

绝密★启用前

2010年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学试卷（理工农医类）

（满分150分，考试时间120分钟）

考生注意

1. 本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页。
2. 作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置。
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位。在试卷上作答一律不得分。
4. 用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题。

一、填空题（本大题满分56分）本大题共有14题，考生必须在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分。

1. 不等式 $\frac{2-x}{x+4} > 0$ 的解集是_____。

2. 若复数 $z = 1 - 2i$ (i 为虚数单位)，则 $z \cdot \bar{z} + z =$ _____。

解析：考查复数基本运算 $z \cdot \bar{z} + z = (1 - 2i)(1 + 2i) + 1 - 2i = 6 - 2i$

3. 动点 P 到点 $F(2, 0)$ 的距离与它到直线 $x + 2 = 0$ 的距离相等，则 P 的轨迹方程为_____。

4. 行列式 $\begin{vmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & \sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{6} \end{vmatrix}$ 的值是_____。

5. 圆 $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ 的圆心到直线 $l: 3x + 4y + 4 = 0$ 的距离 $d =$ _____。

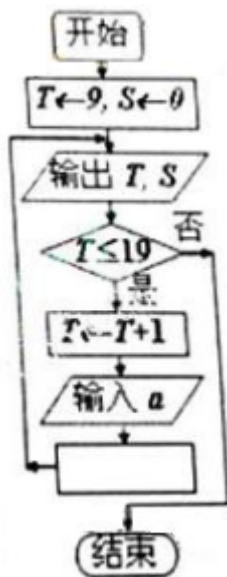
6. 随机变量 ξ 的概率分布率由下图给出：

x	7	8	9	10
$P(\xi = x)$	0.3	0.35	0.2	0.15

则随机变量 ξ 的均值是_____

7.

2010年上海世博会园区每天9:00开园，20:00停止入园。在右边的框图中， S 表示上海世博会官方网站在每个整点报道的入园总人数， a 表示整点报道前1个小时内入园人数，则空白的



执行框内应填入_____。

8. 对任意不等于1的正数 a ，函数 $f(x) = \log_a(x+3)$ 的反函数的图像都经过点 P ，则点 P 的坐标是_____。

9. 从一副混合后的扑克牌（52张）中随机抽取1张，事件 A 为“抽得红桃K”，事件 B 为“抽得为黑桃”，则概率 $P(A \cup B) =$ _____（结果用最简分数表示）

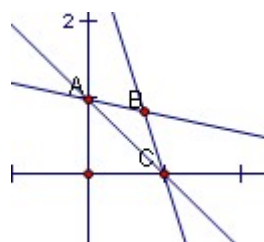
10. 在 n 行 n 列矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$ 中，

记位于第 i 行第 j 列的数为 $a_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 。当 $n = 9$ 时， $a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{99} =$ _____。

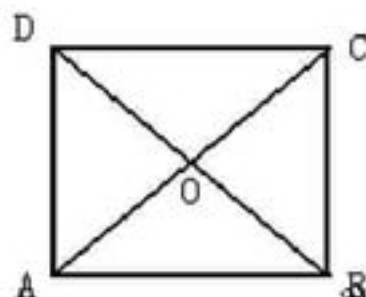
11.

将直线 $l_2: nx + y - n = 0$ 、 $l_3: x + ny - n = 0$ ($n \in N^*$, $n \geq 2$) x 轴

、 y 轴围成的封闭图形的面积记为 S_n ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$ _____。



12. 如图所示，在边长为4的正方形纸片 $ABCD$ 中， AC 与 BD 相交于 O ，剪去 $\triangle AOB$ ，将剩余部分沿 OC 、 OD 折叠，使 OA 、 OB 重合，则以 A 、 (B) 、 C 、 D 、 O 为顶点的四面体的体积为_____。



13. 如图所示, 直线 $x=2$ 与双曲线 $\Gamma: \frac{\lambda^2}{4} - y^2 = 1$ 的渐近线交于 E_1, E_2 两点, 记

$\overrightarrow{OE_1} = \overline{e_1}, \overrightarrow{OE_2} = \overline{e_2}$, 任取双曲线 Γ 上的点 P , 若 $\overrightarrow{OP} = a\overline{e_1} + b\overline{e_2}$ ($a, b \in R$), 则 a, b 满足的一个等式是_____

14. 以集合 $U = \{a, b, c, d\}$ 的子集中选出2个不同的子集, 需同时满足以下两个条件:

- (1) a, b 都要选出;
- (2) 对选出的任意两个子集 A 和 B , 必有 $A \subseteq B$ 或 $B \subseteq A$, 那么共有_____种不同的选法。

二. 选择题 (本大题满分20分) 本大题共有4题, 每题有且只有一个正确答案. 考生必须在答题纸的相应编号上, 将代表答案的小方格涂黑, 选对得5分, 否则一律得零分。

15. “ $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ ($k \in Z$)”是“ $\tan x = 1$ ”成立的 [答] ()

- (A) 充分不必要条件. (B) 必要不充分条件.
- (C) 充分条件. (D) 既不充分也不必要条件.

16. 直线 l 的参数方程是 $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \end{cases}$ ($t \in R$), 则 l 的方向向量是 \overline{d} 可以是 【答】 ()

- (A) (1, 2) (B) (2, 1) (C) (-2, 1) (D) (1, -2)

17. 若 x_0 是方程 $(\frac{1}{2})^x = x^{\frac{1}{3}}$ 的解, 则 x_0 属于区间 【答】 ()

- (A) $(\frac{2}{3}, 1)$ (B) $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ (C) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ (D) $(0, \frac{1}{3})$

18. 某人要制作一个三角形, 要求它的三条高的长度分别为 $\frac{1}{13}, \frac{1}{11}, \frac{1}{5}$, 则此人能

【答】 ()

- (A) 不能作出这样的三角形 (B) 作出一个锐角三角形
- (C) 作出一个直角三角形 (D) 作出一个钝角三角形

三、解答题 (本大题满分74分) 本大题共有5题, 解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定的区域内写出必要的步骤。

19. (本题满分12分)

已知 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 化简:

$$\lg(\cos x \cdot \tan x + 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}) + \lg[\sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})] - \lg(1 + \sin 2x).$$

20. (本题满分13分) 本题共有2个小题, 第一个小题满分5分, 第二个小题满分8分。

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = n - 5a_n - 85$, $n \in \mathbb{N}^*$

(1) 证明: $\{a_n - 1\}$ 是等比数列;

(2) 求数列 $\{S_n\}$ 的通项公式, 并求出 n 为何值时, S_n 取得最小值, 并说明理由。

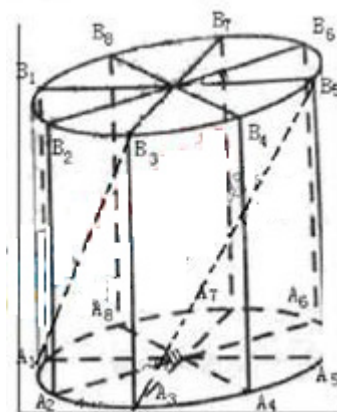
$$(2) S_n = n + 75\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - 90 \quad n=15 \text{ 取得最小值}$$

21. (本大题满分13分) 本题共有2个小题, 第1小题满分5分, 第2小题满分8分。

如图所示, 为了制作一个圆柱形灯笼, 先要制作4个全等的矩形骨架, 总计耗用9.6米铁丝, 骨架把圆柱底面8等份, 再用 S 平方米塑料片制成圆柱的侧面和下底面 (不安装上底面)。

(1) 当圆柱底面半径 r 取何值时, S 取得最大值? 并求出该最大值 (结果精确到0.01平方米);

(2) 在灯笼内, 以矩形骨架的顶点为点, 安装一些霓虹灯, 当灯笼的底面半径为0.3米时, 求图中两根直线 A_1B_3 与 A_3B_5 所在异面直线所成角的大小 (结果用反三角函数表示)



22. (本题满分18分) 本题共有3个小题, 第1小题满分3分, 第2小题满分5分, 第3小题满分1

0分。

若实数 x 、 y 、 m 满足 $|x-m| > |y-m|$ ，则称 x 比 y 远离 m 。

(1) 若 $x^2 - 1$ 比 1 远离 0，求 x 的取值范围；

(2) 对任意两个不相等的正数 a 、 b ，证明： $a^3 + b^3$ 比 $a^2b + ab^2$ 远离 $2ab\sqrt{ab}$ ；

(3) 已知函数 $f(x)$ 的定义域 $D = \{x | x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}\}$ 。任取 $x \in D$ ， $f(x)$ 等于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 中远离 0 的那个值。写出函数 $f(x)$ 的解析式，并指出它的基本性质（结论不要求证明）。

23（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分3分，第2小题满分6分，第3小题满分9分。

已知椭圆 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，点 P 的坐标为 $(-a, b)$ 。

(1) 若直角坐标平面上的点 M 、 $A(0, -b)$ 、 $B(a, 0)$ 满足 $\vec{PM} = \frac{1}{2}(\vec{PA} + \vec{PB})$ ，求点 M 的坐标；

(2) 设直线 $l_1: y = k_1x + p$ 交椭圆 Γ 于 C 、 D 两点，交直线 $l_2: y = k_2x$ 于点 E 。若

$k_1 \cdot k_2 = -\frac{b^2}{a^2}$ ，证明： E 为 CD 的中点；

(3) 对于椭圆 Γ 上的点 $Q(a \cos\theta, b$

$\sin\theta$ ($0 < \theta < \pi$), 如果椭圆 Γ 上存在不同的两个交点 P_1 、 P_2 满足 $\vec{PP}_1 + \vec{PP}_2 = \vec{PQ}$, 写出求作点 P_1 、 P_2 的步骤, 并求出使 P_1 、 P_2 存在的 θ 的取值范围.

