

## 2024 年普通高等学校招生全国统一考试

### 全国甲卷文科数学

使用范围：陕西、宁夏、青海、内蒙古、四川

注意事项：

1. 答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时，必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时，必须使用 0.5 毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后，只将答题卡交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$ ， $B = \{x | x+1 \in A\}$ ，则  $A \cap B =$  ( )

- A.  $\{1, 2, 3, 4\}$       B.  $\{1, 2, 3\}$       C.  $\{3, 4\}$       D.  $\{1, 2, 9\}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据集合  $B$  的定义先算出具体含有的元素，然后根据交集的定义计算。

【详解】依题意得，对于集合  $B$  中的元素  $x$ ，满足  $x+1=1, 2, 3, 4, 5, 9$ ，

则  $x$  可能的取值为  $0, 1, 2, 3, 4, 8$ ，即  $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 8\}$ ，

于是  $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\}$ 。

故选：A

2. 设  $z = \sqrt{2}i$ ，则  $z \cdot \bar{z} =$  ( )

- A.  $-i$       B.  $1$       C.  $-1$       D.  $2$

【答案】D

【解析】

【分析】先根据共轭复数的定义写出  $\bar{z}$ ，然后根据复数的乘法计算。

【详解】依题意得， $\bar{z} = -\sqrt{2}i$ ，故  $z\bar{z} = -2i^2 = 2$ 。

故选：D

3. 若实数  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} 4x-3y-3 \geq 0 \\ x-2y-2 \leq 0 \\ 2x+6y-9 \leq 0 \end{cases}$ ，则  $z = x-5y$  的最小值为 ( )

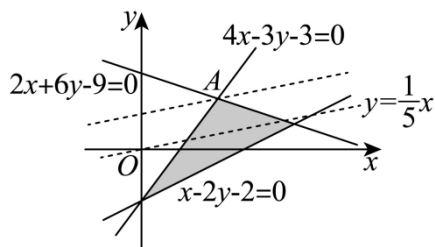
- A. 5                      B.  $\frac{1}{2}$                       C. -2                      D.  $-\frac{7}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】画出可行域后，利用  $z$  的几何意义计算即可得。

【详解】实数  $x, y$  满足  $\begin{cases} 4x-3y-3 \geq 0 \\ x-2y-2 \leq 0 \\ 2x+6y-9 \leq 0 \end{cases}$ ，作出可行域如图：



由  $z = x - 5y$  可得  $y = \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}z$ ，

即  $z$  的几何意义为  $y = \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}z$  的截距的  $-\frac{1}{5}$ ，

则该直线截距取最大值时， $z$  有最小值，

此时直线  $y = \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}z$  过点 A，

联立  $\begin{cases} 4x-3y-3=0 \\ 2x+6y-9=0 \end{cases}$ ，解得  $\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=1 \end{cases}$ ，即  $A\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ ，

则  $z_{\min} = \frac{3}{2} - 5 \times 1 = -\frac{7}{2}$ 。

故选：D。

4. 等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，若  $S_9 = 1$ ， $a_3 + a_7 =$  ( )

- A. -2                      B.  $\frac{7}{3}$                       C. 1                      D.  $\frac{2}{9}$

【答案】D

【解析】

【分析】可以根据等差数列的基本量，即将题目条件全转化成  $a_1$  和  $d$  来处理，亦可用等差数列的性质进行处理，或者特殊值法处理.

【详解】方法一：利用等差数列的基本量

由  $S_9 = 1$ ，根据等差数列的求和公式， $S_9 = 9a_1 + \frac{9 \times 8}{2}d = 1 \Leftrightarrow 9a_1 + 36d = 1$ ，

又  $a_3 + a_7 = a_1 + 2d + a_1 + 6d = 2a_1 + 8d = \frac{2}{9}(9a_1 + 36d) = \frac{2}{9}$ .

故选：D

方法二：利用等差数列的性质

根据等差数列的性质， $a_1 + a_9 = a_3 + a_7$ ，由  $S_9 = 1$ ，根据等差数列的求和公式，

$S_9 = \frac{9(a_1 + a_9)}{2} = \frac{9(a_3 + a_7)}{2} = 1$ ，故  $a_3 + a_7 = \frac{2}{9}$ .

故选：D

方法三：特殊值法

不妨取等差数列公差  $d = 0$ ，则  $S_9 = 1 = 9a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{9}$ ，则  $a_3 + a_7 = 2a_1 = \frac{2}{9}$ .

故选：D

5. 甲、乙、丙、丁四人排成一列，丙不在排头，且甲或乙在排尾的概率是（ ）

- A.  $\frac{1}{4}$                       B.  $\frac{1}{3}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{2}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】分类讨论甲乙的位置，得到符合条件的情况，然后根据古典概型计算公式进行求解.

【详解】当甲排在排尾，乙排第一位，丙有 2 种排法，丁就 1 种，共 2 种；

当甲排在排尾，乙排第二位或第三位，丙有 1 种排法，丁就 1 种，共 2 种；

于是甲排在排尾共 4 种方法，同理乙排在排尾共 4 种方法，于是共 8 种排法符合题意；

基本事件总数显然是  $A_4^4 = 24$ ，

根据古典概型的计算公式，丙不在排头，甲或乙在排尾的概率为  $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ .

故选：B

6. 已知双曲线  $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的上、下焦点分别为  $F_1(0, 4), F_2(0, -4)$ ，点  $P(-6, 4)$  在该双曲

线上，则该双曲线的离心率为（ ）

A. 4

B. 3

C. 2

D.  $\sqrt{2}$ 

【答案】C

【解析】

【分析】由焦点坐标可得焦距  $2c$ ，结合双曲线定义计算可得  $2a$ ，即可得离心率.【详解】由题意， $F_1(0, -4)$ 、 $F_2(0, 4)$ 、 $P(-6, 4)$ ,

$$\text{则 } |F_1F_2| = 2c = 8, \quad |PF_1| = \sqrt{6^2 + (4+4)^2} = 10, \quad |PF_2| = \sqrt{6^2 + (4-4)^2} = 6,$$

$$\text{则 } 2a = |PF_1| - |PF_2| = 10 - 6 = 4, \quad \text{则 } e = \frac{2c}{2a} = \frac{8}{4} = 2.$$

故选：C.

7. 曲线  $f(x) = x^6 + 3x - 1$  在  $(0, -1)$  处的切线与坐标轴围成的面积为 ( )A.  $\frac{1}{6}$ B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C.  $\frac{1}{2}$ D.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 

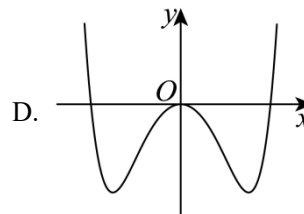
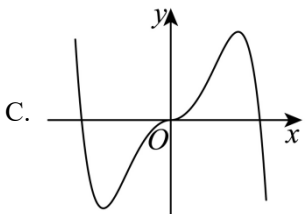
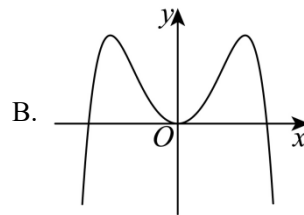
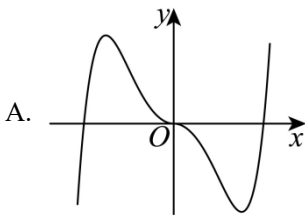
【答案】A

【解析】

【分析】先求出切线方程，再求出切线的截距，从而可求面积.

【详解】 $f'(x) = 6x^5 + 3$ ，所以  $f'(0) = 3$ ，故切线方程为  $y = 3(x - 0) - 1 = 3x - 1$ ，故切线的横截距为  $\frac{1}{3}$ ，纵截距为  $-1$ ，故切线与坐标轴围成的面积为  $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ 

故选：A.

8. 函数  $f(x) = -x^2 + (e^x - e^{-x})\sin x$  在区间  $[-2.8, 2.8]$  的大致图像为 ( )

【答案】B

【解析】

【分析】利用函数的奇偶性可排除 A、C，代入  $x=1$  可得  $f(1) > 0$ ，可排除 D.

【详解】 $f(-x) = -x^2 + (e^{-x} - e^x) \sin(-x) = -x^2 + (e^x - e^{-x}) \sin x = f(x)$ ,

又函数定义域为  $[-2.8, 2.8]$ ，故该函数为偶函数，可排除 A、C，

又  $f(1) = -1 + \left(e - \frac{1}{e}\right) \sin 1 > -1 + \left(e - \frac{1}{e}\right) \sin \frac{\pi}{6} = \frac{e}{2} - 1 - \frac{1}{2e} > \frac{1}{4} - \frac{1}{2e} > 0$ ,

故可排除 D.

故选：B.

9. 已知  $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \sqrt{3}$ ，则  $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = (\quad)$

- A.  $2\sqrt{3} + 1$                       B.  $2\sqrt{3} - 1$                       C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                                   D.  $1 - \sqrt{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】先将  $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$  弦化切求得  $\tan \alpha$ ，再根据两角和的正切公式即可求解.

【详解】因为  $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \sqrt{3}$ ，

所以  $\frac{1}{1 - \tan \alpha} = \sqrt{3}$ ， $\Rightarrow \tan \alpha = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

所以  $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} = 2\sqrt{3} - 1$ ，

故选：B.

原 10 题略

10. 设  $\alpha$ 、 $\beta$  是两个平面， $m$ 、 $n$  是两条直线，且  $\alpha \cap \beta = m$ . 下列四个命题：

- ①若  $m \parallel n$ ，则  $n \parallel \alpha$  或  $n \parallel \beta$                       ②若  $m \perp n$ ，则  $n \perp \alpha, n \perp \beta$   
③若  $n \parallel \alpha$ ，且  $n \parallel \beta$ ，则  $m \parallel n$                       ④若  $n$  与  $\alpha$  和  $\beta$  所成的角相等，则  $m \perp n$

其中所有真命题的编号是 ( )

- A. ①③                                  B. ②④                                  C. ①②③                                  D. ①③④

【答案】A

【解析】

【分析】根据线面平行的判定定理即可判断①；举反例即可判断②④；根据线面平行的性质即可判断③.

【详解】对①，当 $n \subset \alpha$ ，因为 $m \parallel n$ ， $m \subset \beta$ ，则 $n \parallel \beta$ ，

当 $n \subset \beta$ ，因为 $m \parallel n$ ， $m \subset \alpha$ ，则 $n \parallel \alpha$ ，

当 $n$ 既不在 $\alpha$ 也不在 $\beta$ 内，因为 $m \parallel n$ ， $m \subset \alpha, m \subset \beta$ ，则 $n \parallel \alpha$ 且 $n \parallel \beta$ ，故①正确；

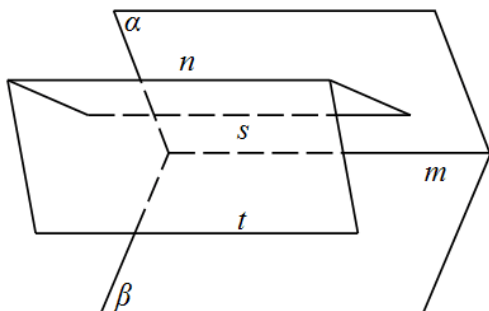
对②，若 $m \perp n$ ，则 $n$ 与 $\alpha, \beta$ 不一定垂直，故②错误；

对③，过直线 $n$ 分别作两平面与 $\alpha, \beta$ 分别相交于直线 $s$ 和直线 $t$ ，

因为 $n \parallel \alpha$ ，过直线 $n$ 的平面与平面 $\alpha$ 的交线为直线 $s$ ，则根据线面平行的性质定理知 $n \parallel s$ ，

同理可得 $n \parallel t$ ，则 $s \parallel t$ ，因为 $s \subset$ 平面 $\beta$ ， $t \subset$ 平面 $\beta$ ，则 $s \parallel$ 平面 $\beta$ ，

因为 $s \subset$ 平面 $\alpha$ ， $\alpha \cap \beta = m$ ，则 $s \parallel m$ ，又因为 $n \parallel s$ ，则 $m \parallel n$ ，故③正确；



对④，若 $\alpha \cap \beta = m, n$ 与 $\alpha$ 和 $\beta$ 所成的角相等，如果 $n \parallel \alpha, n \parallel \beta$ ，则 $m \parallel n$ ，故④错误；

综上所述只有①③正确，

故选：A.

11. 在 $\triangle ABC$ 中内角 $A, B, C$ 所对边分别为 $a, b, c$ ，若 $B = \frac{\pi}{3}$ ， $b^2 = \frac{9}{4}ac$ ，则 $\sin A + \sin C =$  ( )

A.  $\frac{3}{2}$

B.  $\sqrt{2}$

C.  $\frac{\sqrt{7}}{2}$

D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用正弦定理得 $\sin A \sin C = \frac{1}{3}$ ，再利用余弦定理有 $a^2 + c^2 = \frac{13}{4}ac$ ，再利用正弦定理得到 $\sin^2 A + \sin^2 C$ 的值，最后代入计算即可.

【详解】因为 $B = \frac{\pi}{3}, b^2 = \frac{9}{4}ac$ ，则由正弦定理得 $\sin A \sin C = \frac{4}{9} \sin^2 B = \frac{1}{3}$ .

由余弦定理可得:  $b^2 = a^2 + c^2 - ac = \frac{9}{4}ac$ ,

即:  $a^2 + c^2 = \frac{13}{4}ac$ , 根据正弦定理得  $\sin^2 A + \sin^2 C = \frac{13}{4} \sin A \sin C = \frac{13}{12}$ ,

所以  $(\sin A + \sin C)^2 = \sin^2 A + \sin^2 C + 2 \sin A \sin C = \frac{7}{4}$ ,

因为  $A, C$  为三角形内角, 则  $\sin A + \sin C > 0$ , 则  $\sin A + \sin C = \frac{\sqrt{7}}{2}$ .

故选: C.

## 二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

原 13 题略

12. 函数  $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$  在  $[0, \pi]$  上的最大值是\_\_\_\_\_.

【答案】 2

【解析】

【分析】 结合辅助角公式化简成正弦型函数, 再求给定区间最值即可.

【详解】  $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ , 当  $x \in [0, \pi]$  时,  $x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ ,

当  $x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$  时, 即  $x = \frac{5\pi}{6}$  时,  $f(x)_{\max} = 2$ .

故答案为: 2

13. 已知  $a > 1$ ,  $\frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_a 4} = -\frac{5}{2}$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

【答案】 64

【解析】

【分析】 将  $\log_8 a, \log_a 4$  利用换底公式转化成  $\log_2 a$  来表示即可求解.

【详解】 由题  $\frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_a 4} = \frac{3}{\log_2 a} - \frac{1}{2} \log_2 a = -\frac{5}{2}$ , 整理得  $(\log_2 a)^2 - 5 \log_2 a - 6 = 0$ ,

$\Rightarrow \log_2 a = -1$  或  $\log_2 a = 6$ , 又  $a > 1$ ,

所以  $\log_2 a = 6 = \log_2 2^6$ , 故  $a = 2^6 = 64$

故答案为: 64.

14. 曲线  $y = x^3 - 3x$  与  $y = -(x-1)^2 + a$  在  $(0, +\infty)$  上有两个不同的交点, 则  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

【答案】  $(-2, 1)$

【解析】

【分析】 将函数转化为方程, 令  $x^3 - 3x = -(x-1)^2 + a$ , 分离参数  $a$ , 构造新函数

$g(x) = x^3 + x^2 - 5x + 1$ , 结合导数求得  $g(x)$  单调区间, 画出大致图形数形结合即可求解.

【详解】 令  $x^3 - 3x = -(x-1)^2 + a$ , 即  $a = x^3 + x^2 - 5x + 1$ , 令  $g(x) = x^3 + x^2 - 5x + 1 (x > 0)$ ,

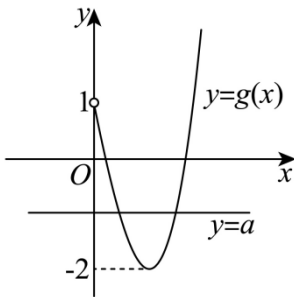
则  $g'(x) = 3x^2 + 2x - 5 = (3x+5)(x-1)$ , 令  $g'(x) = 0 (x > 0)$  得  $x = 1$ ,

当  $x \in (0, 1)$  时,  $g'(x) < 0$ ,  $g(x)$  单调递减,

当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $g'(x) > 0$ ,  $g(x)$  单调递增,  $g(0) = 1, g(1) = -2$ ,

因为曲线  $y = x^3 - 3x$  与  $y = -(x-1)^2 + a$  在  $(0, +\infty)$  上有两个不同的交点,

所以等价于  $y = a$  与  $g(x)$  有两个交点, 所以  $a \in (-2, 1)$ .



故答案为:  $(-2, 1)$

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤. 第 17 题第 21 题为必考题, 每个考题考生必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

15. 已知等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $2S_n = 3a_{n+1} - 3$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 求数列  $\{S_n\}$  的通项公式.

【答案】 (1)  $a_n = \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$

$$(2) \frac{3}{2} \left( \frac{5}{3} \right)^n - \frac{3}{2}$$

【解析】

【分析】(1) 利用错位法可求公比，再求出首项后可求通项；

(2) 利用等比数列的求和公式可求  $S_n$ 。

【小问 1 详解】

因为  $2S_n = 3a_{n+1} - 3$ , 故  $2S_{n-1} = 3a_n - 3$ ,

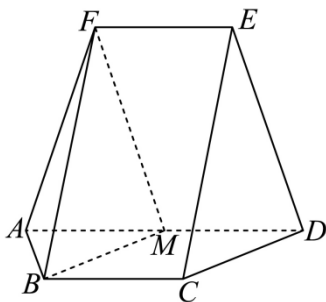
所以  $2a_n = 3a_{n+1} - 3a_n$  ( $n \geq 2$ ) 即  $5a_n = 3a_{n+1}$  故等比数列的公比为  $q = \frac{5}{3}$ ,

故  $2a_1 = 3a_2 - 3 = 3a_1 \times \frac{5}{3} - 3 = 5a_1 - 3$ , 故  $a_1 = 1$ , 故  $a_n = \left( \frac{5}{3} \right)^{n-1}$ 。

【小问 2 详解】

由等比数列求和公式得  $S_n = \frac{1 \times \left[ 1 - \left( \frac{5}{3} \right)^n \right]}{1 - \frac{5}{3}} = \frac{3}{2} \left( \frac{5}{3} \right)^n - \frac{3}{2}$ 。

16. 如图，在以  $A, B, C, D, E, F$  为顶点的五面体中，四边形  $ABCD$  与四边形  $ADEF$  均为等腰梯形， $BC \parallel AD, EF \parallel AD$ ,  $AD = 4, AB = BC = EF = 2$ ,  $ED = \sqrt{10}, FB = 2\sqrt{3}$ ,  $M$  为  $AD$  的中点。



(1) 证明:  $BM \parallel$  平面  $CDE$ ;

(2) 求点  $M$  到  $ABF$  的距离。

【答案】(1) 证明见详解;

$$(2) \frac{6\sqrt{13}}{13}$$

【解析】

【分析】(1) 结合已知易证四边形  $BCDM$  为平行四边形，可证  $BM \parallel CD$ ，进而得证；

(2) 作  $FO \perp AD$ ，连接  $OB$ ，易证  $OB, OD, OF$  三垂直，结合等体积法  $V_{M-ABF} = V_{F-ABM}$  即可求解。

**【小问 1 详解】**

因为  $BC \parallel AD, BC = 2, AD = 4, M$  为  $AD$  的中点，所以  $BC \parallel MD, BC = MD$ ，

四边形  $BCDM$  为平行四边形，所以  $BM \parallel CD$ ，

又因为  $BM \not\subset$  平面  $CDE$ ， $CD \subset$  平面  $CDE$ ，所以  $BM \parallel$  平面  $CDE$ ；

**【小问 2 详解】**

如图所示，作  $BO \perp AD$  交  $AD$  于  $O$ ，连接  $OF$ ，因为四边形  $ABCD$  为等腰梯形， $BC \parallel AD, AD = 4$ ，

$AB = BC = 2$ ，所以  $CD = 2$ ，

结合 (1)  $BCDM$  为平行四边形，可得  $BM = CD = 2$ ，

又  $AM = 2$ ，所以  $\triangle ABM$  为等边三角形， $O$  为  $AM$  中点，所以  $OB = \sqrt{3}$ ，

又因为四边形  $ADEF$  为等腰梯形， $M$  为  $AD$  中点，所以  $EF = MD, EF \parallel MD$ ，

四边形  $EFMD$  为平行四边形， $FM = ED = AF$ ，所以  $\triangle AFM$  为等腰三角形，

$\triangle ABM$  与  $\triangle AFM$  底边上中点  $O$  重合， $OF \perp AM$ ， $OF = \sqrt{AF^2 - AO^2} = 3$ ，

因为  $OB^2 + OF^2 = BF^2$ ，所以  $OB \perp OF$ ，所以  $OB, OD, OF$  互相垂直，

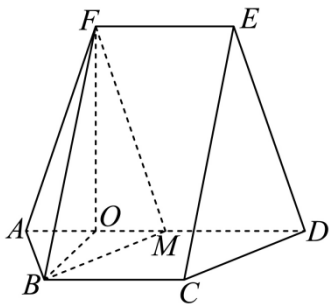
由等体积法可得  $V_{M-ABF} = V_{F-ABM}$ ， $V_{F-ABM} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABM} \cdot FO = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 \cdot 3 = \sqrt{3}$ ，

$$\cos \angle FAB = \frac{FA^2 + AB^2 - FB^2}{2FA \cdot AB} = \frac{(\sqrt{10})^2 + 2^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \cdot \sqrt{10} \cdot 2} = \frac{1}{2\sqrt{10}}, \sin \angle FAB = \frac{\sqrt{39}}{2\sqrt{10}},$$

$$S_{\triangle FAB} = \frac{1}{2} FA \cdot AB \cdot \sin \angle FAB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{39}}{2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{39}}{2},$$

设点  $M$  到  $FAB$  的距离为  $d$ ，则  $V_{M-FAB} = V_{F-ABM} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle FAB} \cdot d = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{39}}{2} \cdot d = \sqrt{3}$ ，

$$\text{解得 } d = \frac{6\sqrt{13}}{13}, \text{ 即点 } M \text{ 到 } ABF \text{ 的距离为 } \frac{6\sqrt{13}}{13}.$$



17. 已知函数  $f(x) = a(x-1) - \ln x + 1$ .

(1) 求  $f(x)$  的单调区间;

(2) 若  $a \leq 2$  时, 证明: 当  $x > 1$  时,  $f(x) < e^{x-1}$  恒成立.

**【答案】** (1) 见解析 (2) 见解析

**【解析】**

**【分析】** (1) 求导, 含参分类讨论得出导函数的符号, 从而得出原函数的单调性;

(2) 先根据题设条件将问题可转化成证明当  $x > 1$  时,  $e^{x-1} - 2x + 1 + \ln x > 0$  即可.

**【小问 1 详解】**

$$f(x) \text{ 定义域为 } (0, +\infty), f'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax-1}{x}$$

当  $a \leq 0$  时,  $f'(x) = \frac{ax-1}{x} < 0$ , 故  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减;

当  $a > 0$  时,  $x \in \left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增,

当  $x \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减.

综上所述, 当  $a \leq 0$  时,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减;

$a > 0$  时,  $f(x)$  在  $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$  上单调递增, 在  $\left(0, \frac{1}{a}\right)$  上单调递减.

**【小问 2 详解】**

$a \leq 2$ , 且  $x > 1$  时,  $e^{x-1} - f(x) = e^{x-1} - a(x-1) + \ln x - 1 \geq e^{x-1} - 2x + 1 + \ln x$ ,

令  $g(x) = e^{x-1} - 2x + 1 + \ln x (x > 1)$ , 下证  $g(x) > 0$  即可.

$$g'(x) = e^{x-1} - 2 + \frac{1}{x}, \text{ 再令 } h(x) = g'(x), \text{ 则 } h'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x^2},$$

显然  $h'(x)$  在  $(1, +\infty)$  上递增, 则  $h'(x) > h'(1) = e^0 - 1 = 0$ ,

即  $g'(x) = h(x)$  在  $(1, +\infty)$  上递增,

故  $g'(x) > g'(1) = e^0 - 2 + 1 = 0$ , 即  $g(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增,

故  $g(x) > g(1) = e^0 - 2 + 1 + \ln 1 = 0$ , 问题得证

18. 设椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点为  $F$ , 点  $M\left(1, \frac{3}{2}\right)$  在  $C$  上, 且  $MF \perp x$  轴.

(1) 求  $C$  的方程;

(2) 过点  $P(4, 0)$  的直线与  $C$  交于  $A, B$  两点,  $N$  为线段  $FP$  的中点, 直线  $NB$  交直线  $MF$  于点  $Q$ , 证明:  $AQ \perp y$  轴.

**【答案】** (1)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2) 证明见解析

**【解析】**

**【分析】** (1) 设  $F(c, 0)$ , 根据  $M$  的坐标及  $MF \perp x$  轴可求基本量, 故可求椭圆方程.

(2) 设  $AB: y = k(x - 4)$ ,  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , 联立直线方程和椭圆方程, 用  $A, B$  的坐标表示  $y_1 - y_Q$ , 结合韦达定理化简前者可得  $y_1 - y_Q = 0$ , 故可证  $AQ \perp y$  轴.

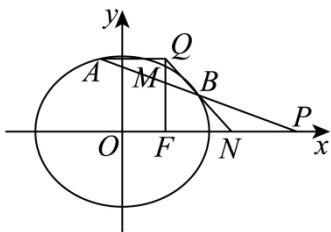
**【小问 1 详解】**

设  $F(c, 0)$ , 由题设有  $c = 1$  且  $\frac{b^2}{a} = \frac{3}{2}$ , 故  $\frac{a^2 - 1}{a} = \frac{3}{2}$ , 故  $a = 2$ , 故  $b = \sqrt{3}$ ,

故椭圆方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ .

**【小问 2 详解】**

直线  $AB$  的斜率必定存在, 设  $AB: y = k(x - 4)$ ,  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,



由  $\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 12 \\ y = k(x - 4) \end{cases}$  可得  $(3 + 4k^2)x^2 - 32k^2x + 64k^2 - 12 = 0$ ,

故  $\Delta = 1024k^4 - 4(3+4k^2)(64k^2-12) > 0$ , 故  $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$ ,

$$\text{又 } x_1 + x_2 = \frac{32k^2}{3+4k^2}, x_1x_2 = \frac{64k^2-12}{3+4k^2},$$

$$\text{而 } N\left(\frac{5}{2}, 0\right), \text{ 故直线 } BN: y = \frac{y_2}{x_2 - \frac{5}{2}}\left(x - \frac{5}{2}\right), \text{ 故 } y_Q = \frac{-\frac{3}{2}y_2}{x_2 - \frac{5}{2}} = \frac{-3y_2}{2x_2 - 5},$$

$$\text{所以 } y_1 - y_Q = y_1 + \frac{3y_2}{2x_2 - 5} = \frac{y_1 \times (2x_2 - 5) + 3y_2}{2x_2 - 5}$$

$$= \frac{k(x_1 - 4) \times (2x_2 - 5) + 3k(x_2 - 4)}{2x_2 - 5}$$

$$= k \frac{2x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 8}{2x_2 - 5} = k \frac{2 \times \frac{64k^2 - 12}{3 + 4k^2} - 5 \times \frac{32k^2}{3 + 4k^2} + 8}{2x_2 - 5}$$

$$= k \frac{128k^2 - 24 - 160k^2 + 24 + 32k^2}{3 + 4k^2} = 0,$$

故  $y_1 = y_Q$ , 即  $AQ \perp y$  轴.

**【点睛】**方法点睛: 利用韦达定理法解决直线与圆锥曲线相交问题的基本步骤如下:

- (1) 设直线方程, 设交点坐标为  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ;
- (2) 联立直线与圆锥曲线的方程, 得到关于  $x$  (或  $y$ ) 的一元二次方程, 注意  $\Delta$  的判断;
- (3) 列出韦达定理;
- (4) 将所求问题或题中的关系转化为  $x_1 + x_2$ 、 $x_1x_2$  (或  $y_1 + y_2$ 、 $y_1y_2$ ) 的形式;
- (5) 代入韦达定理求解.

**(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 并用 2B 铅笔将所选题号涂黑, 多涂、错涂、漏涂均不给分, 如果多做, 则按所做的第一题计分.**

19. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 以坐标原点  $O$  为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho = \rho \cos \theta + 1$ .

- (1) 写出  $C$  的直角坐标方程;

(2) 设直线  $l: \begin{cases} x=t \\ y=t+a \end{cases}$  ( $t$  为参数), 若  $C$  与  $l$  相交于  $A, B$  两点, 若  $|AB|=2$ , 求  $a$  的值.

**【答案】** (1)  $y^2 = 2x + 1$

(2)  $a = \frac{3}{4}$

**【解析】**

**【分析】** (1) 根据  $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \rho \cos \theta = x \end{cases}$  可得  $C$  的直角方程.

(2) 将直线的新的参数方程代入  $C$  的直角方程,

法 1: 结合参数  $s$  的几何意义可得关于  $a$  的方程, 从而可求参数  $a$  的值;

法 2: 将直线的直角方程与曲线的直角方程联立, 结合弦长公式可求  $a$  的值.

**【小问 1 详解】**

由  $\rho = \rho \cos \theta + 1$ , 将  $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \rho \cos \theta = x \end{cases}$  代入  $\rho = \rho \cos \theta + 1$ ,

故可得  $\sqrt{x^2 + y^2} = x + 1$ , 两边平方后可得曲线的直角坐标方程为  $y^2 = 2x + 1$ .

**【小问 2 详解】**

对于直线  $l$  的参数方程消去参数  $t$ , 得直线的普通方程为  $y = x + a$ .

法 1: 直线  $l$  的斜率为 1, 故倾斜角为  $\frac{\pi}{4}$ ,

故直线的参数方程可设为  $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}s \\ y = a + \frac{\sqrt{2}}{2}s \end{cases}, s \in \mathbf{R}$ .

将其代入  $y^2 = 2x + 1$  中得  $s^2 + 2\sqrt{2}(a-1)s + 2(a^2 - 1) = 0$

设  $A, B$  两点对应的参数分别为  $s_1, s_2$ , 则  $s_1 + s_2 = -2\sqrt{2}(a-1), s_1s_2 = 2(a^2 - 1)$ ,

且  $\Delta = 8(a-1)^2 - 8(a^2 - 1) = 16 - 16a > 0$ , 故  $a < 1$ ,

$\therefore |AB| = |s_1 - s_2| = \sqrt{(s_1 + s_2)^2 - 4s_1s_2} = \sqrt{8(a-1)^2 - 8(a^2 - 1)} = 2$ , 解得  $a = \frac{3}{4}$ .

法 2: 联立  $\begin{cases} y = x + a \\ y^2 = 2x + 1 \end{cases}$ , 得  $x^2 + (2a-2)x + a^2 - 1 = 0$ ,

$\Delta = (2a-2)^2 - 4(a^2 - 1) = -8a + 8 > 0$ , 解得  $a < 1$ ,

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \therefore x_1 + x_2 = 2 - 2a, x_1 x_2 = a^2 - 1,$

$$\text{则 } |AB| = \sqrt{1+1^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(2-2a)^2 - 4(a^2-1)} = 2,$$

$$\text{解得 } a = \frac{3}{4}$$

20. 实数  $a, b$  满足  $a + b \geq 3.$

(1) 证明:  $2a^2 + 2b^2 > a + b;$

(2) 证明:  $|a - 2b^2| + |b - 2a^2| \geq 6.$

**【答案】** (1) 证明见解析

(2) 证明见解析

**【解析】**

**【分析】** (1) 直接利用  $2a^2 + 2b^2 \geq (a+b)^2$  即可证明.

(2) 根据绝对值不等式并结合 (1) 中结论即可证明.

**【小问 1 详解】**

$$\text{因为 } 2a^2 + 2b^2 - (a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0,$$

$$\text{当 } a = b \text{ 时等号成立, 则 } 2a^2 + 2b^2 \geq (a+b)^2,$$

$$\text{因为 } a + b \geq 3, \text{ 所以 } 2a^2 + 2b^2 \geq (a+b)^2 > a + b;$$

**【小问 2 详解】**

$$|a - 2b^2| + |b - 2a^2| \geq |a - 2b^2 + b - 2a^2| = |2a^2 + 2b^2 - (a+b)|$$

$$= 2a^2 + 2b^2 - (a+b) \geq (a+b)^2 - (a+b) = (a+b)(a+b-1) \geq 3 \times 2 = 6$$