绝密★启用前

2020年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $A=\{x|x^2-3x-4<0\},B=\{-4,1,3,5\}$，则 $A\cap B=$（　）

A. $\{-4,1\}$　　B. $\{1,5\}$

C. $\{3,5\}$　　D. $\{1,3\}$

【答案】D

【解析】

【分析】

首先解一元二次不等式求得集合A，之后利用交集中元素的特征求得 $A\cap B$，得到结果.

【详解】由 $x^2-3x-4<0$ 解得 $-1<x<4$，

所以 $A=\left\{x|-1<x<4\right\}$，

又因为 $B=\left\{-4,1,3,5\right\}$，所以 $A\cap B=\left\{1,3\right\}$，

故选：D.

【点睛】该题考查的是有关集合的问题，涉及到的知识点有利用一元二次不等式的解法求集合，集合的交运算，属于基础题目.

2.若 $z=1+2i+i^3$，则 $|z|=$（　）

A. 0　　B. 1

C. $\sqrt{2}$　　D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】

先根据$i^2=-1$将z化简，再根据向量的模的计算公式即可求出.

【详解】因为$z=1+2i+i^3=1+2i-i=1+i$，所以$|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

故选：C.

【点睛】本题主要考查向量的模的计算公式的应用，属于容易题.

3.埃及胡夫金字塔是古代世界建筑奇迹之一，它的形状可视为一个正四棱锥，以该四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥一个侧面三角形的面积，则其侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值为（　）

A. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$　　D. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】

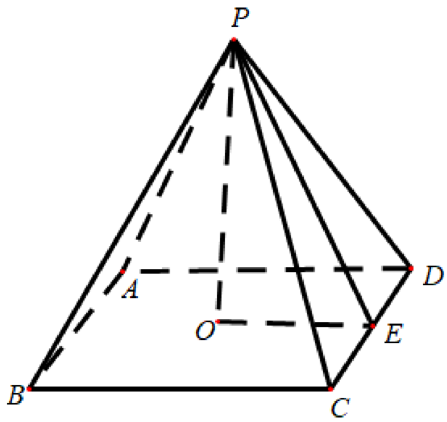
设$CD=a,PE=b$，利用$PO^2=\dfrac{1}{2}CD\cdot PE$得到关于$a,b$的方程，解方程即可得到答案.

【详解】如图，设$CD=a,PE=b$，则$PO=\sqrt{PE^2-OE^2}=\sqrt{b^2-\dfrac{a^2}{4}}$，

由题意 $PO^2=\frac{1}{2}ab$，即 $b^2-\frac{a^2}{4}=\frac{1}{2}ab$，化简得 $4(\frac{b}{a})^2-2\cdot\frac{b}{a}-1=0$，

解得 $\frac{b}{a}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$（负值舍去）.

故选：C.



【点睛】本题主要考查正四棱锥的概念及其有关计算，考查学生的数学计算能力，是一道容易题.

4.设O为正方形$ABCD$的中心，在O，A，B，C，D中任取3点，则取到的3点共线的概率为（　　）

A. $\frac{1}{5}$　　　　B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{1}{2}$　　　　D. $\frac{4}{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】

列出从5个点选3个点的所有情况，再列出3点共线的情况，用古典概型的概率计算公式运算即可.

【详解】如图，从 O, A, B, C, D 5个点中任取3个有

$\{O,A,B\},\{O,A,C\},\{O,A,D\},\{O,B,C\}$

$\{O,B,D\},\{O,C,D\},\{A,B,C\},\{A,B,D\}$

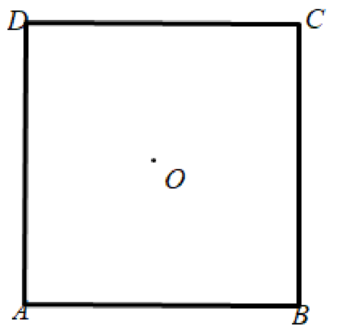
$\{A,C,D\},\{B,C,D\}$ 共10种不同取法，

3点共线只有 $\{A,O,C\}$ 与 $\{B,O,D\}$ 共2种情况，

由古典概型的概率计算公式知，

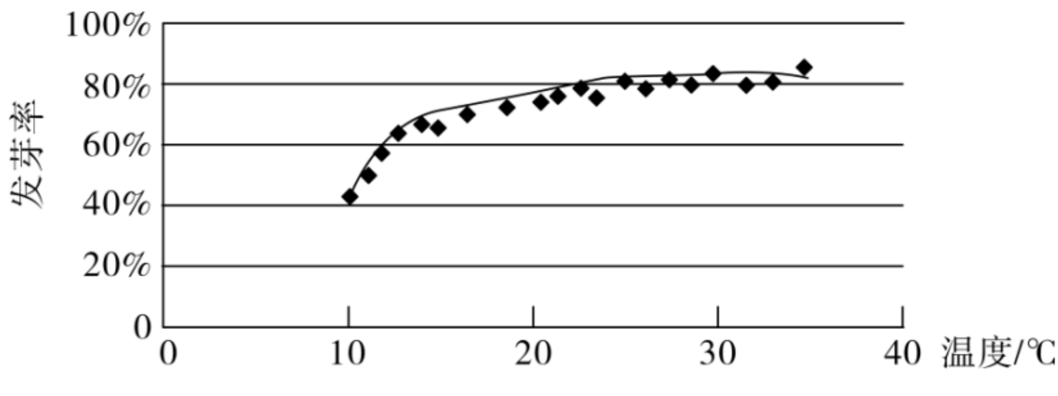
取到3点共线的概率为 $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$.

故选：A



【点睛】本题主要考查古典概型的概率计算问题，采用列举法，考查学生数学运算能力，是一道容易题.

5.某校一个课外学习小组为研究某作物种子的发芽率y和温度x（单位：°C）的关系，在20个不同的温度条件下进行种子发芽实验，由实验数据 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,20)$ 得到下面的散点图：



由此散点图，在10°C至40°C之间，下面四个回归方程类型中最适宜作为发芽率y和温度x的回归方程类型的是（　）

A. $y=a+bx$

B. $y=a+bx^2$

C. $y=a+be^x$

D. $y=a+b\ln x$

【答案】D

【解析】

【分析】

根据散点图的分布可选择合适的函数模型.

【详解】由散点图分布可知，散点图分布在一个对数函数的图象附近，

因此，最适合作为发芽率 y 和温度 x 的回归方程类型的是 $y=a+b\ln x$.

故选：D.

【点睛】本题考查函数模型的选择，主要观察散点图的分布，属于基础题.

6.已知圆 $x^2+y^2-6x=0$，过点（1，2）的直线被该圆所截得的弦的长度的最小值为（　）

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】

根据直线和圆心与点 $(1,2)$ 连线垂直时，所求的弦长最短，即可得出结论.

【详解】圆 $x^2+y^2-6x=0$ 化为 $(x-3)^2+y^2=9$，所以圆心 C 坐标为 $C(3,0)$，半径为 3，

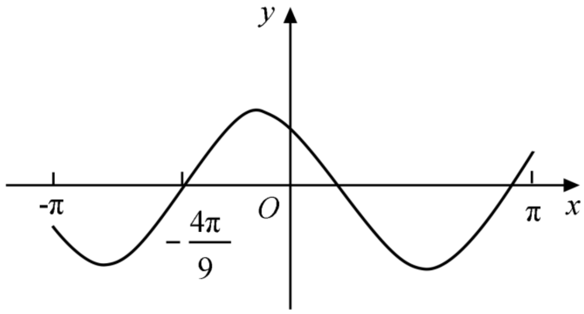
设 $P(1,2)$，当过点 P 的直线和直线 CP 垂直时，圆心到过点 P 的直线的距离最大，所求的弦长最短，

根据弦长公式最小值为 $2\sqrt{9-|CP|^2}=2\sqrt{9-8}=2$.

故选：B.

【点睛】本题考查圆的简单几何性质，以及几何法求弦长，属于基础题.

7.设函数 $f(x)=\cos(\omega x+\frac{\pi}{6})$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图像大致如下图，则f(x)的最小正周期为（　）



A. $\frac{10\pi}{9}$

B. $\frac{7\pi}{6}$

C. $\frac{4\pi}{3}$

D. $\frac{3\pi}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】

由图可得：函数图象过点$\left(-\frac{4\pi}{9},0\right)$，即可得到$\cos\left(-\frac{4\pi}{9}\cdot\omega+\frac{\pi}{6}\right)=0$，结合$\left(-\frac{4\pi}{9},0\right)$是函数$f\left(x\right)$图象与$x$轴负半轴的第一个交点即可得到$-\frac{4\pi}{9}\cdot\omega+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$，即可求得$\omega=\frac{3}{2}$，再利用三角函数周期公式即可得解.

【详解】由图可得：函数图象过点$\left(-\frac{4\pi}{9},0\right)$，

将它代入函数$f\left(x\right)$可得：$\cos\left(-\frac{4\pi}{9}\cdot\omega+\frac{\pi}{6}\right)=0$

又$\left(-\frac{4\pi}{9},0\right)$是函数$f\left(x\right)$图象与$x$轴负半轴的第一个交点，

所以$-\frac{4\pi}{9}\cdot\omega+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$，解得：$\omega=\frac{3}{2}$

所以函数$f\left(x\right)$的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{3}{2}}=\frac{4\pi}{3}$

故选：C

【点睛】本题主要考查了三角函数的性质及转化能力，还考查了三角函数周期公式，属于中

档题.

8.设 $a\log_3 4=2$，则 $4^{-a}=$（　）

A. $\frac{1}{16}$　　B. $\frac{1}{9}$　　C. $\frac{1}{8}$　　D. $\frac{1}{6}$

【答案】B

【解析】

【分析】

首先根据题中所给的式子，结合对数的运算法则，得到 $\log_3 4^a=2$，即 $4^a=9$，进而求得 $4^{-a}=\frac{1}{9}$，得到结果.

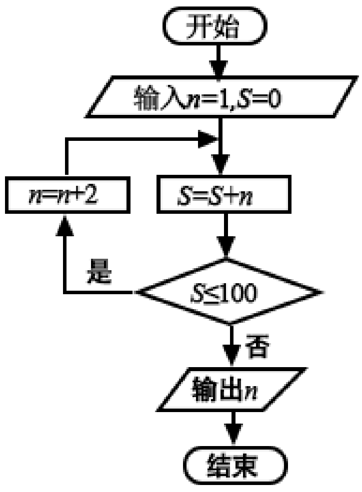
【详解】由 $a\log_3 4=2$ 可得 $\log_3 4^a=2$，所以 $4^a=9$，

所以有 $4^{-a}=\frac{1}{9}$，

故选：B.

【点睛】该题考查的是有关指对式的运算的问题，涉及到的知识点有对数的运算法则，指数的运算法则，属于基础题目.

9.执行下面的程序框图，则输出的n=（　）



A. 17　　B. 19　　C. 21　　D. 23

【答案】C

【解析】

【分析】

根据程序框图的算法功能可知，要计算满足 $1+3+5+\cdots+n>100$ 的最小正奇数 n，根据等

差数列求和公式即可求出．

【详解】依据程序框图的算法功能可知，输出的n是满足$1+3+5+\cdots+n>100$的最小正奇数，

因为$1+3+5+\cdots+n=\dfrac{(1+n)\times\left(\dfrac{n-1}{2}+1\right)}{2}=\dfrac{1}{4}(n+1)^2>100$，解得$n>19$，

所以输出的$n=21$．

故选：C．

【点睛】本题主要考查程序框图的算法功能的理解，以及等差数列前n项和公式的应用，属于基础题．

10.设$\{a_n\}$是等比数列，且$a_1+a_2+a_3=1$，$a_2+a_3+a_4=2$，则$a_6+a_7+a_8=$（　）

A. 12　　B. 24　　C. 30　　D. 32

【答案】D

【解析】

【分析】

根据已知条件求得q的值，再由$a_6+a_7+a_8=q^5\left(a_1+a_2+a_3\right)$可求得结果.

【详解】设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，则$a_1+a_2+a_3=a_1\left(1+q+q^2\right)=1$，

$a_2+a_3+a_4=a_1q+a_1q^2+a_1q^3=a_1q\left(1+q+q^2\right)=q=2$，

因此，$a_6+a_7+a_8=a_1q^5+a_1q^6+a_1q^7=a_1q^5\left(1+q+q^2\right)=q^5=32$.

故选：D.

【点睛】本题主要考查等比数列基本量的计算，属于基础题.

11.设F_1,F_2是双曲线$C:x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$的两个焦点，O为坐标原点，点P在C上且$|OP|=2$，则$\triangle PF_1F_2$的面积为（　）

A. $\dfrac{7}{2}$　　B. 3　　C. $\dfrac{5}{2}$　　D. 2

【答案】B

【解析】

【分析】

由$\triangle F_1F_2P$是以P为直角直角三角形得到$|PF_1|^2+|PF_2|^2=16$，再利用双曲线的定义得到

$||PF_1|-|PF_2||=2$，联立即可得到$|PF_1||PF_2|$，代入$S_{\triangle F_1F_2P}=\dfrac{1}{2}|PF_1||PF_2|$中计算即可.

【详解】由已知，不妨设$F_1(-2,0),F_2(2,0)$，

则$a=1,c=2$，因为$|OP|=1=\dfrac{1}{2}|F_1F_2|$，

所以点P在以F_1F_2为直径的圆上，

即$\triangle F_1F_2P$是以P为直角顶点的直角三角形，

故$|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$，

即$|PF_1|^2+|PF_2|^2=16$，又$||PF_1|-|PF_2||=2a=2$，

所以$4=||PF_1|-|PF_2||^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|=16-2|PF_1||PF_2|$，

解得$|PF_1||PF_2|=6$，所以$S_{\triangle F_1F_2P}=\dfrac{1}{2}|PF_1||PF_2|=3$

故选：B

【点睛】本题考查双曲线中焦点三角面积的计算问题，涉及到双曲线的定义，考查学生的数学运算能力，是一道中档题.

12.已知A,B,C为球O的球面上的三个点，$\odot O_1$为$\triangle ABC$的外接圆，若$\odot O_1$的面积为4π，$AB=BC=AC=OO_1$，则球O的表面积为（　）

A. 64π　　B. 48π　　C. 36π　　D. 32π

【答案】A

【解析】

【分析】

由已知可得等边$\triangle ABC$的外接圆半径，进而求出其边长，得出OO_1的值，根据球截面性质，求出球的半径，即可得出结论.

【详解】设圆O_1半径为r，球的半径为R，依题意，

得 $\pi r^2=4\pi, \therefore r=2$，

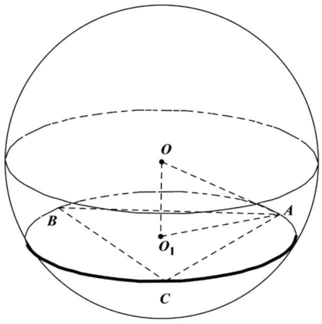
由正弦定理可得 $AB=2r\sin 60^\circ=2\sqrt{3}$，

$\therefore OO_1=AB=2\sqrt{3}$，根据圆截面性质 $OO_1\perp$平面 ABC，

$\therefore OO_1\perp O_1A, R=OA=\sqrt{OO_1^{\ 2}+O_1A^2}=\sqrt{OO_1^{\ 2}+r^2}=4$，

$\therefore$ 球 O 的表面积 $S=4\pi R^2=64\pi$.

故选：A



【点睛】本题考查球的表面积，应用球的截面性质是解题的关键，考查计算求解能力，属于基础题.

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13.若x，y满足约束条件$\begin{cases}2x+y-2\le 0,\\ x-y-1\ge 0,\\ y+1\ge 0,\end{cases}$ 则$z=x+7y$的最大值为____________.

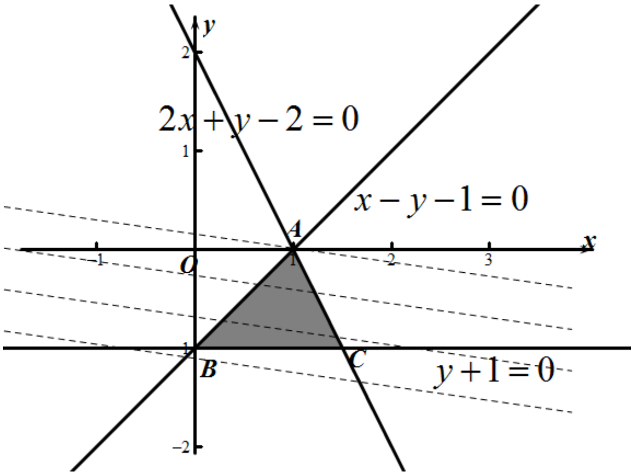
【答案】1

【解析】

【分析】

首先画出可行域，然后结合目标函数的几何意义即可求得其最大值.

【详解】绘制不等式组表示的平面区域如图所示，



目标函数 $z=x+7y$ 即：$y=-\frac{1}{7}x+\frac{1}{7}z$，

其中z取得最大值时，其几何意义表示直线系在y轴上的截距最大，

据此结合目标函数的几何意义可知目标函数在点A处取得最大值，

联立直线方程：$\begin{cases}2x+y-2=0\\x-y-1=0\end{cases}$，可得点$A$的坐标为：$A(1,0)$，

据此可知目标函数的最大值为：$z_{\max}=1+7\times0=1$.

故答案为：1.

【点睛】求线性目标函数$z=ax+by(ab\neq0)$的最值，当$b>0$时，直线过可行域且在y轴上截距最大时，z值最大，在y轴截距最小时，z值最小；当$b<0$时，直线过可行域且在y轴上截距最大时，z值最小，在y轴上截距最小时，z值最大.

14.设向量$\boldsymbol{a}=(1,-1),\boldsymbol{b}=(m+1,2m-4)$，若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$m=$______________.

【答案】5

【解析】

【分析】

根据向量垂直，结合题中所给的向量的坐标，利用向量垂直的坐标表示，求得结果.

【详解】由$\vec{a}\perp\vec{b}$可得$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

又因为$\vec{a}=(1,-1),\vec{b}=(m+1,2m-4)$，

所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot(m+1)+(-1)\cdot(2m-4)=0$，

即$m=5$，

故答案为：5.

【点睛】该题考查的是有关向量的问题，涉及到的知识点有向量垂直的坐标表示，属于基础题目.

15.曲线 $y=\ln x+x+1$ 的一条切线的斜率为2，则该切线的方程为______________.

【答案】 $y=2x$

【解析】

【分析】

设切线的切点坐标为 (x_0,y_0)，对函数求导，利用 $y'|_{x_0}=2$，求出 x_0，代入曲线方程求出 y_0，得到切线的点斜式方程，化简即可.

【详解】设切线的切点坐标为 $(x_0,y_0), y=\ln x+x+1, y'=\frac{1}{x}+1$，

$y'|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}+1=2, x_0=1, y_0=2$，所以切点坐标为 $(1,2)$，

所求的切线方程为 $y-2=2(x-1)$，即 $y=2x$.

故答案为： $y=2x$.

【点睛】本题考查导数的几何意义，属于基础题.

16.数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2}+(-1)^n a_n=3n-1$，前16项和为540，则 $a_1=$ ______________.

【答案】 7

【解析】

【分析】

对 n 为奇偶数分类讨论，分别得出奇数项、偶数项的递推关系，由奇数项递推公式将奇数项用 a_1 表示，由偶数项递推公式得出偶数项的和，建立 a_1 方程，求解即可得出结论.

【详解】 $a_{n+2}+(-1)^n a_n=3n-1$，

当 n 为奇数时， $a_{n+2}=a_n+3n-1$；当 n 为偶数时， $a_{n+2}+a_n=3n-1$.

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，

$S_{16}=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{16}$

$=a_1+a_3+a_5\cdots+a_{15}+(a_2+a_4)+\cdots(a_{14}+a_{16})$

$=a_1+(a_1+2)+(a_1+10)+(a_1+24)+(a_1+44)+(a_1+70)$

$+(a_1+102)+(a_1+140)+(5+17+29+41)$

$=8a_1+392+92=8a_1+484=540$，

$\therefore a_1=7$.

故答案为：7.

【点睛】本题考查数列的递推公式的应用，以及数列的并项求和，考查分类讨论思想和数学计算能力，属于较难题.

三、解答题：共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答.第22、23题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共60分.

17.某厂接受了一项加工业务，加工出来的产品(单位：件)按标准分为A，B，C，D四个等级.加工业务约定：对于A级品、B级品、C级品，厂家每件分别收取加工费90元，50元，20元；对于D级品，厂家每件要赔偿原料损失费50元.该厂有甲、乙两个分厂可承接加工业务.甲分厂加工成本费为25元/件，乙分厂加工成本费为20元/件.厂家为决定由哪个分厂承接加工业务，在两个分厂各试加工了100件这种产品，并统计了这些产品的等级，整理如下：

甲分厂产品等级的频数分布表

等级	A	B	C	D
频数	40	20	20	20

乙分厂产品等级的频数分布表

等级	A	B	C	D
频数	28	17	34	21

（1）分别估计甲、乙两分厂加工出来的一件产品为A级品的概率；

（2）分别求甲、乙两分厂加工出来的100件产品的平均利润，以平均利润为依据，厂家应选哪个分厂承接加工业务?

【答案】（1）甲分厂加工出来的A级品的概率为0.4，乙分厂加工出来的A级品的概率为0.28；（2）选甲分厂，理由见解析.

【解析】

【分析】

（1）根据两个频数分布表即可求出；

（2）根据题意分别求出甲乙两厂加工100件产品的总利润，即可求出平均利润，由此作出选择.

【详解】（1）由表可知，甲厂加工出来的一件产品为A级品的概率为$\frac{40}{100}=0.4$，乙厂加工出来的一件产品为A级品的概率为$\frac{28}{100}=0.28$；

（2）甲分厂加工100件产品的总利润为

$40\times(90-25)+20\times(50-25)+20\times(20-25)-20\times(50+25)=1500$元，

所以甲分厂加工100件产品的平均利润为15元每件；

乙分厂加工100件产品的总利润为

$28\times(90-20)+17\times(50-20)+34\times(20-20)-21\times(50+20)=1000$元，

所以乙分厂加工100件产品的平均利润为10元每件.

故厂家选择甲分厂承接加工任务.

【点睛】本题主要考查古典概型的概率公式的应用，以及平均数的求法，并根据平均值作出决策，属于基础题.

18. $\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c.已知B=150°.

（1）若$a=\sqrt{3}c$，$b=2\sqrt{7}$，求$\triangle ABC$的面积；

（2）若$\sin A+\sqrt{3}\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，求$C$.

【答案】（1）$\sqrt{3}$；（2）$15°$.

【解析】

【分析】

（1）已知角B和b边，结合a,c关系，由余弦定理建立c的方程，求解得出a,c，利用面积公式，即可得出结论；

（2）将 $A=30^\circ-C$ 代入已知等式，由两角差的正弦和辅助角公式，化简得出有关 C 角的三角函数值，结合 C 的范围，即可求解.

【详解】（1）由余弦定理可得 $b^2=28=a^2+c^2-2ac\cdot\cos150^\circ=7c^2$，

$\therefore c=2,a=2\sqrt{3},\therefore\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\sqrt{3}$；

（2）$\because A+C=30^\circ$，

$\therefore\sin A+\sqrt{3}\sin C=\sin(30^\circ-C)+\sqrt{3}\sin C$

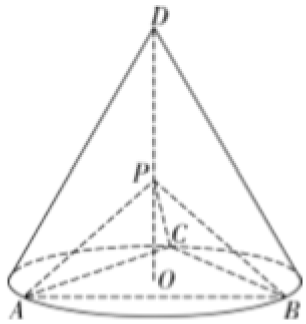
$=\dfrac{1}{2}\cos C+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin C=\sin(C+30^\circ)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\because 0^\circ<C<30^\circ,\therefore 30^\circ<C+30^\circ<60^\circ$，

$\therefore C+30^\circ=45^\circ,\therefore C=15^\circ$.

【点睛】本题考查余弦定理、三角恒等变换解三角形，熟记公式是解题的关键，考查计算求解能力，属于基础题.

19.如图，D 为圆锥的顶点，O 是圆锥底面的圆心，$\triangle ABC$ 是底面的内接正三角形，P 为 DO 上一点，$\angle APC$=90°.



（1）证明：平面$PAB\perp$平面PAC；

（2）设$DO=\sqrt{2}$，圆锥的侧面积为$\sqrt{3}\pi$，求三棱锥$P-ABC$的体积.

【答案】（1）证明见解析；（2）$\dfrac{\sqrt{6}}{8}$.

【解析】

【分析】

（1）根据已知可得 $PA=PB=PC$，进而有 $\triangle PAC\cong\triangle PBC$，可得

$\angle APC=\angle BPC=90^\circ$，即 $PB\perp PC$，从而证得 $PC\perp$平面 PAB，即可证得结论；

（2）将已知条件转化为母线l和底面半径r的关系，进而求出底面半径，由正弦定理，求出正三角形ABC边长，在等腰直角三角形APC中求出AP，在$Rt\triangle APO$中，求出PO，即可求出结论.

【详解】（1）$\because D$为圆锥顶点，O为底面圆心，$\therefore OD\perp$平面ABC，

$\because P$在DO上，$OA=OB=OC, \therefore PA=PB=PC$，

$\because \triangle ABC$是圆内接正三角形，$\therefore AC=BC$，$\triangle PAC\cong\triangle PBC$，

$\therefore \angle APC=\angle BPC=90^\circ$，即$PB\perp PC, PA\perp PC$，

$PA\bigcap PB=P, \therefore PC\perp$平面$PAB, PC\subset$平面$PAC$，$\therefore$平面$PAB\perp$平面$PAC$；

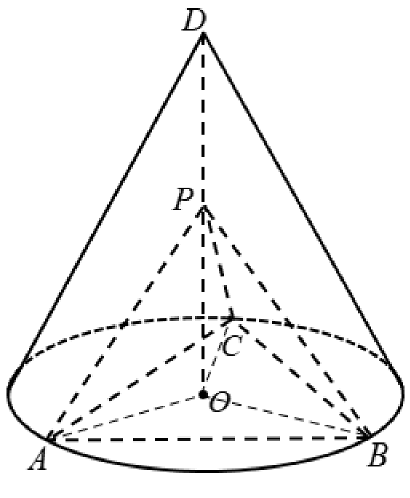
（2）设圆锥的母线为l，底面半径为r，圆锥的侧面积为$\pi rl=\sqrt{3}\pi, rl=\sqrt{3}$，

$OD^2=l^2-r^2=2$，解得$r=1, l=\sqrt{3}$，$AC=2r\sin 60^\circ=\sqrt{3}$，

在等腰直角三角形APC中，$AP=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AC=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

在$Rt\triangle PAO$中，$PO=\sqrt{AP^2-OA^2}=\sqrt{\dfrac{6}{4}-1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore$三棱锥$P-ABC$的体积为$V_{P-ABC}=\dfrac{1}{3}PO\cdot S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 3=\dfrac{\sqrt{6}}{8}$.



【点睛】本题考查空间线、面位置关系，证明平面与平面垂直，求锥体的体积，注意空间垂直间的相互转化，考查逻辑推理、直观想象、数学计算能力，属于中档题.

20.已知函数$f(x)=e^x-a(x+2)$.

（1）当$a=1$时，讨论$f(x)$的单调性；

（2）若$f(x)$有两个零点，求a的取值范围.

【答案】（1）减区间为$(-\infty,0)$，增区间为$(0,+\infty)$；（2）$(\frac{1}{e},+\infty)$.

【解析】

【分析】

（1）将$a=1$代入函数解析式，对函数求导，分别令导数大于零和小于零，求得函数的单调增区间和减区间；

（2）若$f(x)$有两个零点，即$e^x-a(x+2)=0$有两个解，将其转化为$a=\frac{e^x}{x+2}$有两个解，

令$h(x)=\frac{e^x}{x+2}(x\neq -2)$，求导研究函数图象的走向，从而求得结果.

【详解】（1）当$a=1$时，$f(x)=e^x-(x+2)$，$f^{'}(x)=e^x-1$，

令$f^{'}(x)<0$，解得$x<0$，令$f^{'}(x)>0$，解得$x>0$，

所以$f(x)$的减区间为$(-\infty,0)$，增区间为$(0,+\infty)$；

（2）若$f(x)$有两个零点，即$e^x-a(x+2)=0$有两个解，

从方程可知，$x=2$不成立，即$a=\frac{e^x}{x+2}$有两个解，

令$h(x)=\frac{e^x}{x+2}(x\neq -2)$，则有$h^{'}(x)=\frac{e^x(x+2)-e^x}{(x+2)^2}=\frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$，

令$h^{'}(x)>0$，解得$x>-1$，令$h^{'}(x)<0$，解得$x<-2$或$-2<x<-1$，

所以函数$h(x)$在$(-\infty,-2)$和$(-2,-1)$上单调递减，在$(-1,+\infty)$上单调递增，

且当$x<-2$时，$h(x)<0$，

而$x\to -2^+$时，$h(x)\to +\infty$，当$x\to +\infty$时，$h(x)\to +\infty$，

所以当$a=\frac{e^x}{x+2}$有两个解时，有$a>h(-1)=\frac{1}{e}$，

所以满足条件的a的取值范围是：$(\frac{1}{e},+\infty)$.

【点睛】该题考查的是有关应用导数研究函数的问题，涉及到的知识点有应用导数研究函数的单调性，根据零点个数求参数的取值范围，在解题的过程中，也可以利用数形结合，将问

题转化为曲线 $y=e^x$ 和直线 $y=a(x+2)$ 有两个交点，利用过点 $(-2,0)$ 的曲线 $y=e^x$ 的切线斜率，结合图形求得结果.

21.已知A、B分别为椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$（$a>1$）的左、右顶点，G为E的上顶点，$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$，$P$为直线$x=6$上的动点，$PA$与$E$的另一交点为$C$，$PB$与$E$的另一交点为$D$.

（1）求E的方程；

（2）证明：直线CD过定点.

【答案】（1）$\frac{x^2}{9}+y^2=1$；（2）证明详见解析.

【解析】

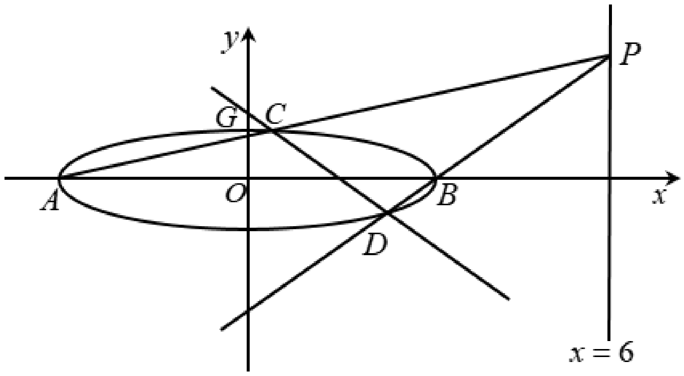
【分析】

（1）由已知可得：$A(-a,0)$，

$B(a,0)$，$G(0,1)$，即可求得 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=a^2-1$，结合已知即可求得：$a^2=9$，问题得解.

（2）设 $P(6,y_0)$，可得直线 AP 的方程为：$y=\frac{y_0}{9}(x+3)$，联立直线 AP 的方程与椭圆方程即可求得点 C 的坐标为 $\left(\frac{-3{y_0}^2+27}{{y_0}^2+9},\frac{6y_0}{{y_0}^2+9}\right)$，同理可得点 D 的坐标为 $\left(\frac{3{y_0}^2-3}{{y_0}^2+1},\frac{-2y_0}{{y_0}^2+1}\right)$，即可表示出直线 CD 的方程，整理直线 CD 的方程可得：$y=\frac{4y_0}{3(3-{y_0}^2)}\left(x-\frac{3}{2}\right)$，命题得证.

【详解】（1）依据题意作出如下图象：



由椭圆方程$E:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$可得：$A\left(-a,0\right)$， $B\left(a,0\right)$，$G\left(0,1\right)$

$\therefore \overrightarrow{AG}=\left(a,1\right)$，$\overrightarrow{GB}=\left(a,-1\right)$

$\therefore \overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=a^2-1=8$，$\therefore a^2=9$

$\therefore$椭圆方程为：$\frac{x^2}{9}+y^2=1$

（2）证明：设$P\left(6,y_0\right)$，

则直线AP的方程为：$y=\frac{y_0-0}{6-\left(-3\right)}\left(x+3\right)$，即：$y=\frac{y_0}{9}\left(x+3\right)$

联立直线AP的方程与椭圆方程可得：$\begin{cases}\frac{x^2}{9}+y^2=1\\ y=\frac{y_0}{9}\left(x+3\right)\end{cases}$，整理得：

$\left({y_0}^2+9\right)x^2+6{y_0}^2x+9{y_0}^2-81=0$，解得：$x=-3$或$x=\frac{-3{y_0}^2+27}{{y_0}^2+9}$

将$x=\frac{-3{y_0}^2+27}{{y_0}^2+9}$代入直线$y=\frac{y_0}{9}\left(x+3\right)$可得：$y=\frac{6y_0}{{y_0}^2+9}$

所以点C的坐标为$\left(\frac{-3{y_0}^2+27}{{y_0}^2+9},\frac{6y_0}{{y_0}^2+9}\right)$.

同理可得：点D的坐标为$\left(\frac{3{y_0}^2-3}{{y_0}^2+1},\frac{-2y_0}{{y_0}^2+1}\right)$

$\therefore$ 直线 CD 的方程为： $y-\left(\dfrac{-2y_0}{y_0^2+1}\right)=\dfrac{\dfrac{6y_0}{y_0^2+9}-\left(\dfrac{-2y_0}{y_0^2+1}\right)}{\dfrac{-3y_0^2+27}{y_0^2+9}-\dfrac{3y_0^2-3}{y_0^2+1}}\left(x-\dfrac{3y_0^2-3}{y_0^2+1}\right)$，

整理可得： $y+\dfrac{2y_0}{y_0^2+1}=\dfrac{8y_0\left(y_0^2+3\right)}{6\left(9-y_0^4\right)}\left(x-\dfrac{3y_0^2-3}{y_0^2+1}\right)=\dfrac{8y_0}{6\left(3-y_0^2\right)}\left(x-\dfrac{3y_0^2-3}{y_0^2+1}\right)$

整理得： $y=\dfrac{4y_0}{3\left(3-y_0^2\right)}x+\dfrac{2y_0}{y_0^2-3}=\dfrac{4y_0}{3\left(3-y_0^2\right)}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$

故直线 CD 过定点 $\left(\dfrac{3}{2},0\right)$

【点睛】本题主要考查了椭圆的简单性质及方程思想，还考查了计算能力及转化思想、推理论证能力，属于难题.

（二）选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分.

[选修4—4：坐标系与参数方程]

22.在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos^k t,\\ y=\sin^k t\end{cases}$ $(t$ 为参数$)$．以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $4\rho\cos\theta-16\rho\sin\theta+3=0$．

（1）当 $k=1$ 时，C_1 是什么曲线？

（2）当 $k=4$ 时，求 C_1 与 C_2 的公共点的直角坐标.

【答案】（1）曲线 C_1 表示以坐标原点为圆心，半径为1的圆；（2）$(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4})$.

【解析】

【分析】

（1）利用 $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ 消去参数 t，求出曲线 C_1 的普通方程，即可得出结论；

（2）当 $k=4$ 时，$x\geq 0, y\geq 0$，曲线 C_1 的参数方程化为 $\begin{cases}\sqrt{x}=\cos^2 t\\ \sqrt{y}=\sin^2 t\end{cases}$ $(t$ 为参数），两式相加消去参数 t，得 C_1 普通方程，由 $\rho\cos\theta=x, \rho\sin\theta=y$，将曲线 C_2 化为直角坐标方程，联立 C_1, C_2 方程，即可求解.

【详解】（1）当$k=1$时，曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=\cos t\\y=\sin t\end{cases}$($t$为参数），

两式平方相加得$x^2+y^2=1$，

所以曲线C_1表示以坐标原点为圆心，半径为1的圆；

（2）当$k=4$时，曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=\cos^4 t\\y=\sin^4 t\end{cases}$($t$为参数），

所以$x\geq 0, y\geq 0$，曲线C_1的参数方程化为$\begin{cases}\sqrt{x}=\cos^2 t\\\sqrt{y}=\sin^2 t\end{cases}$($t$为参数），

两式相加得曲线C_1方程为$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$，

得$\sqrt{y}=1-\sqrt{x}$，平方得$y=x-2\sqrt{x}+1, 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1$，

曲线C_2的极坐标方程为$4\rho\cos\theta-16\rho\sin\theta+3=0$，

曲线C_2直角坐标方程为$4x-16y+3=0$，

联立C_1, C_2方程$\begin{cases}y=x-2\sqrt{x}+1\\4x-16y+3=0\end{cases}$，

整理得$12x-32\sqrt{x}+13=0$，解得$\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}$或$\sqrt{x}=\dfrac{13}{6}$（舍去），

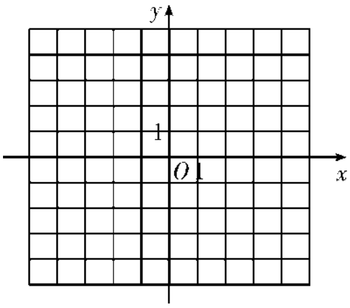
$\therefore x=\dfrac{1}{4}, y=\dfrac{1}{4}$，$\therefore C_1, C_2$公共点的直角坐标为$(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4})$.

【点睛】本题考查参数方程与普通方程互化，极坐标方程与直角坐标方程互化，合理消元是解题的关系，要注意曲线坐标的范围，考查计算求解能力，属于中档题.

[选修4—5：不等式选讲]

23.已知函数$f(x)=|3x+1|-2|x-1|$.

（1）画出$y=f(x)$的图像；



（2）求不等式 $f(x)>f(x+1)$ 的解集.

【答案】（1）详解解析；（2）$\left(-\infty,-\dfrac{7}{6}\right)$.

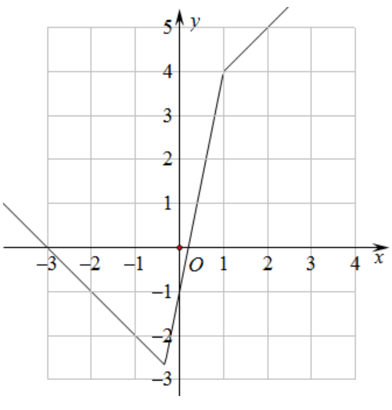
【解析】

【分析】

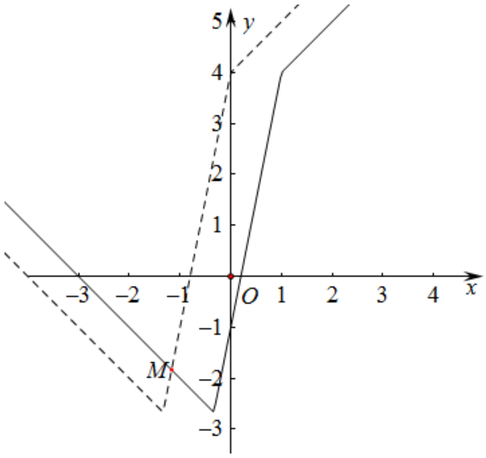
（1）根据分段讨论法，即可写出函数 $f\left(x\right)$ 的解析式，作出图象；

（2）作出函数 $f\left(x+1\right)$ 的图象，根据图象即可解出.

【详解】（1）因为 $f\left(x\right)=\begin{cases} x+3, & x\geq 1 \\ 5x-1, & -\dfrac{1}{3}<x<1 \\ -x-3, & x\leq -\dfrac{1}{3} \end{cases}$，作出图象，如图所示：



（2）将函数 $f\left(x\right)$ 的图象向左平移1个单位，可得函数 $f\left(x+1\right)$ 的图象，如图所示：



由$-x-3=5\left(x+1\right)-1$，解得$x=-\dfrac{7}{6}$.

所以不等式的解集为$\left(-\infty,-\dfrac{7}{6}\right)$.

【点睛】本题主要考查画分段函数的图象，以及利用图象解不等式，意在考查学生的数形结合能力，属于基础题.