2004年湖南高考理科数学真题及答案

第Ⅰ卷（选择题　　共60分）

一、选择题：本大题 共12小题，每小题5分，共60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求的.

1．复数 $(1+\frac{1}{i})^4$ 的值是　　　　　　　　　　　　　　（　　　）

A．$4i$　　　B．$-4i$　　　C．4　　　D．－4

2．如果双曲线 $\frac{x^2}{13}-\frac{y^2}{12}=1$ 上一点P到右焦点的距离等于 $\sqrt{13}$，那么点P到右准线的距离是　　　　　　　　　　　　　　（　　　）

A．$\frac{13}{5}$　　　B．13　　　C．5　　　D．$\frac{5}{13}$

3．设 $f^{-1}(x)$ 是函数 $f(x)=\log_2(x+1)$ 的反函数，若 $[1+f^{-1}(a)][1+f^{-1}(b)]=8$，则 $f(a+b)$ 的值为　　　　　　　　　　　　　　（　　　）

A．1　　　B．2　　　C．3　　　D．$\log_2 3$

4．把正方形ABCD沿对角线AC折起，当A、B　C、D四点为顶点的三棱锥体积最大时，直线BD与平面ABC所成的角的大小为　　　　　　　　　　（　　　）

A．90°　　　B．60°　　　C．45°　　　D．30°

5．某公司甲、乙、丙、丁四个地区分别有150 个、120个、180个、150个销售点。公司为了调查产品销售的情况，需从这600个销售点中抽取一个容量为100的样本，记这项调查为①；在丙地区中有20个特大型销售点，要从中抽取7个调查其收入和售后服务等情况，记这项调查为②。则完成①、②这两项调查宜采用的抽样方法依次是　　　　（　　　）

A．分层抽样法，系统抽样法　　　B．分层抽样法，简单随机抽样法

C．系统抽样法，分层抽样法　　　D．简单随机抽样法，分层抽样法

6．设函数

$f(x)=\begin{cases} x^2+bx+c, x\le 0, x\le 0, \\ 2, \quad x>0. \end{cases}$ 若 $f(-4)=f(0)$, $f(-2)=-2$,

则关于 x 的方程

$f(x)=x$ 解的个数为　　　　　　　　　　　　（　　　）

A．1　　　B．2　　　C．3　　　D．4

7．设 $a>0, b>0,$ 则以下不等式中不恒成立的是　　　　　　　　（　　　）

A．$(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\ge 4$　　　B．$a^3+b^3\ge 2ab^2$

C．$a^2+b^2+2\ge 2a+2b$　　　D．$\sqrt{|a-b|}\ge\sqrt{a}-\sqrt{b}$

8．数列

$\{a_n\}$中, $a_1=\frac{1}{5}, a_n+a_{n+1}=\frac{6}{5^{n+1}}, n\in N^*,$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=$

（　　　）

A. $\frac{2}{5}$　　　B. $\frac{2}{7}$　　　C. $\frac{1}{4}$　　　D. $\frac{4}{25}$

9．设集合

$U=\{(x,y)|x\in R,y\in R\},A=\{(x,y)|2x-y+m>0\},B=\{(x,y)|x+y-n\le 0\}$

，那么点P（2，3）$\in A\cap$（C_UB）的充要条件是　　　　　　（　　　）

A. $m>-1,n<5$　　　　B. $m<-1,n<5$

C. $m>-1,n>5$　　　　D. $m<-1,n>5$

10．从正方体的八个顶点中任取三个点为顶点作三角形，其中直角三角形的个数为（　　　）

A．56　　B．52　　C．48　　D．40

11．农民收入由工资性收入和其它收入两部分构成。2003年某地区农民人均收入为3150元(其中工资性收入为1800元，其它收入为1350元)，预计该地区自2004年起的5年内，农民的工资性收入将以每年6%的年增长率增长，其它收入每年增加160元。根据以上数据，2008年该地区农民人均收入介于（　　　）

A．4200元~4400元　　　　B．4400元~4600元

C．4600元~4800元　　　　D．4800元~5000元

12．设 $f(x),g(x)$ 分别是定义在R上的奇函数和偶函数，当 $x<0$ 时，$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)>0,$

且 $g(-3)=0,$ 则不等式 $f(x)g(x)<0$ 的解集是　　　　（　　　）

A. $(-3,0)\cup(3,+\infty)$　　　B. $(-3,0)\cup(0,3)$

C. $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$　　　D. $(-\infty,-3)\cup(0,3)$

第II卷（非选择题　共90分）

二、填空题：本大题 共4小题，每小题4分，共16分，把答案填在题中横线上。

13．已知向量 $a=(\cos\theta,\sin\theta)$，向量 b=$(\sqrt{3},-1)$，则|2$a$—b|的最大值是__________________.

14．同时抛物线两枚相同的均匀硬币，随机变量ξ=1表示结果中有正面向上，ξ=0表示结果中没有正面向上，则Eξ=__________________.

15．若 $(x^3+\frac{1}{x\sqrt{x}})^n$ 的展开式中的常数项为84，则n=_______________________.

16．设F是椭圆 $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{6}=1$ 的右焦点，且椭圆上至少有21个不同的点Pi（i=1，2，3，…），使|FP1|，|FP2|，|FP3|，…组成公差为d的等差数列，则d的取值范围为__________________.

三、解答题：本大题 共6小题，共74分.　解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17．（本小题满分12分）

已知

$\sin(\frac{\pi}{4}+2\alpha)\cdot\sin(\frac{\pi}{4}-2\alpha)=\frac{1}{4},\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$，求 $2\sin^2\alpha+\tan\alpha-\cot\alpha-1$

的值.

18. （本小题满分 12 分）

甲、乙、丙三台机床各自独立地加工同一种零件，已知甲机床加工的零件是一等品而乙机床加工的零件不是一等品的概率为$\frac{1}{4}$，乙机床加工的零件是一等品而丙机床加工的零件不是一等品的概率为$\frac{1}{12}$，甲、丙两台机床加工的零件都是一等品的概率为$\frac{2}{9}$.

（Ⅰ）分别求甲、乙、丙三台机床各自加工零件是一等品的概率；

（Ⅱ）从甲、乙、丙加工的零件中各取一个检验，求至少有一个一等品的概率.

19. （本小题满分 12 分）

如图，在底面是菱形的四棱锥 P—ABC D 中，∠ABC=600，PA=AC=a，PB=PD=$\sqrt{2}a$，点 E 在 PD 上，且 PE:ED=2:1.

（I）证明 PA⊥平面 ABCD；

（II）求以 AC 为棱，EAC 与 DAC 为面的二面角θ的大小；

（Ⅲ）在棱 PC 上是否存在一点 F，使 BF//平面 AEC？证明你的结论.

20. （本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x^2e^{ax}$，其中$a\le 0$，e为自然对数的底数.

（Ⅰ）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 在区间[0，1]上的最大值.

21. （本小题满分 12 分）

如图，过抛物线 x2=4y 的对称轴上任一点 P（0,m）(m>0)作直线与抛物线交于 A，B 两点，点 Q 是点 P 关于原点的对称点.

（I）设点 P 分有向线段$\overrightarrow{AB}$所成的比为λ，证明：$\overrightarrow{QP}\perp(\overrightarrow{QA}-\lambda\overrightarrow{QB})$；

（II）设直线 AB 的方程是 x-2y+12=0，过 A、B 两点的圆 C 与抛物线在点 A 处有共同的切线，求圆 C 的方程.

22. （本小题满分 14 分）

如图，直线

$l_1: y=kx+1-k(k\ne 0, k\ne\pm\frac{1}{2})$与$l_2: y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

相交于点 P.直线 l1 与 x 轴交于点 P1，过点 P1 作 x 轴的垂线交直线 l2 于点 Q1，过点 Q1 作 y 轴的垂线交直线 l1 于点 P2，过点 P2 作 x 轴的垂线交直线 l2 于点 Q2，…，这样一直作下去，可得到一系列点 P1、Q1、P2、Q2，…，点 Pn（n=1，2，…）的横坐标构成数列$\{x_n\}$

（Ⅰ）证明 $x_{n+1}-1=\frac{1}{2k}(x_n-1), n\in N^*$；

（Ⅱ）求数列$\{x_n\}$的通项公式；

（Ⅲ）比较$2|PP_n|^2$与$4k^2|PP_1|^2+5$的大小.

2004 年普通高等学校招生湖南卷理工农医类数学试题

参考答案

1.D　2.A　3.B　4.C　5.B　6.C　7.B　8.C　9.A　10.C　11.B　12.D

13．4　 14．0.75　 15．9　　 16．$[-\frac{1}{10},0)\cup(0,\frac{1}{10}]$

17．解：由

$$\sin(\frac{\pi}{4}+2\alpha)\cdot\sin(\frac{\pi}{4}-2\alpha)=\sin(\frac{\pi}{4}+2\alpha)\cdot\cos(\frac{\pi}{4}+2\alpha)$$

$$=\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2}+4\alpha)=\frac{1}{2}\cos 4\alpha=\frac{1}{4},$$

得 $\cos 4\alpha=\frac{1}{2}.$　 又 $\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$，所以 $\alpha=\frac{5\pi}{12}.$

于是

$$2\sin^2\alpha+\tan\alpha-\cot\alpha-1=-\cos 2\alpha+\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=-\cos 2\alpha+\frac{-2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$=-(\cos 2\alpha+2\cot 2\alpha)=-(\cos\frac{5\pi}{6}+2\cot\frac{5\pi}{6})=-(-\frac{\sqrt{3}}{2}-2\sqrt{3})=\frac{5}{2}\sqrt{3}.$$

18．解：（Ⅰ）设 A、B、C 分别为甲、乙、丙三台机床各自加工的零件是一等品的事件.

①

②

③

由题设条件有

$$\begin{cases}P(A\cdot\overline{B})=\frac{1}{4},\\P(B\cdot\overline{C})=\frac{1}{12},\\P(A\cdot C)=\frac{2}{9}.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}P(A)\cdot(1-P(B))=\frac{1}{4},\\P(B)\cdot(1-P(C))=\frac{1}{12},\\P(A)\cdot P(C)=\frac{2}{9}.\end{cases}$$

由①、③得 $P(B)=1-\frac{9}{8}P(C)$ 代入②得　 27[P(C)]2－51P(C)+22=0.

解得 $P(C)=\frac{2}{3}$ 或 $\frac{11}{9}$（舍去）.

将 $P(C)=\frac{2}{3}$ 分别代入 ③、② 可得 $P(A)=\frac{1}{3},P(B)=\frac{1}{4}.$

即甲、乙、丙三台机床各加工的零件是一等品的概率分别是 $\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{3}.$

（Ⅱ）记 D 为从甲、乙、丙加工的零件中各取一个检验，至少有一个一等品的事件，

则

$$P(D)=1-P(\overline{D})=1-(1-P(A))(1-P(B))(1-P(C))=1-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{6}.$$

故从甲、乙、丙加工的零件中各取一个检验，至少有一个一等品的概率为 $\frac{5}{6}.$

19．（Ⅰ）证明　 因为底面 ABCD 是菱形，∠ABC=60°，

所以 AB=AD=AC=a，　 在△PAB 中，

由 PA2+AB2=2a2=PB2　 知 PA⊥AB.

同理，PA⊥AD，所以 PA⊥平面 ABCD.

（Ⅱ）解　作 EG//PA 交 AD 于 G，

由 PA⊥平面 ABCD.

知 EG⊥平面 ABCD. 作 GH⊥AC 于 H，连结 EH，

则 EH⊥AC，∠EHG 即为二面角θ的平面角.

又 PE ： ED=2 ： 1，所以 $EG=\frac{1}{3}a, AG=\frac{2}{3}a, GH=AG\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}a.$

从而 $\tan\theta=\frac{EG}{GH}=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \theta=30^\circ.$

（Ⅲ）解法一　以 A 为坐标原点，直线 AD、AP 分别为 y 轴、z 轴，过 A 点垂直平面 PAD 的直线为 x 轴，建立空间直角坐标系如图. 由题设条件，相关各点的坐标分别为

$$A(0,0,0), B(\frac{\sqrt{3}}{2}a,-\frac{1}{2}a,0), C(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{1}{2}a,0).$$

$$D(0,a,0), P(0,0,a), E(0,\frac{2}{3}a,\frac{1}{3}a).$$

所以 $\overrightarrow{AE}=(0,\frac{2}{3}a,\frac{1}{3}a), \overrightarrow{AC}=(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{1}{2}a,0).$

$$\overrightarrow{AP}=(0,0,a), \overrightarrow{PC}=(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{1}{2}a,-a).$$

$$\overrightarrow{BP}=(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{1}{2}a,a).$$

设点 F 是棱 PC 上的点，

$$\overrightarrow{PF}=\lambda\overrightarrow{PC}=(\frac{\sqrt{3}}{2}a\lambda,\frac{1}{2}a\lambda,-a\lambda),\text{其中}0<\lambda<1,$$

则

$$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PF}=(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{1}{2}a,a)+(\frac{\sqrt{3}}{2}a\lambda,\frac{1}{2}a\lambda,-a\lambda)$$

$$=(\frac{\sqrt{3}}{2}a(\lambda-1),\frac{1}{2}a(1+\lambda),a(1-\lambda)).$$

令 $\overrightarrow{BF}=\lambda_1\overrightarrow{AC}+\lambda_2\overrightarrow{AE}$ 得

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}a(\lambda-1)=\frac{\sqrt{3}}{2}a\lambda_1,\\ \frac{1}{2}a(1+\lambda)=\frac{1}{2}a\lambda_1+\frac{2}{3}a\lambda_2,\\ a(1-\lambda)=\frac{1}{3}a\lambda_2.\end{cases}\quad \text{即}\begin{cases}\lambda-1=\lambda_1,\\ 1+\lambda=\lambda_1+\frac{4}{3}\lambda_2,\\ 1-\lambda=\frac{1}{3}\lambda_2.\end{cases}$$

解得 $\lambda=\frac{1}{2},\lambda_1=-\frac{1}{2},\lambda_2=\frac{3}{2}.$　即 $\lambda=\frac{1}{2}$时，$\overrightarrow{BF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}.$

亦即，F 是 PC 的中点时，$\overrightarrow{BF}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AE}$共面.

又　BF$\not\subset$平面 AEC，所以当 F 是棱 PC 的中点时，BF//平面 AEC.

解法二　当 F 是棱 PC 的中点时，BF//平面 AEC，证明如下，

证法一　取 PE 的中点 M，连结 FM，则 FM//CE.　①

由 $EM = \frac{1}{2}PE = ED,$ 知 E 是 MD 的中点.

连结 BM、BD，设 BD∩AC=O，则 O 为 BD 的中点.

所以　BM//OE.　②

由①、②知，平面 BFM//平面 AEC.

又　BF⊂平面 BFM，所以 BF//平面 AEC.

证法二

因为 $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DP})$

$= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) + \frac{3}{2}(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD})$

$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$

所以　$\overrightarrow{BF}$、$\overrightarrow{AE}$、$\overrightarrow{AC}$ 共面.

又 BF⊄平面 ABC，从而 BF//平面 AEC.

20．解：（Ⅰ）$f'(x) = x(ax+2)e^{ax}.$

（i）当 a=0 时，令 $f'(x) = 0,$ 得 $x = 0.$

若 $x > 0,$ 则 $f'(x) > 0,$ 从而 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

若 $x < 0,$ 则 $f'(x) < 0,$ 从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减.

（ii）当 a<0 时，令 $f'(x) = 0,$ 得 $x(ax+2) = 0,$ 故 $x = 0$ 或 $x = -\frac{2}{a}.$

若 $x < 0,$ 则 $f'(x) < 0,$ 从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减；

若 $0 < x < -\frac{2}{a},$ 则 $f'(x) > 0,$ 从而 $f(x)$ 在 $(0,-\frac{2}{a})$ 上单调递增；

若 $x > -\frac{2}{a},$ 则 $f'(x) < 0,$ 从而 $f(x)$ 在 $(-\frac{2}{a},+\infty)$ 上单调递减.

（Ⅱ）（i）当 a=0 时，$f(x)$ 在区间[0，1]上的最大值是 $f(1) = 1.$

（ii）当 $-2 < a < 0$ 时，$f(x)$ 在区间[0，1]上的最大值是 $f(1) = e^{a}$.

（iii）当 $a \le -2$ 时，$f(x)$ 在区间[0，1]上的最大值是 $f(-\frac{2}{a}) = \frac{4}{a^2e^2}.$

21．解：（Ⅰ）依题意，可设直线 AB 的方程为 $y = kx + m,$ 代入抛物线方程 $x^2 = 4y$ 得

$x^2 - 4kx - 4m = 0.$　①

设 A、B 两点的坐标分别是 (x_1, y_1)、$(x_2, y_2),$ 则 x_1、$x2$ 是方程①的两根.

所以　$x_1x_2 = -4m.$

由点 P（0，m）分有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 所成的比为 λ，

得 $\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = 0,$ 即 $\lambda = -\frac{x_1}{x_2}.$

又点 Q 是点 P 关于原点的对称点，

故点 Q 的坐标是（0，－m），从而 $\overrightarrow{QP}=(0,2m)$.

$\overrightarrow{QA}-\lambda\overrightarrow{QB}=(x_1,y_1+m)-\lambda(x_2,y_2+m)=(x_1-\lambda x_2,y_1-\lambda y_2+(1-\lambda)m).$

$\overrightarrow{QP}\cdot(\overrightarrow{QA}-\lambda\overrightarrow{QB})=2m[y_1-\lambda y_2+(1-\lambda)m]$

$=2m[\frac{x_1^2}{4}+\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2^2}{4}+(1+\frac{x_1}{x_2})m]=2m(x_1+x_2)\cdot\frac{x_1x_2+4m}{4x_2}$

$$=2m(x_1+x_2)\cdot\frac{-4m+4m}{4x_2}=0.$$

所以 $\overrightarrow{QP}\perp(\overrightarrow{QA}-\lambda\overrightarrow{QB}).$

（Ⅱ）由 $\begin{cases}x-2y+12=0,\\x^2=4y,\end{cases}$ 得点 A、B 的坐标分别是（6，9）、（－4，4）.

由 $x^2=y$ 得 $y=\frac{1}{4}x^2,y'=\frac{1}{2}x,$

所以抛物线 $x^2=4y$ 在点 A 处切线的斜率为 $y'|_{x=6}=3$

设圆 C 的方程是 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$

则 $\begin{cases}\frac{b-9}{a-b}=-\frac{1}{3},\\(a-6)^2+(b-9)^2=(a+4)^2+(b-4)^2.\end{cases}$

解之得

$a=-\frac{3}{2},b=\frac{23}{2},r^2=(a+4)^2+(b-4)^2=\frac{125}{2}.$

所以圆 C 的方程是 $(x+\frac{3}{2})^2+(y-\frac{23}{2})^2=\frac{125}{2},$

即 $x^2+y^2+3x-23y+72=0.$

22．（Ⅰ）证明：设点 Pn 的坐标是 (x_n,y_n)，由已知条件得

点 Qn、Pn+1 的坐标分别是：

$(x_n,\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2}),(x_{n+1},\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2}).$

由 Pn+1 在直线 *l*1 上，得 $\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2}=kx_{n+1}+1-k.$

所以 $\frac{1}{2}(x_n-1)=k(x_{n+1}-1),$ 即 $x_{n+1}-1=\frac{1}{2k}(x_n-1),n\in N^*.$

（Ⅱ）解：由题设知 $x_1=1-\frac{1}{k},x_1-1=-\frac{1}{k}\neq 0,$ 又由（Ⅰ）知 $x_{n+1}-1=\frac{1}{2k}(x_n-1)$，

所以数列 $\{x_n-1\}$ 是首项为 $x_1-1,$ 公比为 $\frac{1}{2k}$ 的等比数列.

从而

$x_n-1=-\frac{1}{k}\times(\frac{1}{2k})^{n-1}$,即$x_n=1-2\times(\frac{1}{2k})^{n}, n\in N^*$.

（III）解：由$\begin{cases} y=kx+1-k, \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}, \end{cases}$得点P的坐标为（1，1）.

所以

$2|PP_n|^2=2(x_n-1)^2+2(kx_n+1-k-1)^2=8\times(\frac{1}{2k})^{2n}+2(\frac{1}{2k})^{2n-2}$,

$4k^2|PP_1|^2+5=4k^2[(1-\frac{1}{k}-1)^2+(0-1)^2]+5=4k^2+9$.

（i）当$|k|>\frac{1}{2}$,即$k<-\frac{1}{2}$或$k>\frac{1}{2}$时，$4k^2|PP_1|^2+5$>1+9=10.

而此时

$0<|\frac{1}{2k}|<1$,所以$2|PP_n|^2<8\times1+2=10$.故$2|PP_n|^2<4k^2|PP_1|^2+5$.

（ii）当$0<|k|<\frac{1}{2}$,即$k\in(-\frac{1}{2},0)\cup(0,\frac{1}{2})$时，$4k^2|PP_1|^2+5$<1+9=10.

而此时

$|\frac{1}{2k}|>1$,所以$2|PP_n|^2>8\times1+2=10$.故$2|PP_n|^2>4k^2|PP_1|^2+5$.