本套试题主要特点是注重基础、贯穿所学的考点，有实际应用问题（数学思想和方法解答实际问题，彰显了数学魅力），又由知识的综合与巧妙的结合（第 17 题把数列与概率巧妙的结合在一起，在知识交汇处命题，体现了高考命题的原则）

2012 福建数学试题解析（文史类）

第 I 卷（选择题 共 60 分）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.复数（2+i）^{2} 等于

A.3+4i　B.5+4i　C.3+2i　D.5+2i

【解析】$\because (2+i)^2 = 4-1+4i = 3+4i$.

【答案】A

【考点定位】考查复数的代数运算，是常考题.

2.已知集合 M={1，2，3，4}，N={-2,2}，下列结论成立的是

A.N$\subseteq$M　B.M$\cup$N=M　C.M$\cap$N=N　D.M$\cap$N={2}

【解析】显然 A，B,C 错，D 正确；

【答案】D

【考点定位】考查集合包含关系与运算.属基础题.

3.已知向量 a=（x-1,2），b=（2,1），则 a⊥b 的充要条件是

A.x=-$\frac{1}{2}$　B.x-1　C.x=5　D.x=0

【解析】有向量垂直的充要条件得 2（x-1)+2=0,所以 x=0.D 正确.

【答案】D

【考点定位】考查数量积的运算和性质，要明确性质.

4. 一个几何体的三视图形状都相同，大小均等，那么这个几何体不可以是

A 球　B 三棱锥　C 正方体　D 圆柱

【解析】分别比较 A,B,C 的三视图不符合条件，D 符合.

【答案】D

【考点定位】考查空间几何体的三视图与直观图，考查空间想象能力、逻辑推理能力.

5 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{5}=1$ 的右焦点为（3,0），则该双曲线的离心率等于

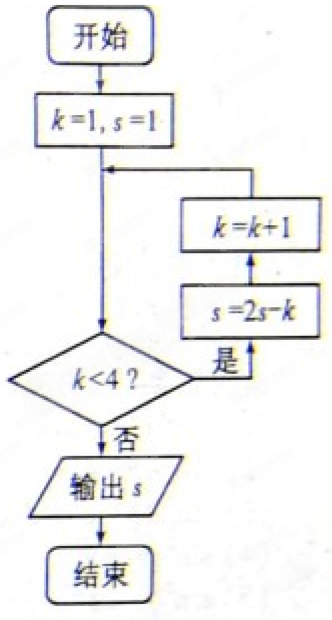
A $\frac{3\sqrt{14}}{14}$　B $\frac{3\sqrt{2}}{4}$　C $\frac{3}{2}$　D $\frac{4}{3}$

【解析】$\because a^2+5=3^2, \therefore a=2, \therefore e=\frac{3}{2}$. C 正确.

【答案】C

【考点定位】本题主要考察双曲线的标准方程、简单的几何性质，把握性质是关键.

6. 阅读右图所示的程序框图，运行相应的程序，输出 s 值等于



A -3　　B　-10　　C　0　　D　-2

【解析】

$\because 1.S=2\times1-1=1,\ K=2$

$2.S=2\times1-2=0,\ K=3$

$3.S=2\times0-3=-3,\ K=4$，输出-3.

【答案】A

【考点定位】该题主要考察算法的基本思想、结构和功能，把握算法的基本思想是解好此类问题的根本.

7.直线 x+$\sqrt{3y}$ -2=0 与圆 $x^2+y^2=4$ 相交于 A,B 两点，则弦 AB 的长度等于

A. $2\sqrt{5}$　B $2\sqrt{3}$.　C. $\sqrt{3}$　D.1

【解析】$\because$圆心（0,0），半径$r=2,\therefore$弦长$|AB|=2\sqrt{2^2-(\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+3}})^2}=2\sqrt{3}$. B 正确.

【答案】B

【考点定位】该题主要考查直线和圆的位置关系，考查计算求解能力.

8.函数 f(x)=sin(x-$\frac{\pi}{4}$)的图像的一条对称轴是

A.x=$\frac{\pi}{4}$　B.x=$\frac{\pi}{2}$　C.x=-$\frac{\pi}{4}$　D.x=-$\frac{\pi}{2}$

【解析】把 x=-$\frac{\pi}{4}$代入后得到 f(x)=-1，因而对称轴为 x=-$\frac{\pi}{4}$，C 正确.

【答案】C

【考点定位】此题主要考察三角函数的图像和性质，代值逆推是主要解法.

9.设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0 & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}, g(x)=\begin{cases}1 & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为为无理数}\end{cases}$，则 f(g(π))的值为

A 1　B 0　C −1　D π

【解析】$\because g(\pi)=0,\therefore f(g(\pi))=f(0)=0.B$正确.

【答案】B

【考点定位】该题主要考查函数的概念、定义域和值域，考查求值计算能力.

10.若直线 y=2x 上存在点（x，y）满足约束条件$\begin{cases} x+y-3\le 0 \\ x-2y-3\le 0 \\ x\ge m \end{cases}$，则实数 m 的最大值为

A.-1　　B.1　　C. $\frac{3}{2}$　　D.2

【解析】

$\because x+y-3=0$和$y=2x$交点为（1,2），$\therefore$只有$m\le 1$才能符合条件. B正确.

【答案】B

【考点定位】本题主要考察一元二次不等式表示平面区域，考查分析判断能力、逻辑推理能力和求解能力.

11.数列{a_n}的通项公式$a_n=n\cos\frac{n\pi}{2}$,其前 n 项和为 S_n，则 S_{2012} 等于

A.1006　　B.2012　　C.503　　D.0

【解析】

$$\because a_n=n\cos\frac{n\pi}{2},$$
$$\therefore S_{2012}=1\times 0-2\times 1+3\times 0+4\times 1+\cdots+2012\times 1$$
$$=-2+4-6+\cdots-2010+2012$$
$$=2\times 503=1006.$$

【答案】A

【考点定位】本题主要考察数列的项、前 n 项和，考查数列求和能力.此类问题关键是并项求和.

12、已知 f（x）=x^3 -6x^2 +9x-abc，a＜b＜c，且 f（a）=f（b）=f（c）=0.现给出如下结论：

①f（0）f（1）＞0；②f（0）f（1）＜0；③f（0）f（3）＞0；④f（0）f（3）＜0.

其中正确结论的序号是

A.①③　　B.①④　　C.②③　　D.②④

【解析】

$\because f(0)=-abc, f(1)=4-abc, f(3)=27-54+27-abc=-abc=f(0),$

$\because f'(x)=3(x-1)(x-3), \therefore f(x)$在（$-\infty,1$）和（$3,+\infty$）上增加，在（1, 3）上减少，$\therefore a<1<b<3<c, \therefore f(0)\cdot f(1)<0, f(0)\cdot f(3)>0.$

【答案】C

【考点定位】本题考查函数的零点，函数的单调性极值，考查分析判断能力、必然与或然的能力.

第Ⅱ卷（非选择题共 90 分）

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分。把答案填在答题卡的相应位置。

13.在△ABC 中，已知∠BAC=60°，∠ABC=45°，$BC=\sqrt{3}$，则 AC=________

【解析】由正弦定理得$\dfrac{AC}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$，$\therefore AC=\sqrt{2}$.

【答案】$\sqrt{2}$

【考点定位】本题考查三角形中的三角函数，正弦定理，考查求解计算能力.

14.一支田径队有男女运动员 98 人，其中男运动员有 56 人。按男女比例用分层抽样的方法，从全体运动员中抽出一个容量为 28 的样本，那么应抽取女运动员人数是_______

【解析】$\dfrac{98\text{-}56}{98}\times 28=12$.

【答案】12

【考点定位】此题考查分层抽样的概念和具体做法，明确分层抽样的本质是关键.

15.已知关于 x 的不等式 $x^2\text{-}ax+2a>0$ 在 R 上恒成立，则实数 a 的取值范围是__________

【解析】$\because$该不等式恒成立，$\therefore \Delta<0$，即$a^2-4\cdot 2a<0$，$\therefore 0<a<8$.

【答案】(0,8)

【考点定位】该题主要考查一元二次不等式的解法，解法的三种情况的理解和把握是根本.

16.某地区规划道路建设，考虑道路铺设方案，方案设计图中，求表示城市，两点之间连线表示两城市间可铺设道路，连线上数据表示两城市间铺设道路的费用，要求从任一城市都能到达其余各城市，并且铺设道路的总费用最小。例如：在三个城市道路设计中，若城市间可铺设道路的线路图如图 1，则最优设计方案如图 2，此时铺设道路的最小总费用为 10.

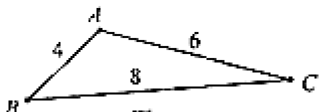


图 1

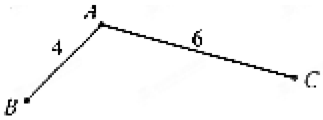


图 2

现给出该地区可铺设道路的线路图如图 3，则铺设道路的最小总费用为____________。

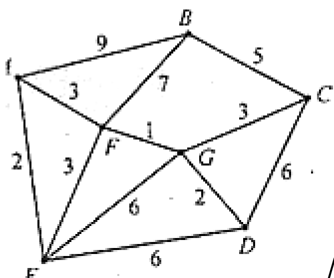


图 3

【解析】走线路 $E-A-F-G-C-B$ 最消费用 16.

【答案】16

【考点定位】本题考查实际应用能力、创新能力、分析问题解决问题的能力.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 12 分）

在等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$中，$a_1=b_1=1$，$b_4=8$，$\{a_n\}$的前 10 项和 $S_{10}=55$.

（Ⅰ）求 a_n 和 b_n；

（Ⅱ）现分别从$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前 3 项中各随机抽取一项，写出相应的基本事件，并求这两项的值相等的概率

【解析】

(1) 设d是数列$\{a_n\}$的公差，q是$\{b_n\}$的公比，由题意得：

$S_{10}=10+\frac{10\times 9}{2}d=55, b_4=q^3=8$.解得：$d=1, q=2$.

$\therefore a_n=n, b_n=2^{n-1}$.

(2)分别从$\{a_n\}$,$\{b_n\}$中的前三项中各随机抽取一项，

得到的基本事件有9个，（1,1），（1,2,），（1,4），（2,1），（2，2）（2,4），（3,1），（3,2），（3,4）.

符合条件的有2个（1,1），（2,2）.故所求概率为P=$\frac{2}{9}$.

【答案】（1）$a_n=n, b_n=2^n$，（2）$\frac{2}{9}$

【考点定位】本题主要考察等差、等比数列、古典概型的基本知识，考查运算求解能力，考查转化与划归思想、必然与或然思想，注意留心学习.

18.(本题满分 12 分)

某工厂为了对新研发的一种产品进行合理定价，将该产品按事先拟定的价格进行试销，得到如下数据：

单价 x(元)	8	8.2	8.4	8.6	8.8	9
销量 y(件)	90	84	83	80	75	68

（I）求回归直线方程 $\hat{y}$ =bx+a，其中 b=-20，a= $\hat{y}$ -b $\bar{x}$；

（II）预计在今后的销售中，销量与单价仍然服从（I）中的关系，且该产品的成本是 4 元/件，为使工厂获得最大利润，该产品的单价应定为多少元？（利润=销售收入-成本）

【解析】

(1) $\because \bar{x}=\frac{1}{6}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)=8.5$.

$\bar{y}=\frac{1}{6}(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6)=80$.

$\therefore a=\bar{y}-b\bar{x}=80+20\times 8.5=250$. $\therefore$ 回归直线方程：

$y=-20x+250$.

(2) 设工厂获利润为L元，依题意：

$L=x(-20x+250)-4(-20x+250)=-20x^2+330x-1000$

$=-20(x-\frac{33}{4})^2+361.25$.

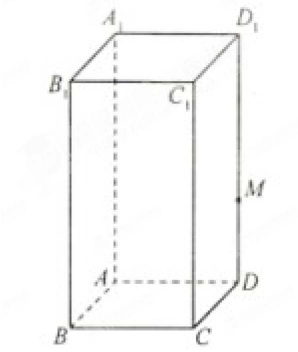
当单价定为$x=8.25$时，工厂获利最大.

【答案】(1)y=-20x+250； (2)8.25

【考点定位】.本题主要考察回归分析，一元二次函数等基础知识，考查运算能力、应用意

识、转化与化归思想、特殊与一般思想.

19.（本小题满分 12 分）
如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AD=1$，$AA_1=2$，M 为棱 DD_1 上的一点。



Ⅰ求三棱锥 $A-MCC_1$ 的体积；
Ⅱ当 A_1M+MC 取得最小值时，求证：$B_1M\perp$平面 MAC

【解析】

(1) 由长方体知$AD\perp$平面CDD_1C_1，点A到平面CDD_1C_1的距离$AD=1$，

$\therefore S_{\Delta MCC_1}=\frac{1}{2}CC_1\times CD=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1, \therefore V_{A-MCC_1}=\frac{1}{3}AD\cdot S_{\Delta MCC_1}=\frac{1}{3}.$

(2)将侧面CDD_1C_1绕DD_1逆时针转动90°展开，与侧面ADD_1A_1共面，
当A_1，M,C'共线时，A_1M+MC取得最小值由$AD=CD=1$，$AA_1=2$
得M为DD_1的中点连接MC_1在ΔMC_1C中，$MC_1=MC=\sqrt{2}$，$CC_1=2$，

$\therefore CC_1^2=MC_1^2+MC^2, \therefore \angle CMC_1=90°$，$CM\perp MC_1$，
$\because B_1C_1\perp$平面CDD_1C_1，$\therefore B_1C_1\perp CM$，$\because AM\cap MC=C$，
$\therefore CM\perp$平面B_1C_1M，同理可证$B_1M\perp AM$，$\therefore B_1M\perp$平面MAC.

【答案】$\frac{1}{3}$

【考点定位】本题主要考察直线与直线、直线与平面的位置关系以及体积等基本知识，考查空间想象能力、推理论证能力、运算求解能力、数形结合思想、化归与转化思想.

20. （本小题满分 13 分）
某同学在一次研究性学习中发现，以下五个式子的值都等于同一个常数。
（1）$\sin^2 13°+\cos^2 17°-\sin 13°\cos 17°$
（2）$\sin^2 15°+\cos^2 15°-\sin 15°\cos 15°$
（3）$\sin^2 18°+\cos^2 12°-\sin 18°\cos 12°$
（4）$\sin^2(-18°)+\cos^2 48°-\sin(-18°)\cos 48°$
（5）$\sin^2(-25°)+\cos^2 55°-\sin(-25°)\cos 55°$
Ⅰ 试从上述五个式子中选择一个，求出这个常数

Ⅱ 根据（Ⅰ）的计算结果，将该同学的发现推广为三角恒等式，并证明你的结论

【解析】

(1) 选择 (2) 式计算如下：$\sin^2 15°+\cos^2 15°-\sin 15°\cos 15°=1-\frac{1}{2}\sin 30°=\frac{3}{4}$.

(2) 证明：$\sin^2\alpha+\cos^2(30°-\alpha)-\sin\alpha\cos(30°-\alpha)$

$=\sin^2\alpha+(\cos 30°\cos\alpha+\sin 30°\sin\alpha)^2-\sin\alpha(\cos 30°\cos\alpha+\sin 30°\sin\alpha)$

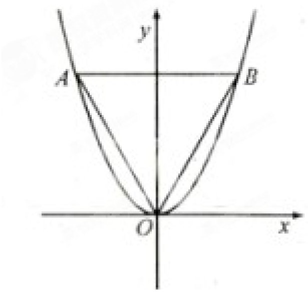
$\sin^2\alpha+\frac{3}{4}\cos^2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{1}{4}\sin^2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin^2\alpha$

$=\frac{3}{4}\sin^2\alpha+\frac{3}{4}\cos^2\alpha=\frac{3}{4}$.

【考点定位】本题主要考察同角函数关系、两角和与差的三角函数公式、二倍角公式，考查运算能力、特殊与一般思想、化归与转化思想。

21.（本小题满分 12 分）

如图，等边三角形 OAB 的边长为$8\sqrt{3}$，且其三个顶点均在抛物线 E：$x^2=2py$（p＞0）上。



（1） 求抛物线 E 的方程；

（2） 设动直线 l 与抛物线 E 相切于点 P，与直线 y=-1 相交于点 Q。证明以 PQ 为直径的圆恒过 y 轴上某定点

【解析】

(1) 依题意$|OB|=8\sqrt{3}$，$\angle BOY=30°$，设点$B(x,y)$,则$x=8\sqrt{3}\cdot\sin 30°=4\sqrt{3}$.

$y=8\sqrt{3}\cdot\cos 30°=12,\therefore B(4\sqrt{3},12)$在抛物线上，$\therefore(4\sqrt{3})^2=2p\times 12,\therefore p=2,$

抛物线E的方程为$x^2=4y$.

(2) 设点$P(x_0,y_0),x_0\neq 0,\because y=\frac{1}{4}x^2,y'=\frac{1}{2}x,$

切线方程：$y-y_0=\frac{1}{2}x_0(x-x_0)$,即$y=\frac{1}{2}x_0x-\frac{1}{4}x_0^2$

由$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x_0x-\frac{1}{4}x_0^2\\ y=-1\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{x_0^2-4}{2x_0}\\ y=-1\end{cases}$，$\therefore Q(\frac{x_0^2-4}{2x_0},-1)$.

设$M(0,\ y_1),\therefore \overrightarrow{MP}=(x_0,y_0-y_1),\overrightarrow{MQ}=(\dfrac{x_0^2-4}{2x_0},-1-y_1),\because \overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=0,$

$\dfrac{x_0^2-4}{2x_0}-y_0-y_0y_1+y_1+y_1^2=0,$ 又$y_0=\dfrac{1}{4}x_0^2(x_0\neq 0),\therefore$ 联立解得$y_1=1.$

故以PQ为直径的圆过y轴上的定点$M(0,1)$．

【答案】$x^2=4y$

【考点定位】本题主要考察抛物线的定义性质、圆的性质、直线与圆锥曲线的位置关系等基本知识，考查运用求解能力、推理论证能力、数形结合思想、转化与化归思想、特殊与一般思想.

22.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=ax\sin x-\dfrac{3}{2}(a\in R)$, 且在, $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上的最大值为$\dfrac{\pi-3}{2}$,

（1）求函数 f(x)的解析式;

(2)判断函数 f(x)在（0， π ）内的零点个数，并加以证明

【解析】

$(1)\because f'(x)=a(\sin x+x\cos x),x\in(0,\dfrac{\pi}{2}),\therefore \sin x+x\cos x>0,$

当$a=0$时，$f(x)=-\dfrac{3}{2}$不合题意;

当$a<0$时，$f'(x)<0,f(x)$单调递减，$f(x)_{\max}=f(0)=-\dfrac{3}{2}$不和题意;

当$a>0$时，$f'(x)>0,f(x)$单调递增，$f(x)_{\max}=f(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{2}a-\dfrac{3}{2}=\dfrac{\pi-3}{2}.$

$\therefore a=1.\therefore$ 综上$f(x)=x\sin x-\dfrac{3}{2}.$

（2）$f(x)$在（0，π）上有两个零点. 证明如下:

由（1）知$f(x)=x\sin x-\frac{3}{2}, f(0)=-\frac{3}{2}<0, f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi-3}{2}>0,$

$\therefore f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上至少有一个零点. 又由（1）知$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增，

故在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上只有一个零点. 当$x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$时，令$g(x)=f'(x)=\sin x+x\cos x,$

$g(\frac{\pi}{2})=1>0, g(\pi)=-\pi<0, g(x)$在$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上连续，$\therefore m\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right], g(m)=0.$

$g'(x)=2\cos x-x\sin x<0, \therefore g(x)$在$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上递减.当$x\in\left[\frac{\pi}{2},m\right]$时，$g(x)>g(m)=0,$

$f'(x)>0, f(x)$递增，$\therefore$ 当m∈$(\frac{\pi}{2},m)$时，$f(x)\geq f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi-3}{2}>0, \therefore f(x)$在$(\frac{\pi}{2},m)$上无零点;

当$x\in(m,\pi)$时，$g(x)<g(m)=0, f'(x)<0, f(x)$在$(m,\pi)$上递减，$\because f(m)>0, f(\pi)<0,$

$\therefore f(x)$在(m,π)上只有一个零点. 综上$f(x)$在（0，π）上有两个零点.

【答案】（1）$f(x)=x\sin x-\frac{3}{2}$；（2）2 个零点.

【考点定位】本题主要考察函数的最值、零点、单调性等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力、考查函数与方程思想、、数形结合思想、分类讨论思想、转化化归思想.