

2008年普通高等学校招生全国统一考试山东文科数学试题及答案

第 I 卷 (共60分)

参考公式:

锥体的体积公式: $V = \frac{1}{3}Sh$, 其中 S 是锥体的底面积, h 是锥体的高.

球的表面积公式: $S = 4\pi R^2$, 其中 R 是球的半径.

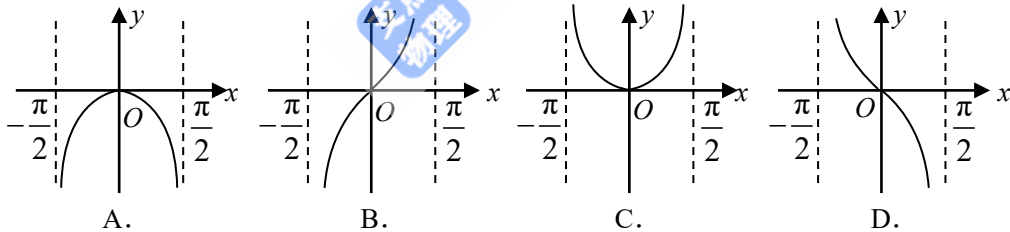
如果事件 A, B 互斥, 那么 $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

一、选择题: 本大题共12小题, 每小题5分, 共60分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 满足 $M \subseteq \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, 且 $M \cap \{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_2\}$ 的集合 M 的个数是 ()
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. 设 z 的共轭复数是 \bar{z} , 若 $z + \bar{z} = 4$, $z \cdot \bar{z} = 8$, 则 $\frac{\bar{z}}{z}$ 等于 ()
 A. i B. $-i$ C. ± 1 D. $\pm i$

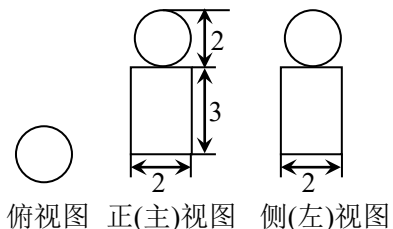
3. 函数 $y = \ln \cos x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right)$ 的图象是 ()



4. 给出命题: 若函数 $y = f(x)$ 是幂函数, 则函数 $y = f(x)$ 的图象不过第四象限. 在它的逆命题、否命题、逆否命题三个命题中, 真命题的个数是 ()
 A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x \leq 1, \\ x^2+x-2, & x > 1, \end{cases}$ 则 $f\left(\frac{1}{f(2)}\right)$ 的值为 ()
 A. $\frac{15}{16}$ B. $-\frac{27}{16}$ C. $\frac{8}{9}$ D. 18

6. 右图是一个几何体的三视图, 根据图中数据, 可得该几何体的表面积是 ()
 A. 9π B. 10π



C. 11π D. 12π

7. 不等式 $\frac{x+5}{(x-1)^2} \geq 2$ 的解集是 ()

A. $\left[-3, \frac{1}{2}\right]$ B. $\left[-\frac{1}{2}, 3\right]$ C. $\left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 3]$ D. $\left[-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 3]$

8. 已知 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的对边, 向量

$\mathbf{m} = (\sqrt{3}, -1), \mathbf{n} = (\cos A, \sin A)$. 若 $\mathbf{m} \perp \mathbf{n}$, 且 $a \cos B + b \cos A = c \sin C$, 则角 A, B 的大小分别为 ()

A. $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$

9. 从某项综合能力测试中抽取100人的成绩, 统计如表, 则这100人成绩的标准差为 ()

分数	5	4	3	2	1
人数	20	10	30	30	10

A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ C. 3 D. $\frac{8}{5}$

10. 已知 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \sin \alpha = \frac{4}{5}\sqrt{3}$, 则 $\sin\left(\alpha + \frac{7\pi}{6}\right)$ 的值是 ()

A. $-\frac{2\sqrt{3}}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ C. $-\frac{4}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

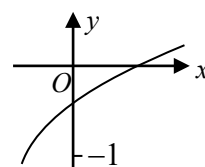
11. 若圆 C 的半径为1, 圆心在第一象限, 且与直线 $4x - 3y = 0$ 和 x 轴相切, 则该圆的标准方程是 ()

A. $(x-3)^2 + \left(y - \frac{7}{3}\right)^2 = 1$ B. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$

C. $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1$ D. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = 1$

12. 已知函数 $f(x) = \log_a(2^x + b - 1)$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象如图所示, 则 a, b 满足的关系是 ()

A. $0 < a^{-1} < b < 1$ B. $0 < b < a^{-1} < 1$
 C. $0 < b^{-1} < a < -1$ D. $0 < a^{-1} < b^{-1} < 1$



第II卷 (共90分)

二、填空题：本大题共4小题，每小题4分，共16分.

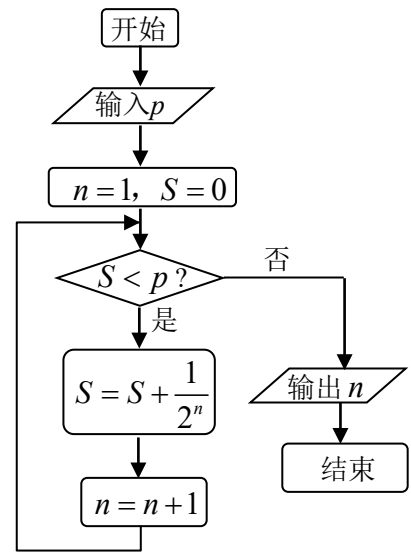
13. 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$. 以圆 C 与坐标轴的交点分别作为双曲线的一个焦点和顶点, 则适合上述条件的双曲线的标准方程为_____.

14. 执行右边的程序框图, 若 $p = 0.8$, 则输出的 $n =$ _____.

15. 已知 $f(3^x) = 4x \log_2 3 + 233$, 则 $f(2) + f(4) + f(8) + \dots + f(2^8)$ 的值等于_____.

16. 设 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} x - y + 2 \geq 0, \\ 5x - y - 10 \leq 0, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$$

则 $z = 2x + y$ 的最大值为_____.



三、解答题：本大题共6小题，共74分.

17. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin(\omega x + \varphi) - \cos(\omega x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$, $\omega > 0$) 为偶函数, 且函数 $y = f(x)$ 图象的两相邻对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

(I) 求 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$ 的值;

(II) 将函数 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后, 得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 求 $g(x)$ 的单调递减区间.

18. (本小题满分12分)

现有8名奥运会志愿者, 其中志愿者 A_1, A_2, A_3 通晓日语, B_1, B_2, B_3 通晓俄语,

C_1, C_2 通晓韩语. 从中选出通晓日语、俄语和韩语的志愿者各1名, 组成一个小组.

(I) 求 A_1 被选中的概率;

(II) 求 B_1 和 C_1 不全被选中的概率.

19. (本小题满分12分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \parallel DC$, $\triangle PAD$ 是等边三角形, 已知 $BD = 2AD = 8$, $AB = 2DC = 4\sqrt{5}$.

- (I) 设 M 是 PC 上的一点, 证明: 平面 $MBD \perp$ 平面 PAD ;
 (II) 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



20. (本小题满分12分)

将数列 $\{a_n\}$ 中的所有项按每一行比上一行多一项的规则排成如下数表:

a_1
 $a_2 \ a_3$
 $a_4 \ a_5 \ a_6$
 $a_7 \ a_8 \ a_9 \ a_{10}$

记表中的第一列数 $a_1, a_2, a_4, a_7, \dots$ 构成的数列为 $\{b_n\}$, $b_1 = a_1 = 1$. S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 且满足 $\frac{2b_n}{b_n S_n - S_n^2} = 1 (n \geq 2)$.

- (I) 证明数列 $\left\{ \frac{1}{S_n} \right\}$ 成等差数列, 并求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;
 (II) 上表中, 若从第三行起, 第一行中的数按从左到右的顺序均构成等比数列, 且公比为同一个正数. 当 $a_{81} = -\frac{4}{91}$ 时, 求上表中第 $k (k \geq 3)$ 行所有项的和.

21. (本小题满分12分)

设函数 $f(x) = x^2 e^{x-1} + ax^3 + bx^2$, 已知 $x = -2$ 和 $x = 1$ 为 $f(x)$ 的极值点.

- (I) 求 a 和 b 的值;
- (II) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (III) 设 $g(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2$, 试比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小.

22. (本小题满分14分)

已知曲线 $C_1: \frac{|x|}{a} + \frac{|y|}{b} = 1 (a > b > 0)$ 所围成的封闭图形的面积为 $4\sqrt{5}$, 曲线 C_1 的内切圆半径为 $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. 记 C_2 为以曲线 C_1 与坐标轴的交点为顶点的椭圆.

- (I) 求椭圆 C_2 的标准方程;
- (II) 设 AB 是过椭圆 C_2 中心的任意弦, l 是线段 AB 的垂直平分线. M 是 l 上异于椭圆中心的点.
- (1) 若 $|MO| = \lambda|OA|$ (O 为坐标原点), 当点 A 在椭圆 C_2 上运动时, 求点 M 的轨迹方程;
- (2) 若 M 是 l 与椭圆 C_2 的交点, 求 $\triangle AMB$ 的面积的最小值.

2008年普通高等学校招生全国统一考试答案

1. B 解析: 本小题主要考查集合子集的概念及交集运算. 集合 M 中必含有 a_1, a_2 , 则 $M = \{a_1, a_2\}$ 或 $M = \{a_1, a_2, a_4\}$. 选B.

2. D 解析: 本小题主要考查共轭复数的概念、复数的运算. 可设 $\bar{z} = 2 + bi$, 由 $z \cdot \bar{z} = 8$

$$\text{得 } 4 + b^2 = 8, b = \pm 2. \frac{\bar{z}}{z} = \frac{\bar{z}^2}{z^2} = \frac{(2 \pm 2i)^2}{8} = \pm i. \text{ 选D.}$$

3. A

解析: 本小题主要考查复合函数的图像识别. $y = \ln \cos x (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$ 是偶函数,

可排除B、D, 由 $\cos x$ 的值域可以确定. 选A.

4. C

解析: 本小题主要考查四种命题的真假. 易知原命题是真命题, 则其逆否命题也是真命题,

而逆命题、否命题是假命题. 故它的逆命题、否命题、逆否命题三个命题中, 真命题有一个. 选C.

5. A 解析: 本小题主要考查分段函数问题. 正确利用分段函数来进行分段求值.

$$\because f(2) = 4, \therefore f\left(\frac{1}{f(2)}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}. \text{ 选A.}$$

6. D

解析: 本小题主要考查三视图与几何体的表面积. 从三视图可以看出该几何体是由一个球和一个圆柱组合而成的, 其表面及为 $S = 4\pi \times 1^2 + \pi \times 1^2 \times 2 + 2\pi \times 1 \times 3 = 12\pi$. 选D.

7. D 解析: 本小题主要考查分式不等式的解法. 易知 $x \neq 1$ 排除B; 由 $x = 0$ 符合可排除C;

由 $x = 3$ 排除A, 故选D. 也可用分式不等式的解法, 将2移到左边直接求解.

8. C 解析: 本小题主要考查解三角形问题.

$$\because \sqrt{3} \cos A - \sin A = 0 \therefore A = \frac{\pi}{3};$$

$$\Rightarrow \sin A \cos B + \sin B \cos A = \sin^2 C,$$

$$\sin A \cos B + \sin B \cos A = \sin(A+B) = \sin C = \sin^2 C, \quad C = \frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore B = \frac{\pi}{6} \text{ 选C. 本题在求角B时, 也可用验证法.}$$

9. B 解析: 本小题主要考查平均数、方差、标准差的概念及其运算.

$$\therefore \bar{x} = \frac{100 + 40 + 90 + 60 + 10}{100} = 3,$$

$$\therefore S^2 = \frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]$$

$$= \frac{1}{100} [20 \times 2^2 + 10 \times 1^2 + 30 \times 1^2 + 10 \times 2^2] = \frac{160}{100} = \frac{8}{5}, \Rightarrow S = \frac{2\sqrt{10}}{5}. \text{ 选B.}$$

10. C 解析主要考查三角函数变换与求值.

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{3}{2} \sin \alpha = \frac{4}{5} \sqrt{3} \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = \frac{4}{5},$$

$$\sin\left(\alpha + \frac{7\pi}{6}\right) = -\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha\right) = -\frac{4}{5}. \text{ 选C.}$$

11. B 解析: 本小题主要考查圆与直线相切问题。

设圆心为 $(a, 1)$, 由已知得 $d = \frac{|4a-3|}{5} = 1, \therefore a = 2$ (舍 $-\frac{1}{2}$). 选B.

12. A 解析: 本小题主要考查正确利用对数函数的图象来比较大小。

由图易得 $a > 1, \therefore 0 < a^{-1} < 1$; 取特殊点 $x = 0 \Rightarrow -1 < y = \log_a b < 0$,

$$\Rightarrow -1 = \log_a \frac{1}{a} < \log_a b < \log_a 1 = 0, \therefore 0 < a^{-1} < b < 1. \text{选A.}$$

二、填空题

13. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 解析: 本小题主要考查圆、双曲线的性质。圆

$$C: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$$

$y = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$, 得圆 C 与坐标轴的交点分别为 $(2, 0), (4, 0)$,

则 $a = 2, c = 4, b^2 = 12$, 所以双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

14. 4 解析: 本小题主要考查程序框图。

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} > 0.8, \text{ 因此输出 } n = 4.$$

15. 2008 解析: 本小题主要考查对数函数问题。

$$\therefore f(3^x) = 4x \log_2 3 + 233 = 4 \log_2 3^x + 233,$$

$$\Rightarrow f(x) = 4 \log_2 x + 233, \therefore f(2) + f(4) + f(8) + \cdots + f(2^8) =$$

$$8 \times 233 + 4(\log_2 2 + 2 \log_2 2 + 3 \log_2 2 + \cdots + 8 \log_2 2) = 1864 + 144 = 2008.$$

16. 11

解析: 本小题主要考查线性规划问题。作图(略)易知可行域为一个四角形, 其四个顶点分别为 $(0, 0), (0, 2), (2, 0), (3, 5)$, 验证知在点 $(3, 5)$ 时取得最大值11.

三、解答题

17. 解: (I) $f(x) = \sqrt{3} \sin(\omega x + \varphi) - \cos(\omega x + \varphi)$

$$= 2 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega x + \varphi) - \frac{1}{2} \cos(\omega x + \varphi) \right]$$

$$= 2 \sin \left(\omega x + \varphi - \frac{\pi}{6} \right).$$

因为 $f(x)$ 为偶函数,

所以对 $x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = f(x)$ 恒成立,

$$\text{因此 } \sin(-\omega x + \varphi - \frac{\pi}{6}) = \sin \left(\omega x + \varphi - \frac{\pi}{6} \right).$$

$$\text{即 } -\sin \omega x \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right) + \cos \omega x \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \omega x \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right) + \cos \omega x \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right),$$

$$\text{整理得 } \sin \omega x \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right) = 0.$$

因为 $\omega > 0$, 且 $x \in \mathbf{R}$,

$$\text{所以 } \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right) = 0.$$

又因为 $0 < \varphi < \pi$,

$$\text{故 } \varphi - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{所以 } f(x) = 2 \sin \left(\omega x + \frac{\pi}{2} \right) = 2 \cos \omega x.$$

由题意得 $\frac{2\pi}{\omega} = 2 \cdot \frac{\pi}{2}$, 所以 $\omega = 2$.

$$\text{故 } f(x) = 2 \cos 2x.$$

$$\text{因此 } f \left(\frac{\pi}{8} \right) = 2 \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}.$$

(II) 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后, 得到 $f \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$ 的图象,

$$\text{所以 } g(x) = f \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 2 \cos \left[2 \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \right] = 2 \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right).$$

当 $2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \pi$ ($k \in \mathbf{Z}$),

即 $k\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{2\pi}{3}$ ($k \in \mathbf{Z}$) 时, $g(x)$ 单调递减,

因此 $g(x)$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3} \right]$ ($k \in \mathbf{Z}$).

18. 解: (I) 从8人中选出日语、俄语和韩语志愿者各1名, 其一切可能的结果组成的基本事件空间

$$\begin{aligned} \Omega = \{ & (A_1, B_1, C_1), (A_1, B_1, C_2), (A_1, B_2, C_1), (A_1, B_2, C_2), (A_1, B_3, C_1), \\ & (A_1, B_3, C_2), (A_2, B_1, C_1), (A_2, B_1, C_2), (A_2, B_2, C_1), (A_2, B_2, C_2), \\ & (A_2, B_3, C_1), (A_2, B_3, C_2), (A_3, B_1, C_1), (A_3, B_1, C_2), (A_3, B_2, C_1), \\ & (A_3, B_2, C_2), (A_3, B_3, C_1), (A_3, B_3, C_2) \} \end{aligned}$$

由18个基本事件组成. 由于每一个基本事件被抽取的机会均等, 因此这些基本事件的发生是等可能的.

用 M 表示“ A_1 恰被选中”这一事件, 则

$$\begin{aligned} M = \{ & (A_1, B_1, C_1), (A_1, B_1, C_2), (A_1, B_2, C_1), \\ & (A_1, B_2, C_2), (A_1, B_3, C_1), (A_1, B_3, C_2) \} \end{aligned}$$

事件 M 由6个基本事件组成,

$$\text{因而 } P(M) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

(II) 用 N 表示“ B_1, C_1 不全被选中”这一事件, 则其对立事件 \bar{N} 表示“ B_1, C_1 全被选中”这一事件,

由于 $\bar{N} = \{ (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_1, C_1), (A_3, B_1, C_1) \}$, 事件 \bar{N} 有3个基本事件组成,

$$\text{所以 } P(\bar{N}) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}, \text{ 由对立事件的概率公式得 } P(N) = 1 - P(\bar{N}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

19. (I) 证明: 在 $\triangle ABD$ 中,

由于 $AD = 4$, $BD = 8$, $AB = 4\sqrt{5}$,

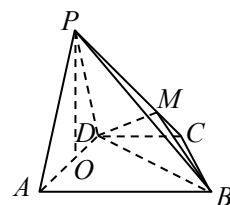
$$\text{所以 } AD^2 + BD^2 = AB^2.$$

故 $AD \perp BD$.

又平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$,

$BD \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $BD \perp$ 平面 PAD ,



又 $BD \subset$ 平面 MBD ,

故平面 $MBD \perp$ 平面 PAD .

(II) 解: 过 P 作 $PO \perp AD$ 交 AD 于 O ,

由于平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$.

因此 PO 为四棱锥 $P-ABCD$ 的高,

又 $\triangle PAD$ 是边长为 4 的等边三角形.

$$\text{因此 } PO = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}.$$

在底面四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $AB = 2DC$,

所以四边形 $ABCD$ 是梯形, 在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 中, 斜边 AB 边上的高为 $\frac{4 \times 8}{4\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$,

此即为梯形 $ABCD$ 的高,

所以四边形 $ABCD$ 的面积为 $S = \frac{2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}}{2} \times \frac{8\sqrt{5}}{5} = 24$.

$$\text{故 } V_{P-ABCD} = \frac{1}{3} \times 24 \times 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}.$$

20. (I) 证明: 由已知, 当 $n \geq 2$ 时, $\frac{2b_n}{b_n S_n - S_n^2} = 1$,

又 $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$,

$$\text{所以 } \frac{2(S_n - S_{n-1})}{(S_n - S_{n-1})S_n - S_n^2} = 1,$$

$$\text{即 } \frac{2(S_n - S_{n-1})}{-S_{n-1}S_n} = 1,$$

$$\text{所以 } \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}} = \frac{1}{2},$$

又 $S_1 = b_1 = a_1 = 1$.

所以数列 $\left\{ \frac{1}{S_n} \right\}$ 是首项为 1, 公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列.

$$\text{由上可知 } \frac{1}{S_n} = 1 + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n+1}{2},$$

$$\text{即 } S_n = \frac{2}{n+1}.$$

所以当 $n \geq 2$ 时, $b_n = S_n - S_{n-1} = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} = -\frac{2}{n(n+1)}$.

$$\text{因此 } b_n = \begin{cases} 1, & n=1, \\ -\frac{2}{n(n+1)}, & n \geq 2. \end{cases}$$

(II) 解: 设上表中从第三行起, 每行的公比都为 q , 且 $q > 0$.

因为 $1+2+\cdots+12 = \frac{12 \times 13}{2} = 78$,

所以表中第1行至第12行共含有数列 $\{a_n\}$ 的前78项,

故 a_{81} 在表中第13行第三列,

$$\text{因此 } a_{81} = b_{13} \cdot q^2 = -\frac{4}{91}.$$

$$\text{又 } b_{13} = -\frac{2}{13 \times 14},$$

所以 $q = 2$.

记表中第 $k (k \geq 3)$ 行所有项的和为 S ,

$$\text{则 } S = \frac{b_k(1-q^k)}{1-q} = -\frac{2}{k(k+1)} \cdot \frac{(1-2^k)}{1-2} = \frac{2}{k(k+1)}(1-2^k) (k \geq 3).$$

21. 解: (I) 因为 $f'(x) = e^{x-1}(2x+x^2) + 3ax^2 + 2bx$

$$= xe^{x-1}(x+2) + x(3ax+2b),$$

又 $x = -2$ 和 $x = 1$ 为 $f(x)$ 的极值点, 所以 $f'(-2) = f'(1) = 0$,

$$\text{因此 } \begin{cases} -6a + 2b = 0, \\ 3 + 3a + 2b = 0, \end{cases}$$

解方程组得 $a = -\frac{1}{3}$, $b = -1$.

(II) 因为 $a = -\frac{1}{3}$, $b = -1$,

$$\text{所以 } f'(x) = x(x+2)(e^{x-1} - 1),$$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

因为当 $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $x \in (-2, 0) \cup (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-2, 0)$ 和 $(1, +\infty)$ 上是单调递增的;

在 $(-\infty, -2)$ 和 $(0, 1)$ 上是单调递减的.

(III) 由 (I) 可知 $f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{1}{3}x^3 - x^2$,

故 $f(x) - g(x) = x^2 e^{x-1} - x^3 = x^2(e^{x-1} - x)$,

令 $h(x) = e^{x-1} - x$,

则 $h'(x) = e^{x-1} - 1$.

令 $h'(x) = 0$, 得 $x = 1$,

因为 $x \in (-\infty, 1]$ 时, $h'(x) \leq 0$,

所以 $h(x)$ 在 $x \in (-\infty, 1]$ 上单调递减.

故 $x \in (-\infty, 1]$ 时, $h(x) \geq h(1) = 0$;

因为 $x \in [1, +\infty)$ 时, $h'(x) \geq 0$,

所以 $h(x)$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上单调递增.

故 $x \in [1, +\infty)$ 时, $h(x) \geq h(1) = 0$.

所以对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 恒有 $h(x) \geq 0$, 又 $x^2 \geq 0$,

因此 $f(x) - g(x) \geq 0$,

故对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 恒有 $f(x) \geq g(x)$.

22. 解: (I) 由题意得
$$\begin{cases} 2ab = 4\sqrt{5}, \\ \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{3}. \end{cases}$$

又 $a > b > 0$,

解得 $a^2 = 5$, $b^2 = 4$.

因此所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(II) (1) 假设 AB 所在的直线斜率存在且不为零, 设 AB 所在直线方程为 $y = kx (k \neq 0)$,

$A(x_A, y_A)$.

$$\text{解方程组 } \begin{cases} \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1, \\ y = kx, \end{cases} \text{ 得 } x_A^2 = \frac{20}{4+5k^2}, \quad y_A^2 = \frac{20k^2}{4+5k^2},$$

$$\text{所以 } |OA|^2 = x_A^2 + y_A^2 = \frac{20}{4+5k^2} + \frac{20k^2}{4+5k^2} = \frac{20(1+k^2)}{4+5k^2}.$$

设 $M(x, y)$, 由题意知 $|MO| = \lambda |OA| (\lambda \neq 0)$,

$$\text{所以 } |MO|^2 = \lambda^2 |OA|^2, \text{ 即 } x^2 + y^2 = \lambda^2 \frac{20(1+k^2)}{4+5k^2},$$

因为 l 是 AB 的垂直平分线,

所以直线 l 的方程为 $y = -\frac{1}{k}x$,

$$\text{即 } k = -\frac{x}{y},$$

$$\text{因此 } x^2 + y^2 = \lambda^2 \frac{20\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)}{4 + 5 \cdot \frac{x^2}{y^2}} = \lambda^2 \frac{20(x^2 + y^2)}{4y^2 + 5x^2},$$

又 $x^2 + y^2 \neq 0$,

$$\text{所以 } 5x^2 + 4y^2 = 20\lambda^2,$$

$$\text{故 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = \lambda^2.$$

又当 $k = 0$ 或不存在时, 上式仍然成立.

综上所述, M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = \lambda^2 (\lambda \neq 0)$.

$$(2) \text{ 当 } k \text{ 存在且 } k \neq 0 \text{ 时, 由 (1) 得 } x_A^2 = \frac{20}{4+5k^2}, \quad y_A^2 = \frac{20k^2}{4+5k^2},$$

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1, \\ y = -\frac{1}{k}x, \end{cases} \text{解得 } x_M^2 = \frac{20k^2}{5+4k^2}, \quad y_M^2 = \frac{20}{5+4k^2},$$

$$\text{所以 } |OA|^2 = x_A^2 + y_A^2 = \frac{20(1+k^2)}{4+5k^2}, \quad |AB|^2 = 4|OA|^2 = \frac{80(1+k^2)}{4+5k^2}, \quad |OM|^2 = \frac{20(1+k^2)}{5+4k^2}.$$

$$\text{解法一：由于 } S_{\triangle AMB}^2 = \frac{1}{4}|AB|^2 \cdot |OM|^2$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{80(1+k^2)}{4+5k^2} \times \frac{20(1+k^2)}{5+4k^2}$$

$$= \frac{400(1+k^2)^2}{(4+5k^2)(5+4k^2)}$$

$$\geq \frac{400(1+k^2)^2}{\left(\frac{4+5k^2+5+4k^2}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1600(1+k^2)^2}{81(1+k^2)^2} = \left(\frac{40}{9}\right)^2,$$

当且仅当 $4+5k^2 = 5+4k^2$ 时等号成立，即 $k = \pm 1$ 时等号成立，此时 $\triangle AMB$ 面积的最小

$$\text{值是 } S_{\triangle AMB} = \frac{40}{9}.$$

$$\text{当 } k = 0, \quad S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 2 = 2\sqrt{5} > \frac{40}{9}.$$

$$\text{当 } k \text{ 不存在时, } S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times 4 = 2\sqrt{5} > \frac{40}{9}.$$

综上所述， $\triangle AMB$ 的面积的最小值为 $\frac{40}{9}$ 。

$$\text{解法二：因为 } \frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OM|^2} = \frac{1}{\frac{20(1+k^2)}{4+5k^2}} + \frac{1}{\frac{20(1+k^2)}{5+4k^2}} = \frac{4+5k^2+5+4k^2}{20(1+k^2)} = \frac{9}{20},$$

$$\text{又 } \frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OM|^2} \geq \frac{2}{|OA| \cdot |OM|}, \quad |OA| \cdot |OM| \geq \frac{40}{9},$$

当且仅当 $4+5k^2 = 5+4k^2$ 时等号成立，即 $k = \pm 1$ 时等号成立，

$$\text{此时 } \triangle AMB \text{ 面积的最小值是 } S_{\triangle AMB} = \frac{40}{9}.$$

当 $k = 0$, $S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 2 = 2\sqrt{5} > \frac{40}{9}$.

当 k 不存在时, $S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times 4 = 2\sqrt{5} > \frac{40}{9}$.

综上所述, $\triangle AMB$ 的面积的最小值为 $\frac{40}{9}$.