2004年江苏高考数学真题及答案

一、选择题(5分×12=60分)

1. 设集合P={1，2，3，4}，Q={$x\,\|x\|\le 2, x\in R$}，则P∩Q等于　　　(　　　)

(A){1，2}　　(B) {3，4}　　(C) {1}　　(D) {-2，-1，0，1，2}

2. 函数y=2cos²x+1(x∈R)的最小正周期为　　　(　　　)

(A) $\frac{\pi}{2}$　　(B) π　　(C) 2π　　(D) 4π

3. 从4名男生和3名女生中选出4人参加某个座谈会，若这4人中必须既有男生又有女生，则不同的选法共有　　　(　　　)

(A)140种　　(B)120种　　(C)35种　　(D)34种

4. 一平面截一球得到直径是6cm的圆面，球心到这个平面的距离是4cm，则该球的体积是 (　　　)

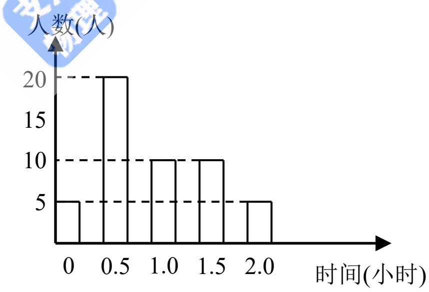
(A) $\frac{100\pi}{3}cm^3$　　(B) $\frac{208\pi}{3}cm^3$　　(C) $\frac{500\pi}{3}cm^3$　　(D) $\frac{416\sqrt{3}\pi}{3}cm^3$

5. 若双曲线 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一条准线与抛物线 $y^2=8x$ 的准线重合，则双曲线的离心率为 (　　　)

(A) $\sqrt{2}$　　(B) $2\sqrt{2}$　　(C) 4　　(D) $4\sqrt{2}$

6. 某校为了了解学生的课外阅读情况，随机调查了50名学生，得到他们在某一天各自课外阅读所用时间的数据，结果用右侧的条形图表示. 根据条形图可得这50名学生这一天平均每人的课外阅读时间为 (　　　)

(A)0.6小时　　(B)0.9小时　　(C)1.0小时　　(D)1.5小时



7. $(2x+\sqrt{x})^4$ 的展开式中x³的系数是　　　(　　　)

(A)6　　(B)12　　(C)24　　(D)48

8. 若函数 $y=\log_a(x+b)(a>0, a\ne 1)$ 的图象过两点(-1，0)和(0，1)，则 (　　　)

(A)a=2, b=2　　(B)a=$\sqrt{2}$, b=2　　(C)a=2, b=1　　(D)a=$\sqrt{2}$, b=$\sqrt{2}$

9. 将一颗质地均匀的骰子(它是一种各面上分别标有点数1，2，3，4，5，6的正方体玩具)先后抛掷3次，至少出现一次6点向上的概率是　　　(　　　)

(A) $\frac{5}{216}$　　(B) $\frac{25}{216}$　　(C) $\frac{31}{216}$　　(D) $\frac{91}{216}$

10. 函数 $f(x)=x^3-3x+1$ 在闭区间[-3，0]上的最大值、最小值分别是 (　　　)

(A) 1，-1　　　　(B) 1，-17　　　　(C) 3，-17　　　　(D) 9，-19

11. 设 $k>1$，$f(x)=k(x-1)(x\in\mathbf{R})$．在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴交于 A 点，它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象与 y 轴交于 B 点，并且这两个函数的图象交于 P 点．已知四边形 OAPB 的面积是 3，则 k 等于　　　　(　　　)

(A) 3　　　　(B) $\frac{3}{2}$　　　　(C) $\frac{4}{3}$　　　　(D) $\frac{6}{5}$

12. 设函数 $f(x)=-\frac{x}{1+|x|}(x\in R)$，区间 $M=[a，b](a<b)$，集合 $N=\{y|y=f(x),x\in M\}$，则使 M=N 成立的实数对 $(a，b)$ 有　　　　(　　　)

(A) 0 个　　　　(B) 1 个　　　　(C) 2 个　　　　(D) 无数多个

二、填空题(4 分×4=16 分)

13. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(x\in\mathbf{R})$ 的部分对应值如下表：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是________________________.

14. 以点(1，2)为圆心，与直线 $4x+3y-35=0$ 相切的圆的方程是________________.

15. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_n=\frac{a_1(3^n-1)}{2}$（对于所有 $n\geq1$），且 $a_4=54$，则 a_1 的数值是________________________.

16. 平面向量 **a**，**b** 中，已知 **a**=(4，-3)，$|\boldsymbol{b}|=1$，且 **ab**=5，则向量 **b**=__________.

三、解答题(12 分×5+14 分=74 分)

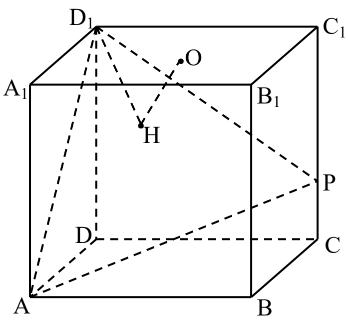
17. 已知 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\tan\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}=\frac{5}{2}$，求 $\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})$ 的值.

18. 在棱长为 4 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，O 是正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心，点 P 在棱 CC_1 上，且 $CC_1=4CP$.

(Ⅰ)求直线 AP 与平面 BCC_1B_1 所成的角的大小（结果用反三角函数值表示）；

(Ⅱ)设 O 点在平面 D_1AP 上的射影是 H，求证：$D_1H\perp AP$；

(Ⅲ)求点 P 到平面 ABD_1 的距离.



19. 制定投资计划时，不仅要考虑可能获得的盈利，而且要考虑可能出现的亏损.

某投资人打算投资甲、乙两个项目.根据预测，甲、乙项目可能的最大盈利率分别为 100％和 50％，可能的最大亏损分别为 30％和 10％．投资人计划投资金额不超过 10 万元，要求确保可能的资金亏损不超过 1.8 万元．问投资人对甲、乙两个项目各投资多少万元，才能使可能的盈利最大？

20. 设无穷等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n.

(Ⅰ)若首项$a_1=\frac{3}{2}$，公差$d=1$，求满足$S_{k^2}=(S_k)^2$的正整数 k；

(Ⅱ)求所有的无穷等差数列$\{a_n\}$，使得对于一切正整数 k 都有$S_{k^2}=(S_k)^2$成立.

21. 已知椭圆的中心在原点，离心率为$\frac{1}{2}$，一个焦点是 F（-m,0）(m 是大于 0 的常数). （Ⅰ)求椭圆的方程； （Ⅱ)设 Q 是椭圆上的一点，且过点 F、Q 的直线l与 y 轴交于点 M. 若$|\overrightarrow{MQ}|=2|\overrightarrow{QF}|$，求直线$l$的斜率.

22. 已知函数$f(x)(x\in R)$满足下列条件：对任意的实数x_1，x_2都有

$$\lambda(x_1-x_2)^2\le(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]$$

和 $\quad |f(x_1)-f(x_2)|\le|x_1-x_2|$， 其中$\lambda$是大于 0 的常数.

设实数a_0，a，b 满足 $\quad f(a_0)=0$和$b=a-\lambda f(a)$

(Ⅰ)证明$\lambda\le1$，并且不存在$b_0\ne a_0$，使得$f(b_0)=0$；

(Ⅱ)证明$(b-a_0)^2\le(1-\lambda^2)(a-a_0)^2$；

(Ⅲ)证明$[f(b)]^2\le(1-\lambda^2)[f(a)]^2$.

2004 年高考数学江苏卷答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	D	C	A	B	C	A	D	C	B	A

二、填空题

13、$(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$；　　14、$(x-1)^2+(y-2)^2=25$；

15、2；　　16、$(\frac{4}{5},-\frac{3}{5})$

三、解答题

（17）由已知得：$\tan\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{\sin\alpha}=\frac{5}{2}$得$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{3}{5}$，

从而$\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{3}=\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$

（18）

（1）连结 BP，$\because AB\perp$平面BCC_1B_1，$\therefore AP$与平面BCC_1B_1所成角就是$\angle APB$，

$\because CC_1=4CP,CC_1=4,\therefore CP=1$，在$Rt\Delta PBC$中，$\angle PCB$为直角，$BC=4,CP=1$，故$BP=\sqrt{17}$，

在$Rt\Delta APB$中，$\angle ABP$为直角，$\tan\angle APB=\frac{AP}{BP}=\frac{4\sqrt{17}}{17}$，$\therefore\angle APB=\arctan\frac{4\sqrt{17}}{17}$，即直线 AP 与平面$BCC_1B_1$所成角为$\arctan\frac{4\sqrt{17}}{17}$。

（2）连结A_1C_1,B_1D_1，四边形$A_1B_1C_1D_1$是正方形，$\therefore D_1O\perp A_1C_1$，又$AA_1\perp$平面$A_1B_1C_1D_1$，

$\therefore AA_1\perp D_1O$，$\because AA_1\cap A_1C_1=A_1$，$\therefore D_1O\perp$平面$A_1APC_1$，由于$AP\subset$平面$A_1APC_1$，$\therefore D_1O\perp AP$，

又平面D_1AP的斜线D_1O在这个平面内的射影是D_1H，$\therefore D_1H\perp AP$.

(3)连结BC_1，在平面BCC_1B_1中，过点 P 作$PQ\perp BC_1$于点 Q，AB⊥平面BCC_1B_1，PQ⊂平面BCC_1B_1，

$\therefore$PQ ⊥ AB，$\therefore$PQ ⊥ 平面ABC_1D_1，PQ 就是点 P 到平面 ABD_1 的距离，在$Rt\Delta C_1PQ$中，

$\angle C_1QP=90°,\angle PC_1Q=45°$，$PC_1=3,\therefore PQ=\frac{3}{2}\sqrt{2}$，即点 P 到平面 ABD_1 的距离为$\frac{3}{2}\sqrt{2}$。

（19）设投资人分别用 x 万元、y 万元投资甲、乙两个项目，由题意：$\begin{cases}x+y\le 10\\0.3x+0.1y\le 1.8\\x\ge 0\\y\ge 0\end{cases}$，目标函数

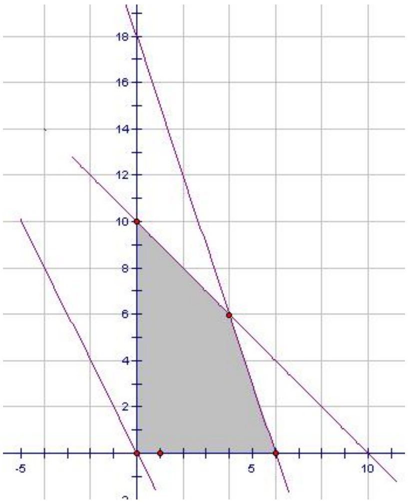
$z=x+0.5y$，上述不等式组表示的平面区域如图所示，阴影部分（含边界）即可行域。作直线

$l_0:x+0.5y=0$，并作平行于直线l_0的一组直线，与可行域相交，其中有一条直线经过可行域上的点 M，

且与直线$x+0.5y=0$的距离最大，这里 M 点是直线$x+y=10$和直线$0.3x+0.1y=1.8$的交点，解方程组

$\begin{cases} x+y=10 \\ 0.3x+0.1y=1.8 \end{cases}$ 得 $x=4, y=6$，此时 $z=1\times 4+0.5\times 6=7$（万元），$\because 7>0$，当 $x=4, y=6$ 时，z 最得最大值。

答：投资人用 4 万元投资甲项目、6 万元投资乙项目，才能在确保亏损不超过 1.8万元的前提下，使可能的盈利最大。



（20　）（1　）当 $a_1=\frac{3}{2}, d=1$ 时，$S_n=\frac{3}{2}n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{1}{2}n^2+n$，由 $S_{k^2}=(S_k)^2$ 得，$\frac{1}{2}k^4+k^2=(\frac{1}{2}k^2+k)^2$，即 $k^3(\frac{1}{4}k-1)=0$，又 $k\neq 0$，所以 $k=4$。

（2　）设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则在 $S_{k^2}=(S_k)^2$ 中分别取 $k=1,2$ 得

$\begin{cases} S_1=(S_1)^2 \\ S_4=(S_2)^2 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a_1=a_1^{\ 2} \\ 4a_1+\frac{4\times 3}{2}d=(2a_1+\frac{2\times 1}{2}d)^2 \end{cases}$，由（1）得 $a_1=0$ 或 $a_1=1$。

当 $a_1=0$ 时，代入（2）得：$d=0$ 或 $d=6$；

当 $a_1=0, d=0$ 时，$a_n=0, S_n=0$，从而 $S_{k^2}=(S_k)^2$ 成立；

当 $a_1=0, d=6$ 时，则 $a_n=6(n-1)$，由 $S_3=18$，$(S_3)^2=324, S_9=216$ 知，$S_9\neq(S_3)^2$，故所得数列不符合题意；

当 $a_1=1$ 时，$d=0$ 或 $d=2$，当 $a_1=1$，$d=0$ 时，$a_n=1, S_n=n$，从而 $S_{k^2}=(S_k)^2$ 成立；当 $a_1=1$，$d=2$ 时，则 $a_n=2n-1, S_n=n^2$，从而 $S_{k^2}=(S_k)^2$ 成立，综上共有 3 个满足条件的无穷等差数列：$a_n=0$ 或 $a_n=1$ 或 $a_n=2n-1$。

（21）（1）设所求椭圆方程是 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 由已知得 $c=m, \frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，所以 $a=2m, b=\sqrt{3}m$，故所求椭圆方程是 $\frac{x^2}{4m^2}+\frac{y^2}{3m^2}=1$

（2）设 $Q(x_0, y_0)$，直线 $l: y=k(x+m)$，则点 $M(0,km)$，当 $\overrightarrow{MQ}=2\overrightarrow{QF}$ 时，由于 $F(-m,0)$，$M(0,km)$，由定比分点坐标公式得 $x_Q=\frac{0-2m}{1+2}=-\frac{2m}{3}, y_Q=\frac{km+0}{1+2}=\frac{km}{3}$，又点 $Q(-\frac{2m}{3},\frac{km}{3})$ 在椭圆

上，所以$\frac{(\frac{2m}{3})^2}{4m^2}+\frac{(\frac{km}{3})^2}{3m^2}=1$，$k=\pm 2\sqrt{6}$；当$\overrightarrow{MQ}=-2\overrightarrow{QF}$时

$x_Q=\frac{0+2m}{1-2}=-2m, y_Q=\frac{km+0}{1-2}=-km$，所以$\frac{(2m)^2}{4m^2}+\frac{(km)^2}{3m^2}=1$得，解得$k=0$，故直线$l$的斜率是

$0,\pm 2\sqrt{6}$。

（22）证明：（1）任取$x_1,x_2\in R,x_1\neq x_2$，则由$\lambda(x_1-x_2)^2\leq(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]$ ①

和$|f(x_1)-f(x_2)|\leq|x_1-x_2|$ ②

可知，$\lambda(x_1-x_2)^2\leq(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]\leq|x_1-x_2||f(x_1)-f(x_2)|\leq|x_1-x_2|^2$，从而$\lambda\leq 1$；

假设有$b_0\neq a_0$，使得$f(b_0)=0$，则由①式知，$\lambda(a_0-b_0)^2\leq(a_0-b_0)[f(a_0)-f(b_0)]=0$，矛盾，因此不存在$b_0\neq a_0$，使得$f(b_0)=0$。

（2）由$b=a-\lambda f(a)$ ③可知

$(b-a_0)^2=[a-a_0-\lambda f(a)]^2=(a-a_0)^2+\lambda^2[f(a)]^2-2\lambda(a-a_0)f(a)$ ④

由$f(a_0)=0$和①得，$(a-a_0)f(a)=(a-a_0)[f(a)-f(a_0)]\geq\lambda(a-a_0)^2$ ⑤

由$f(a_0)=0$和②得，$[f(a)]^2=[f(a)-f(a_0)]^2\leq(a-a_0)^2$ ⑥

将⑤⑥代入④得$(b-a_0)^2\leq(a-a_0)^2+\lambda^2(a-a_0)^2-2\lambda^2(a-a_0)^2=(1-\lambda^2)(a-a_0)^2$；

（3）由③式可知，

$[f(b)]^2=[f(b)-f(a)+f(a)]^2=[f(b)-f(a)]^2+[f(a)]^2+2[f(b)-f(a)]\cdot[f(a)]$

$\leq(b-a)^2+[f(a)]^2-2\frac{b-a}{\lambda}[f(b)-f(a)]$ （用②式）

$=\lambda^2[f(a)]^2+[f(a)]^2-\frac{2}{\lambda}(b-a)[f(b)-f(a)]$

$\leq\lambda^2[f(a)]^2+[f(a)]^2-\frac{2}{\lambda}\cdot\lambda(b-a)^2$ （用①式）

$=\lambda^2[f(a)]^2+[f(a)]^2-2\lambda^2[f(a)]^2=(1-\lambda^2)[f(a)]^2$。