

# 2015年全国统一高考数学试卷（文科）（新课标 I）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. (5分) 已知集合 $A = \{x | x = 3n + 2, n \in \mathbb{N}\}$ ,  $B = \{6, 8, 10, 12, 14\}$ , 则集合 $A \cap B$ 中元素的个数为 ( )

- A. 5                      B. 4                      C. 3                      D. 2

【考点】1E: 交集及其运算.

【专题】5J: 集合.

【分析】根据集合的基本运算进行求解.

【解答】解:  $A = \{x | x = 3n + 2, n \in \mathbb{N}\} = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, \dots\}$ ,

则 $A \cap B = \{8, 14\}$ ,

故集合 $A \cap B$ 中元素的个数为2个,

故选: D.

【点评】本题主要考查集合的基本运算, 比较基础.

2. (5分) 已知点A (0, 1), B (3, 2), 向量 $\vec{AC} = (-4, -3)$ , 则向量 $\vec{BC} =$  ( )

- A. (-7, -4)    B. (7, 4)              C. (-1, 4)              D. (1, 4)

【考点】9J: 平面向量的坐标运算.

【专题】5A: 平面向量及应用.

【分析】顺序求出有向线段 $\vec{AB}$ , 然后由 $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$ 求之.

【解答】解: 由已知点A (0, 1), B (3, 2), 得到 $\vec{AB} = (3, 1)$ , 向量 $\vec{AC} = (-4, -3)$ ,

则向量 $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} = (-7, -4)$ ;

故选：A.

**【点评】** 本题考查了有向线段的坐标表示以及向量的三角形法则的运用；注意有向线段的坐标与两个端点的关系，顺序不可颠倒.

3. (5分) 已知复数 $z$ 满足  $(z - 1)i = 1 + i$ , 则 $z =$  ( )

- A.  $-2 - i$       B.  $-2 + i$       C.  $2 - i$       D.  $2 + i$

**【考点】** A5: 复数的运算.

**【专题】** 5N: 数系的扩充和复数.

**【分析】** 由已知等式变形, 然后利用复数代数形式的乘除运算化简求得 $z - 1$ , 进一步求得 $z$ .

**【解答】** 解: 由  $(z - 1)i = 1 + i$ , 得  $z - 1 = \frac{1+i}{i} = \frac{-i(1+i)}{-i^2} = 1 - i$ ,

$\therefore z = 2 - i$ .

故选：C.

**【点评】** 本题考查复数代数形式的乘除运算, 是基础的计算题.

4. (5分) 如果3个正整数可作为一个直角三角形三条边的边长, 则称这3个数为一组勾股数. 从1, 2, 3, 4, 5中任取3个不同的数, 则这3个数构成一组勾股数的概率为 ( )

- A.  $\frac{3}{10}$       B.  $\frac{1}{5}$       C.  $\frac{1}{10}$       D.  $\frac{1}{20}$

**【考点】** CC: 列举法计算基本事件数及事件发生的概率.

**【专题】** 5I: 概率与统计.

**【分析】** 一一列举出所有的基本事件, 再找到勾股数, 根据概率公式计算即可.

**【解答】** 解: 从1, 2, 3, 4, 5中任取3个不同的数, 有  $(1, 2, 3)$ ,  $(1, 2, 4)$ ,  $(1, 2, 5)$ ,  $(1, 3, 4)$ ,  $(1, 3, 5)$ ,  $(1, 4, 5)$   $(2, 3, 4)$ ,  $(2, 3, 5)$ ,  $(2, 4, 5)$ ,  $(3, 4, 5)$  共10种,

其中只有  $(3, 4, 5)$  为勾股数,

故这3个数构成一组勾股数的概率为 $\frac{1}{10}$ .

故选：C.

**【点评】** 本题考查了古典概型概率的问题，关键是不重不漏的列举出所有的基本事件，属于基础题.

5. (5分) 已知椭圆E的中心在坐标原点，离心率为 $\frac{1}{2}$ ，E的右焦点与抛物线C:

$y^2=8x$ 的焦点重合，A，B是C的准线与E的两个交点，则 $|AB|=(\quad)$

A. 3

B. 6

C. 9

D. 12

**【考点】** KH: 直线与圆锥曲线的综合; KI: 圆锥曲线的综合.

**【专题】** 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

**【分析】** 利用椭圆的离心率以及抛物线的焦点坐标，求出椭圆的半长轴，然后求解抛物线的准线方程，求出A，B坐标，即可求解所求结果.

**【解答】** 解：椭圆E的中心在坐标原点，离心率为 $\frac{1}{2}$ ，E的右焦点(c, 0)与抛物线C:  $y^2=8x$ 的焦点(2, 0)重合，

可得 $c=2$ ， $a=4$ ， $b^2=12$ ，椭圆的标准方程为： $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ ，

抛物线的准线方程为： $x=-2$ ，

由 $\begin{cases} x=-2 \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1 \end{cases}$ ，解得 $y=\pm 3$ ，所以A(-2, 3)，B(-2, -3).

$|AB|=6$ .

故选：B.

**【点评】** 本题考查抛物线以及椭圆的简单性质的应用，考查计算能力.

6. (5分) 《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著，书中有如下问题：“今有委米依垣内角，下周八尺，高五尺. 问：积及为米几何？”其意思为：“在屋内墙角处堆放米(如图，米堆为一个圆锥的四分之一)，米堆底部的弧长为8尺，米堆的高为5尺，问米堆的体积和堆放的米各为多少？”已

知1斛米的体积约为1.62立方尺，圆周率约为3，估算出堆放的米约有（  
）



- A. 14斛                      B. 22斛                      C. 36斛                      D. 66斛

**【考点】** LF: 棱柱、棱锥、棱台的体积.

**【专题】** 5F: 空间位置关系与距离.

**【分析】** 根据圆锥的体积公式计算出对应的体积即可.

**【解答】** 解：设圆锥的底面半径为 $r$ ，则 $\frac{\pi}{2}r=8$ ，

解得 $r=\frac{16}{\pi}$ ，

故米堆的体积为 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{16}{\pi}\right)^2 \times 5 \approx \frac{320}{9}$ ，

$\because$ 1斛米的体积约为1.62立方，

$\therefore \frac{320}{9} \div 1.62 \approx 22$ ，

故选：B.

**【点评】** 本题主要考查椎体的体积的计算，比较基础.

7. （5分）已知 $\{a_n\}$ 是公差为1的等差数列， $S_n$ 为 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和，若 $S_8=4S_4$ ，则 $a_{10} =$ （    ）

- A.  $\frac{17}{2}$                       B.  $\frac{19}{2}$                       C. 10                      D. 12

**【考点】** 83: 等差数列的性质.

**【专题】** 11: 计算题；40: 定义法；54: 等差数列与等比数列.

**【分析】** 利用等差数列的通项公式及其前 $n$ 项和公式即可得出.

**【解答】**解：∵ $\{a_n\}$ 是公差为1的等差数列， $S_8=4S_4$ ，

$$\therefore 8a_1 + \frac{8 \times 7}{2} \times 1 = 4 \times \left( 4a_1 + \frac{4 \times 3}{2} \right),$$

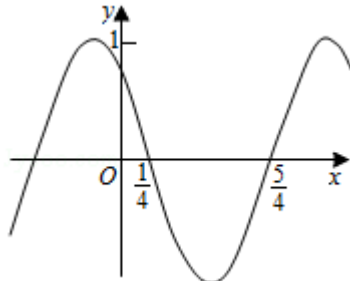
$$\text{解得 } a_1 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{则 } a_{10} = \frac{1}{2} + 9 \times 1 = \frac{19}{2}.$$

故选：B.

**【点评】**本题考查了等差数列的通项公式及其前n项和公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

8. (5分) 函数 $f(x) = \cos(\omega x + \phi)$ 的部分图象如图所示，则 $f(x)$ 的单调递



减区间为 ( )

A.  $(k\pi - \frac{1}{4}, k\pi + \frac{3}{4}), k \in \mathbb{Z}$

B.  $(2k\pi - \frac{1}{4}, 2k\pi + \frac{3}{4}), k \in \mathbb{Z}$

C.  $(k - \frac{1}{4}, k + \frac{3}{4}), k \in \mathbb{Z}$

D.  $(2k - \frac{1}{4}, 2k + \frac{3}{4}), k \in \mathbb{Z}$

**【考点】**HA: 余弦函数的单调性.

**【专题】**57: 三角函数的图像与性质.

**【分析】**由周期求出 $\omega$ ，由五点法作图求出 $\phi$ ，可得 $f(x)$ 的解析式，再根据余弦函数的单调性，求得 $f(x)$ 的减区间.

**【解答】**解：由函数 $f(x) = \cos(\omega x + \phi)$ 的部分图象，可得函数的周期为 $\frac{2\pi}{\omega} =$

$$2 \left( \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \right) = 2, \therefore \omega = \pi, f(x) = \cos(\pi x + \phi).$$

再根据函数的图象以及五点法作图，可得 $\frac{\pi}{4} + \phi = \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ，即 $\phi = \frac{\pi}{4}$ ， $f(x) = \cos$

$$\left( \pi x + \frac{\pi}{4} \right).$$

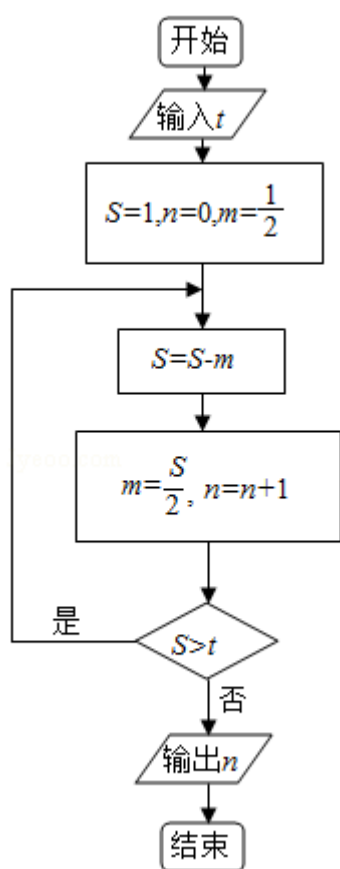
由 $2k\pi \leq \pi x + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \pi$ ，求得  $2k - \frac{1}{4} \leq x \leq 2k + \frac{3}{4}$ ，故 $f(x)$ 的单调递减区间为 (

$$2k - \frac{1}{4}, 2k + \frac{3}{4}), k \in \mathbb{Z},$$

故选：D.

**【点评】** 本题主要考查由函数  $y = A \sin(\omega x + \phi)$  的部分图象求解析式，由周期求出  $\omega$ ，由五点法作图求出  $\phi$  的值；还考查了余弦函数的单调性，属于基础题.

9. (5分) 执行如图所示的程序框图，如果输入的  $t = 0.01$ ，则输出的  $n =$  ( )



A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

**【考点】** EF: 程序框图.

**【专题】** 5K: 算法和程序框图.

**【分析】** 由已知中的程序框图可知：该程序的功能是利用循环结构计算并输出变量  $n$  的值，模拟程序的运行过程，分析循环中各变量值的变化情况，可得答案.

**【解答】**解：第一次执行循环体后， $S=\frac{1}{2}$ ， $m=\frac{1}{4}$ ， $n=1$ ，不满足退出循环的条件

；

再次执行循环体后， $S=\frac{1}{4}$ ， $m=\frac{1}{8}$ ， $n=2$ ，不满足退出循环的条件；

再次执行循环体后， $S=\frac{1}{8}$ ， $m=\frac{1}{16}$ ， $n=3$ ，不满足退出循环的条件；

再次执行循环体后， $S=\frac{1}{16}$ ， $m=\frac{1}{32}$ ， $n=4$ ，不满足退出循环的条件；

再次执行循环体后， $S=\frac{1}{32}$ ， $m=\frac{1}{64}$ ， $n=5$ ，不满足退出循环的条件；

再次执行循环体后， $S=\frac{1}{64}$ ， $m=\frac{1}{128}$ ， $n=6$ ，不满足退出循环的条件；

再次执行循环体后， $S=\frac{1}{128}$ ， $m=\frac{1}{256}$ ， $n=7$ ，满足退出循环的条件；

故输出的 $n$ 值为7，

故选：C.

**【点评】**本题考查的知识点是程序框图，当循环的次数不多，或有规律时，常采用模拟循环的方法解答.

10. (5分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{x-1}-2, & x \leq 1 \\ -\log_2(x+1), & x > 1 \end{cases}$ ，且 $f(a) = -3$ ，则 $f(6-a)$

) = ( )

A.  $-\frac{7}{4}$

B.  $-\frac{5}{4}$

C.  $-\frac{3}{4}$

D.  $-\frac{1}{4}$

**【考点】**3T：函数的值.

**【专题】**11：计算题；51：函数的性质及应用.

**【分析】**利用分段函数，求出 $a$ ，再求 $f(6-a)$ .

**【解答】**解：由题意， $a \leq 1$ 时， $2^{a-1}-2 = -3$ ，无解；

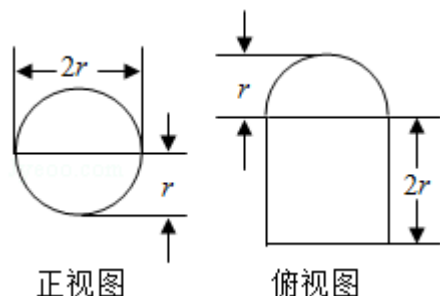
$a > 1$ 时， $-\log_2(a+1) = -3$ ， $\therefore a=7$ ，

$\therefore f(6-a) = f(-1) = 2^{-1-1}-2 = -\frac{7}{4}$ .

故选：A.

**【点评】**本题考查分段函数，考查学生的计算能力，比较基础.

11. (5分) 圆柱被一个平面截去一部分后与半球(半径为 $r$ )组成一个几何体, 该几何体三视图中的正视图和俯视图如图所示. 若该几何体的表面积为 $16+20\pi$ , 则 $r=$  ( )



- A. 1                      B. 2                      C. 4                      D. 8

**【考点】** L1: 由三视图求面积、体积.

**【专题】** 5Q: 立体几何.

**【分析】** 通过三视图可知该几何体是一个半球拼接半个圆柱, 计算即可.

**【解答】** 解: 由几何体三视图中的正视图和俯视图可知,

截圆柱的平面过圆柱的轴线,

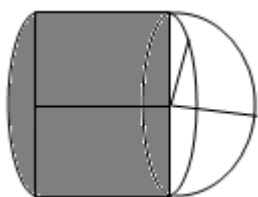
该几何体是一个半球拼接半个圆柱,

$$\therefore \text{其表面积为: } \frac{1}{2} \times 4\pi r^2 + \frac{1}{2} \times \pi r^2 + \frac{1}{2} \times 2r \times 2\pi r + 2r \times 2r + \frac{1}{2} \times \pi r^2 = 5\pi r^2 + 4r^2,$$

又 $\because$ 该几何体的表面积为 $16+20\pi$ ,

$$\therefore 5\pi r^2 + 4r^2 = 16 + 20\pi, \text{ 解得 } r=2,$$

故选: B.



**【点评】** 本题考查由三视图求表面积问题, 考查空间想象能力, 注意解题方法的积累, 属于中档题.

12. (5分) 设函数 $y=f(x)$ 的图象与 $y=2^{x+a}$ 的图象关于 $y=-x$ 对称, 且 $f(-2)+f(-4)=1$ , 则 $a=$  ( )

A. -1

B. 1

C. 2

D. 4

【考点】3A: 函数的图象与图象的变换.

【专题】26: 开放型; 51: 函数的性质及应用.

【分析】先求出与 $y=2^{x+a}$ 的反函数的解析式, 再由题意 $f(x)$ 的图象与 $y=2^{x+a}$ 的反函数的图象关于原点对称, 继而求出函数 $f(x)$ 的解析式, 问题得以解决.

【解答】解:  $\because$ 与 $y=2^{x+a}$ 的图象关于 $y=x$ 对称的图象是 $y=2^{x+a}$ 的反函数,

$$y=\log_2 x - a \quad (x>0),$$

$$\text{即 } g(x)=\log_2 x - a, \quad (x>0).$$

$\because$ 函数 $y=f(x)$ 的图象与 $y=2^{x+a}$ 的图象关于 $y=-x$ 对称,

$$\therefore f(x)=-g(-x)=-\log_2(-x)+a, \quad x<0,$$

$$\therefore f(-2)+f(-4)=1,$$

$$\therefore -\log_2 2+a-\log_2 4+a=1,$$

解得,  $a=2$ ,

故选: C.

【点评】本题考查反函数的概念、互为反函数的函数图象的关系、求反函数的方法等相关知识和方法, 属于基础题

## 二、本大题共4小题, 每小题5分.

13. (5分) 在数列 $\{a_n\}$ 中,  $a_1=2$ ,  $a_{n+1}=2a_n$ ,  $S_n$ 为 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和, 若 $S_n=126$ , 则  
 $n=\underline{6}$ .

【考点】89: 等比数列的前 $n$ 项和.

【专题】11: 计算题; 54: 等差数列与等比数列.

【分析】由 $a_{n+1}=2a_n$ , 结合等比数列的定义可知数列 $\{a_n\}$ 是 $a_1=2$ 为首项, 以2为公比的等比数列, 代入等比数列的求和公式即可求解.

【解答】解:  $\because a_{n+1}=2a_n$ ,

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n}=2,$$

$$\because a_1=2,$$

$\therefore$ 数列  $\{a_n\}$  是  $a_1=2$  为首项, 以 2 为公比的等比数列,

$$\therefore S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 2^{n+1} - 2 = 126,$$

$$\therefore 2^{n+1} = 128,$$

$$\therefore n+1=7,$$

$$\therefore n=6.$$

故答案为: 6

**【点评】** 本题主要考查了等比数列的通项公式及求和公式的简单应用, 解题的关键是熟练掌握基本公式.

14. (5分) 已知函数  $f(x) = ax^3 + x + 1$  的图象在点  $(1, f(1))$  处的切线过点  $(2, 7)$ , 则  $a = \underline{1}$ .

**【考点】** 6H: 利用导数研究曲线上某点切线方程.

**【专题】** 53: 导数的综合应用.

**【分析】** 求出函数的导数, 利用切线的方程经过的点求解即可.

**【解答】** 解: 函数  $f(x) = ax^3 + x + 1$  的导数为:  $f'(x) = 3ax^2 + 1$ ,  $f'(1) = 3a + 1$ , 而  $f(1) = a + 2$ ,

切线方程为:  $y - a - 2 = (3a + 1)(x - 1)$ , 因为切线方程经过  $(2, 7)$ ,

所以  $7 - a - 2 = (3a + 1)(2 - 1)$ ,

解得  $a = 1$ .

故答案为: 1.

**【点评】** 本题考查函数的导数的应用, 切线方程的求法, 考查计算能力.

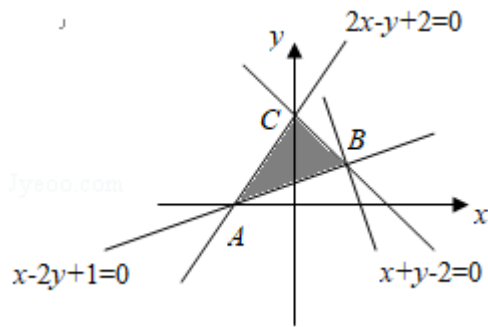
15. (5分) 若  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x+y-2 \leq 0 \\ x-2y+1 \leq 0 \\ 2x-y+2 \geq 0 \end{cases}$ , 则  $z = 3x + y$  的最大值为 4.

**【考点】** 7C: 简单线性规划.

【专题】59：不等式的解法及应用.

【分析】由约束条件作出可行域，化目标函数为直线方程的斜截式，数形结合得到最优解，代入最优解的坐标得答案.

【解答】解：由约束条件 
$$\begin{cases} x+y-2 \leq 0 \\ x-2y+1 \leq 0 \\ 2x-y+2 \geq 0 \end{cases}$$
 作出可行域如图，



化目标函数  $z=3x+y$  为  $y=-3x+z$ ,

由图可知，当直线  $y=-3x+z$  过 B (1, 1) 时，直线在 y 轴上的截距最大，此时 z 有最大值为  $3 \times 1 + 1 = 4$ .

故答案为：4.

【点评】本题考查简单的线性规划，考查了数形结合的解题思想方法，是中档题.

16. (5分) 已知 F 是双曲线 C:  $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$  的右焦点，P 是 C 的左支上一点，A (0,  $6\sqrt{6}$ ) . 当  $\triangle APF$  周长最小时，该三角形的面积为  $12\sqrt{6}$ .

【考点】KC：双曲线的性质.

【专题】11：计算题；26：开放型；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】利用双曲线的定义，确定  $\triangle APF$  周长最小时，P 的坐标，即可求出  $\triangle APF$  周长最小时，该三角形的面积.

【解答】解：由题意，设  $F'$  是左焦点，则  $\triangle APF$  周长 =  $|AF| + |AP| + |PF| = |AF| + |AP| + |PF'| + 2$   
 $\geq |AF| + |AF'| + 2$  (A, P,  $F'$  三点共线时，取等号)，

直线AF'的方程为 $\frac{x}{-3} + \frac{y}{6\sqrt{6}} = 1$ 与 $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$ 联立可得 $y^2 + 6\sqrt{6}y - 96 = 0$ ,

∴P的纵坐标为 $2\sqrt{6}$ ,

∴△APF周长最小时, 该三角形的面积为 $\frac{1}{2} \times 6 \times 6\sqrt{6} - \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{6} = 12\sqrt{6}$ .

故答案为:  $12\sqrt{6}$ .

**【点评】** 本题考查双曲线的定义, 考查三角形面积的计算, 确定P的坐标是关键

三、解答题: 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (12分) 已知a, b, c分别是△ABC内角A, B, C的对边,  $\sin^2 B = 2\sin A \sin C$ .

(I) 若 $a=b$ , 求 $\cos B$ ;

(II) 设 $B=90^\circ$ , 且 $a=\sqrt{2}$ , 求△ABC的面积.

**【考点】** HP: 正弦定理; HR: 余弦定理.

**【专题】** 58: 解三角形.

**【分析】** (I)  $\sin^2 B = 2\sin A \sin C$ , 由正弦定理可得:  $b^2 = 2ac$ , 再利用余弦定理即可得出.

(II) 利用(I)及勾股定理可得c, 再利用三角形面积计算公式即可得出.

**【解答】** 解: (I) ∵ $\sin^2 B = 2\sin A \sin C$ ,

由正弦定理可得:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{1}{k} > 0$ ,

代入可得  $(bk)^2 = 2ak \cdot ck$ ,

∴ $b^2 = 2ac$ ,

∵ $a=b$ , ∴ $a=2c$ ,

由余弦定理可得:  $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + \frac{1}{4}a^2 - a^2}{2a \times \frac{1}{2}a} = \frac{1}{4}$ .

(II) 由(I)可得:  $b^2 = 2ac$ ,

∵ $B=90^\circ$ , 且 $a=\sqrt{2}$ ,

∴ $a^2 + c^2 = b^2 = 2ac$ , 解得 $a=c=\sqrt{2}$ .

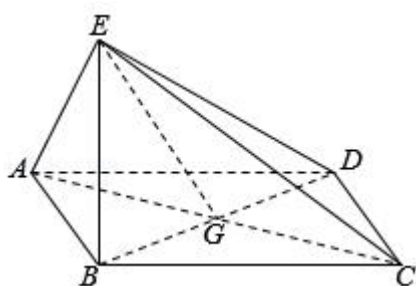
$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac = 1.$$

**【点评】** 本题考查了正弦定理余弦定理、勾股定理、三角形面积计算公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

18. (12分) 如图，四边形ABCD为菱形，G为AC与BD的交点，BE⊥平面ABCD.

(I) 证明：平面AEC⊥平面BED；

(II) 若∠ABC=120°，AE⊥EC，三棱锥E-ACD的体积为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，求该三棱锥的侧面积.



**【考点】** LE: 棱柱、棱锥、棱台的侧面积和表面积；LY: 平面与平面垂直.

**【专题】** 5F: 空间位置关系与距离.

**【分析】** (I) 根据面面垂直的判定定理即可证明：平面AEC⊥平面BED；

(II) 根据三棱锥的条件公式，进行计算即可.

**【解答】** 证明：(I) ∵ 四边形ABCD为菱形，

$$\therefore AC \perp BD,$$

$$\therefore BE \perp \text{平面} ABCD,$$

$$\therefore AC \perp BE,$$

则  $AC \perp \text{平面} BED,$

$$\therefore AC \subset \text{平面} AEC,$$

$$\therefore \text{平面} AEC \perp \text{平面} BED;$$

解：(II) 设  $AB = x$ ，在菱形ABCD中，由  $\angle ABC = 120^\circ$ ，得  $AG = GC = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ ， $GB = GD = \frac{x}{2}$

,

$$\therefore BE \perp \text{平面} ABCD,$$

$\therefore BE \perp BG$ ，则  $\triangle EBG$  为直角三角形，

$$\therefore EG = \frac{1}{2}AC = AG = \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

$$\text{则 } BE = \sqrt{EG^2 - BG^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

$$\therefore \text{三棱锥 } E - ACD \text{ 的体积 } V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}AC \cdot GD \cdot BE = \frac{\sqrt{6}}{24}x^3 = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

解得  $x=2$ ，即  $AB=2$ ，

$$\therefore \angle ABC = 120^\circ,$$

$$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos ABC = 4 + 4 - 2 \times 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 12,$$

$$\text{即 } AC = \sqrt{12} = 2\sqrt{3},$$

在三个直角三角形  $EBA$ ， $EBD$ ， $EBC$  中，斜边  $AE=EC=ED$ ，

$\therefore AE \perp EC$ ， $\therefore \triangle EAC$  为等腰三角形，

$$\text{则 } AE^2 + EC^2 = AC^2 = 12,$$

$$\text{即 } 2AE^2 = 12,$$

$$\therefore AE^2 = 6,$$

$$\text{则 } AE = \sqrt{6},$$

$$\therefore \text{从而得 } AE = EC = ED = \sqrt{6},$$

$$\therefore \triangle EAC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} \times EA \cdot EC = \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \sqrt{6} = 3,$$

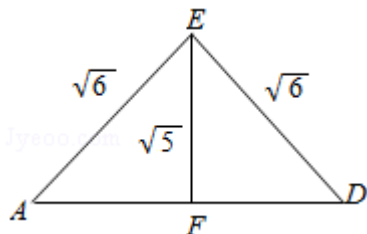
在等腰三角形  $EAD$  中，过  $E$  作  $EF \perp AD$  于  $F$ ，

$$\text{则 } AE = \sqrt{6}, AF = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \times 2 = 1,$$

$$\text{则 } EF = \sqrt{(\sqrt{6})^2 - 1^2} = \sqrt{5},$$

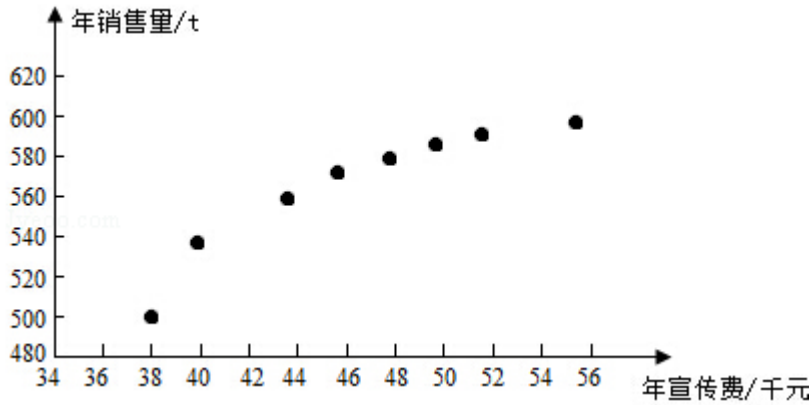
$$\therefore \triangle EAD \text{ 的面积和 } \triangle ECD \text{ 的面积均为 } S = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{5} = \sqrt{5},$$

故该三棱锥的侧面积为  $3 + 2\sqrt{5}$ .



**【点评】** 本题主要考查面面垂直的判定，以及三棱锥体积的计算，要求熟练掌握相应的判定定理以及体积公式。

19. (12分) 某公司为确定下一年度投入某种产品的宣传费, 需了解年宣传费 $x$  (单位: 千元) 对年销售量 $y$  (单位: t) 和年利润 $z$  (单位: 千元) 的影响, 对近8年的年宣传费 $x_i$ 和年销售量 $y_i$  ( $i=1, 2, \dots, 8$ ) 数据作了初步处理, 得到下面的散点图及一些统计量的值.



$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{w}$	$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})^2$	$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})(y_i - \bar{y})$
46.6	563	6.8	289.8	1.6	1469	108.8

表中 $w_i = \sqrt{x_i}$ ,  $\bar{w} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 w_i$

- (I) 根据散点图判断,  $y=a+bx$ 与 $y=c+d\sqrt{x}$ 哪一个适宜作为年销售量 $y$ 关于年宣传费 $x$ 的回归方程类型? (给出判断即可, 不必说明理由)
- (II) 根据(I)的判断结果及表中数据, 建立 $y$ 关于 $x$ 的回归方程;
- (III) 已知这种产品的年利润 $z$ 与 $x$ 、 $y$ 的关系为 $z=0.2y - x$ . 根据(II)的结果回答下列问题:
- (i) 年宣传费 $x=49$ 时, 年销售量及年利润的预报值是多少?
- (ii) 年宣传费 $x$ 为何值时, 年利润的预报值最大?

附: 对于一组数据  $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$ , 其回归线 $v=\alpha+\beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为:  $\hat{\beta} =$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}, \quad \hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta} \bar{u}.$$

**【考点】** BK: 线性回归方程.

**【专题】** 5I: 概率与统计.

**【分析】** (I) 根据散点图, 即可判断出,

(II) 先建立中间量  $w = \sqrt{x}$ , 建立  $y$  关于  $w$  的线性回归方程, 根据公式求出  $w$ , 问题得以解决;

(III) (i) 年宣传费  $x=49$  时, 代入到回归方程, 计算即可,

(ii) 求出预报值得方程, 根据函数的性质, 即可求出.

**【解答】** 解: (I) 由散点图可以判断,  $y=c+d\sqrt{x}$  适宜作为年销售量  $y$  关于年宣传费  $x$  的回归方程类型;

(II) 令  $w = \sqrt{x}$ , 先建立  $y$  关于  $w$  的线性回归方程, 由于  $\hat{d} = \frac{108.8}{1.6} = 68$ ,

$$\hat{c} = \bar{y} - \hat{d}\bar{w} = 563 - 68 \times 6.8 = 100.6,$$

所以  $y$  关于  $w$  的线性回归方程为  $\hat{y} = 100.6 + 68w$ ,

因此  $y$  关于  $x$  的回归方程为  $\hat{y} = 100.6 + 68\sqrt{x}$ ,

(III) (i) 由 (II) 知, 当  $x=49$  时, 年销售量  $y$  的预报值  $\hat{y} = 100.6 + 68\sqrt{49} = 576.6$

,  
年利润  $z$  的预报值  $\hat{z} = 576.6 \times 0.2 - 49 = 66.32$ ,

(ii) 根据 (II) 的结果可知, 年利润  $z$  的预报值  $\hat{z} = 0.2(100.6 + 68\sqrt{x}) - x = -x + 13.6\sqrt{x} + 20.12$ ,

当  $\sqrt{x} = \frac{13.6}{2} = 6.8$  时, 即当  $x = 46.24$  时, 年利润的预报值最大.

**【点评】** 本题主要考查了线性回归方程和散点图的问题, 准确的计算是本题的关键, 属于中档题.

20. (12分) 已知过点A (0, 1) 且斜率为k的直线l与圆C:  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$  交于点M、N两点.

(1) 求k的取值范围;

(2) 若  $\vec{OM} \cdot \vec{ON} = 12$ , 其中O为坐标原点, 求|MN|.

**【考点】** 90: 平面向量数量积的性质及其运算; 19: 直线与圆的位置关系.

**【专题】** 26: 开放型; 5B: 直线与圆.

**【分析】** (1) 由题意可得, 直线l的斜率存在, 用点斜式求得直线l的方程, 根据圆心到直线的距离等于半径求得k的值, 可得满足条件的k的范围.

(2) 由题意可得, 经过点M、N、A的直线方程为  $y = kx + 1$ , 根据直线和圆相交的弦长公式进行求解.

**【解答】** (1) 由题意可得, 直线l的斜率存在,

设过点A (0, 1) 的直线方程:  $y = kx + 1$ , 即:  $kx - y + 1 = 0$ .

由已知可得圆C的圆心C的坐标 (2, 3), 半径  $R = 1$ .

故由  $\frac{|2k - 3 + 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} < 1$ ,

故当  $\frac{4 - \sqrt{7}}{3} < k < \frac{4 + \sqrt{7}}{3}$ , 过点A (0, 1) 的直线与圆C:  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$  相交于M, N两点.

(2) 设M ( $x_1, y_1$ ); N ( $x_2, y_2$ ),

由题意可得, 经过点M、N、A的直线方程为  $y = kx + 1$ , 代入圆C的方程  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ ,

可得  $(1 + k^2)x^2 - 4(k + 1)x + 7 = 0$ ,

$\therefore x_1 + x_2 = \frac{4(1 + k)}{1 + k^2}$ ,  $x_1 \cdot x_2 = \frac{7}{1 + k^2}$ ,

$\therefore y_1 \cdot y_2 = (kx_1 + 1)(kx_2 + 1) = k^2 x_1 x_2 + k(x_1 + x_2) + 1$

$= \frac{7}{1 + k^2} \cdot k^2 + k \cdot \frac{4(1 + k)}{1 + k^2} + 1 = \frac{12k^2 + 4k + 1}{1 + k^2}$ ,

由  $\vec{OM} \cdot \vec{ON} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = \frac{12k^2 + 4k + 8}{1 + k^2} = 12$ , 解得  $k = 1$ ,

故直线l的方程为  $y=x+1$ ，即  $x - y + 1 = 0$ 。

圆心C在直线l上，MN长即为圆的直径。

所以  $|MN|=2$ 。

**【点评】** 本题主要考查直线和圆的位置关系的应用，以及直线和圆相交的弦长公式的计算，考查学生的计算能力。

21. (12分) 设函数  $f(x) = e^{2x} - \ln x$ 。

(I) 讨论  $f(x)$  的导函数  $f'(x)$  零点的个数；

(II) 证明：当  $a > 0$  时， $f(x) \geq 2a + a \ln \frac{2}{a}$ 。

**【考点】** 53：函数的零点与方程根的关系；63：导数的运算；6E：利用导数研究函数的最值。

**【专题】** 26：开放型；53：导数的综合应用。

**【分析】** (I) 先求导，在分类讨论，当  $a \leq 0$  时，当  $a > 0$  时，根据零点存在定理，即可求出；

(II) 设导函数  $f'(x)$  在  $(0, +\infty)$  上的唯一零点为  $x_0$ ，根据函数  $f(x)$  的单调性得到函数的最小值  $f(x_0)$ ，只要最小值大于  $2a + a \ln \frac{2}{a}$ ，问题得以证明。

**【解答】** 解：(I)  $f(x) = e^{2x} - \ln x$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ，

$$\therefore f'(x) = 2e^{2x} - \frac{a}{x}.$$

当  $a \leq 0$  时， $f'(x) > 0$  恒成立，故  $f'(x)$  没有零点，

当  $a > 0$  时， $\because y = e^{2x}$  为单调递增， $y = -\frac{a}{x}$  单调递增，

$\therefore f'(x)$  在  $(0, +\infty)$  单调递增，

又  $f'(a) > 0$ ，

假设存在  $b$  满足  $0 < b < \ln \frac{a}{2}$  时，且  $b < \frac{1}{4}$ ， $f'(b) < 0$ ，

故当  $a > 0$  时，导函数  $f'(x)$  存在唯一的零点，

(II) 由 (I) 知，可设导函数  $f'(x)$  在  $(0, +\infty)$  上的唯一零点为  $x_0$ ，

当  $x \in (0, x_0)$  时， $f'(x) < 0$ ，

当  $x \in (x_0, +\infty)$  时， $f'(x) > 0$ ，

故 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 单调递增,

所欲当 $x=x_0$ 时,  $f(x)$ 取得最小值, 最小值为 $f(x_0)$ ,

由于 $2e^{2x_0} - \frac{a}{x_0} = 0$ ,

所以 $f(x_0) = \frac{a}{2x_0} + 2ax_0 + a \ln \frac{2}{a} \geq 2a + a \ln \frac{2}{a}$ .

故当 $a > 0$ 时,  $f(x) \geq 2a + a \ln \frac{2}{a}$ .

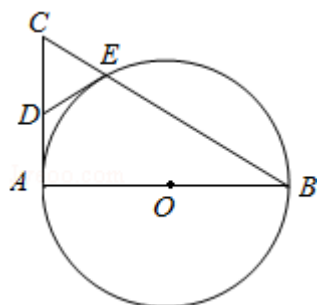
**【点评】** 本题考查了导数和函数单调性的关系和最值的关系, 以及函数的零点存在定理, 属于中档题.

四、请考生在第22、23、24题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分. **【选修4-1: 几何证明选讲】**

22. (10分) 如图,  $AB$ 是 $\odot O$ 的直径,  $AC$ 是 $\odot O$ 的切线,  $BC$ 交 $\odot O$ 于点 $E$ .

(I) 若 $D$ 为 $AC$ 的中点, 证明:  $DE$ 是 $\odot O$ 的切线;

(II) 若 $OA = \sqrt{3}CE$ , 求 $\angle ACB$ 的大小.



**【考点】** N9: 圆的切线的判定定理的证明.

**【专题】** 5B: 直线与圆.

**【分析】** (I) 连接 $AE$ 和 $OE$ , 由三角形和圆的知识易得 $\angle OED = 90^\circ$ , 可得 $DE$ 是 $\odot O$ 的切线;

(II) 设 $CE = 1$ ,  $AE = x$ , 由射影定理可得关于 $x$ 的方程 $x^2 = \sqrt{12 - x^2}$ , 解方程可得 $x$ 值, 可得所求角度.

**【解答】** 解: (I) 连接 $AE$ , 由已知得 $AE \perp BC$ ,  $AC \perp AB$ , 在 $RT\triangle ABC$ 中, 由已知可得 $DE = DC$ ,  $\therefore \angle DEC = \angle DCE$ , 连接 $OE$ , 则 $\angle OBE = \angle OEB$ ,

又 $\angle ACB + \angle ABC = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle DEC + \angle OEB = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle OED = 90^\circ$ ,  $\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线;

(II) 设 $CE=1$ ,  $AE=x$ ,

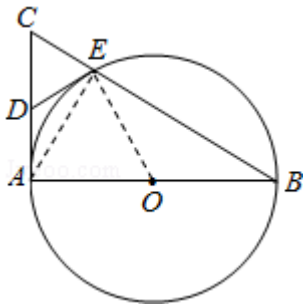
由已知得 $AB=2\sqrt{3}$ ,  $BE=\sqrt{12-x^2}$ ,

由射影定理可得 $AE^2=CE \cdot BE$ ,

$\therefore x^2 = \sqrt{12-x^2}$ , 即 $x^4 + x^2 - 12 = 0$ ,

解方程可得 $x = \sqrt{3}$

$\therefore \angle ACB = 60^\circ$



**【点评】** 本题考查圆的切线的判定, 涉及射影定理和三角形的知识, 属基础题

## 五、【选修4-4: 坐标系与参数方程】

23. 在直角坐标系 $xOy$ 中, 直线 $C_1: x = -2$ , 圆 $C_2: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ , 以坐标原点为极点,  $x$ 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(I) 求 $C_1, C_2$ 的极坐标方程;

(II) 若直线 $C_3$ 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{4}$  ( $\rho \in \mathbb{R}$ ), 设 $C_2$ 与 $C_3$ 的交点为 $M, N$ , 求 $\triangle C_2MN$ 的面积.

**【考点】** Q4: 简单曲线的极坐标方程.

**【专题】** 5S: 坐标系和参数方程.

**【分析】** (I) 由条件根据 $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ 求得 $C_1, C_2$ 的极坐标方程.

(II) 把直线 $C_3$ 的极坐标方程代入 $\rho^2 - 3\sqrt{2}\rho + 4 = 0$ , 求得 $\rho_1$ 和 $\rho_2$ 的值, 结合圆的半径可得 $C_2M \perp C_2N$ , 从而求得 $\triangle C_2MN$ 的面积 $\frac{1}{2} \cdot C_2M \cdot C_2N$ 的值.

**【解答】**解：（I）由于 $x=\rho\cos\theta$ ,  $y=\rho\sin\theta$ ,  $\therefore C_1: x=-2$  的极坐标方程为  $\rho\cos\theta=-2$ ,

故 $C_2: (x-1)^2+(y-2)^2=1$ 的极坐标方程为:

$$(\rho\cos\theta-1)^2+(\rho\sin\theta-2)^2=1,$$

化简可得 $\rho^2-(2\rho\cos\theta+4\rho\sin\theta)+4=0$ .

（II）把直线 $C_3$ 的极坐标方程 $\theta=\frac{\pi}{4}$  ( $\rho\in\mathbb{R}$ ) 代入

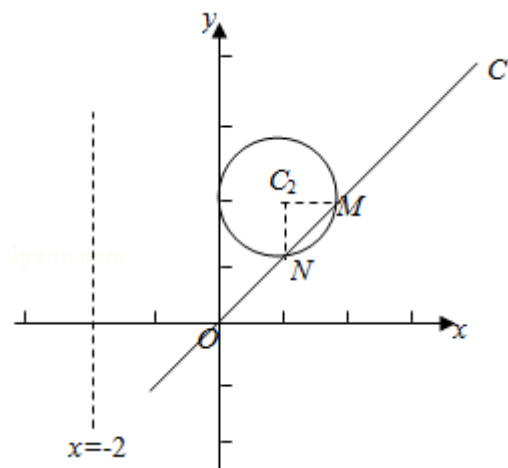
$$\text{圆}C_2: (x-1)^2+(y-2)^2=1,$$

可得 $\rho^2-(2\rho\cos\theta+4\rho\sin\theta)+4=0$ ,

$$\text{求得}\rho_1=2\sqrt{2}, \rho_2=\sqrt{2},$$

$\therefore |MN|=|\rho_1-\rho_2|=\sqrt{2}$ , 由于圆 $C_2$ 的半径为1,  $\therefore C_2M\perp C_2N$ ,

$$\Delta C_2MN\text{的面积为}\frac{1}{2}\cdot C_2M\cdot C_2N=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}.$$



**【点评】**本题主要考查简单曲线的极坐标方程, 点的极坐标的定义, 属于基础题.

## 六、【选修4-5: 不等式选讲】

24. 已知函数 $f(x)=|x+1|-2|x-a|$ ,  $a>0$ .

（I）当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)>1$ 的解集;

（II）若 $f(x)$ 的图象与 $x$ 轴围成的三角形面积大于6, 求 $a$ 的取值范围.

**【考点】**R5: 绝对值不等式的解法.

**【专题】**59: 不等式的解法及应用.

**【分析】**（Ⅰ）当 $a=1$ 时，把原不等式去掉绝对值，转化为与之等价的三个不等式组，分别求得每个不等式组的解集，再取并集，即得所求。（Ⅱ）化简函数 $f(x)$ 的解析式，求得它的图象与 $x$ 轴围成的三角形的三个顶点的坐标，从而求得 $f(x)$ 的图象与 $x$ 轴围成的三角形面积；再根据 $f(x)$ 的图象与 $x$ 轴围成的三角形面积大于6，从而求得 $a$ 的取值范围。

**【解答】**解：（Ⅰ）当 $a=1$ 时，不等式 $f(x) > 1$ ，即 $|x+1| - 2|x-1| > 1$ ，

$$\text{即} \begin{cases} x < -1 \\ -x-1-2(1-x) > 1 \end{cases} \text{①, 或} \begin{cases} -1 \leq x < 1 \\ x+1-2(1-x) > 1 \end{cases} \text{②,}$$

$$\text{或} \begin{cases} x \geq 1 \\ x+1-2(x-1) > 1 \end{cases} \text{③.}$$

解①求得 $x \in \emptyset$ ，解②求得 $\frac{2}{3} < x < 1$ ，解③求得 $1 \leq x < 2$ 。

综上所述，原不等式的解集为 $(\frac{2}{3}, 2)$ 。

$$\text{(Ⅱ) 函数} f(x) = |x+1| - 2|x-a| = \begin{cases} x-1-2a, & x < -1 \\ 3x+1-2a, & -1 \leq x \leq a \\ -x+1+2a, & x > a \end{cases}$$

由此求得 $f(x)$ 的图象与 $x$ 轴的交点 $A(\frac{2a-1}{3}, 0)$ ，

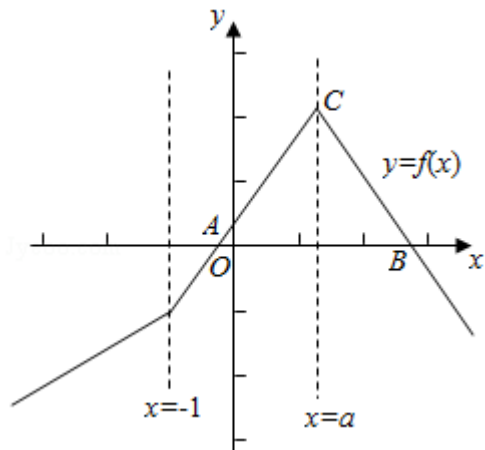
$B(2a+1, 0)$ ，

故 $f(x)$ 的图象与 $x$ 轴围成的三角形的第三个顶点 $C(a, a+1)$ ，

由 $\triangle ABC$ 的面积大于6，

可得 $\frac{1}{2}[2a+1 - \frac{2a-1}{3}] \cdot (a+1) > 6$ ，求得 $a > 2$ 。

故要求的 $a$ 的范围为 $(2, +\infty)$ 。



**【点评】**本题主要考查绝对值不等式的解法，体现了转化、分类讨论的数学思

想，属于中档题.