_1 t_3 \leq \frac{4}{e-1}$, 又因为 $t_1 < 0, t_1^2 = ae^{t_1} < a$, 则 $|t_1| = -t_1 < \sqrt{a}$,

所以 $-t_1 t_3 < \sqrt{a} t_3 = \frac{t_3^2}{e^2}$, 故只需证 $\frac{t_3^2}{e^2} \leq \frac{4}{e-1}$,

$$\text{设函数 } \varphi(t) = \frac{t^2}{e^{\frac{t}{2}}}, t > 2, \text{ 则 } \varphi'(t) = \frac{2te^{\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}t^2e^{\frac{t}{2}}}{e^t} = \frac{(2 - \frac{1}{2}t)t}{e^{\frac{t}{2}}},$$

当 $2 < t < 4$ 时, $\varphi'(t) > 0$, 则 $\varphi(t)$ 在 $(2, 4)$ 上单调递增;

当 $t > 4$ 时, $\varphi'(t) < 0$, 则 $\varphi(t)$ 在 $(4, +\infty)$ 上单调递减;

故 $\varphi(t)_{\max} = \varphi(4) = \frac{16}{e^2}$, 即 $\varphi(t) \leq \frac{16}{e^2}$.

而由 $4e^2 - 16e + 16 = 4(e-2)^2 > 0$,

可知 $\frac{16}{e^2} < \frac{4}{e-1}$ 成立, 故命题得证.