2014年普通高等学校招生全国统一考试（重庆卷）

数学试题（文史类）

一.选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分.在每小题给出的四个备选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 实部为-2，虚部为1 的复数所对应的点位于复平面的（　　）

$A.$ 第一象限　　　　$B.$ 第二象限

$C.$ 第三象限　　　　$D.$ 第四象限

【答案】B

【解析】

试题分析：实部为-2，虚部为1的复数在复平面对应的点坐标为$(-2,1)$，位于第二象限，故选B.

考点：复平面.

2. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=2, a_3+a_5=10$，则$a_7=$（　　）

$A.5$　　$B.8$　　$C.10$　　$D.14$

【答案】B

【解析】

试题分析：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由题设知，$2a_1+6d=10$，所以，$d=\dfrac{10-2a_1}{6}=1$

所以，$a_7=a_1+6d=2+6=8$．故选B.

考点：等差数列通项公式.

3. 某中学有高中生3500人，初中生1500人，为了解学生的学习情况，用分层抽样的方法从该校学生中抽取一个容量为n的样本，已知从高中生中抽取70人，则n为（　　）

$A.100$　　$B.150$　　$C.200$　　$D.250$

【答案】A

【解析】

试题分析：$n=(3500+1500)\times\dfrac{70}{3500}=100$．故选A.

考点：分层抽样.

4. 下列函数为偶函数的是（　　）

$A.f(x)=x-1$　　$B.f(x)=x^2+x$　　$C.f(x)=2^x-2^{-x}$　　$D.f(x)=2^x+2^{-x}$

【答案】D

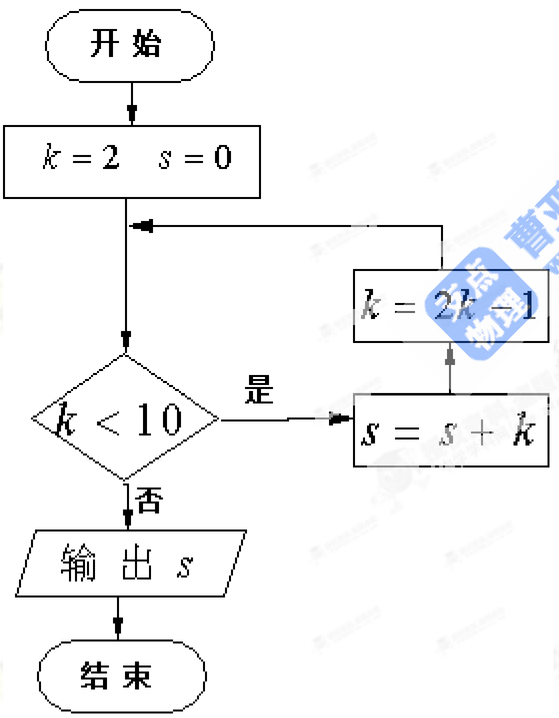
【解析】

试题分析：因为 $f(x)=x-1$ 不是奇函数也不是偶函数，所以选项 A 不正确；因为 $f(x)=x^2+x$ 不是奇函数也不是偶函数，所以选项 B 不正确；由 $f(x)=2^x-2^{-x}$，$f(-x)=2^{-x}-2^x=-(2^x-2^{-x})=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数，选项 C 不正确. 由 $f(x)=2^x+2^{-x}$，$f(-x)=2^{-x}+2^x=2^x+2^{-x}=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，选项 D 正确. 故选 D.

考点：函数奇偶性的判断.

5. 执行如题（5）图所示的程序框图，则输出 s 的值为（　　）

$A.10$　　$B.17$　　$C.19$　　$D.36$



题（5）图

【答案】C

【解析】

试题分析：$k=2,s=0$；$k<10$ 成立，运行第一次，$s=2,k=3$；$k<10$ 成立，运行第二次，$s=5,k=5$ $k<10$ 成立，运行第三次，$s=10,k=9$ $k<10$ 成立，运行第四次，$s=19,k=17$ $k<10$ 不成立，输出

$s=19$

故选 C.

考点：循环结构.

6. 已知命题 p:对任意 $x\in R$，总有 $|x|\geq 0$； $q: x=1$ 是方程 $x+2=0$ 的根,则下列命题为真命题的是(　　)

$A.p\wedge\neg q$　　　　$B.\neg p\wedge q$　　　　$C.\neg p\wedge\neg q$　　　　$D.p\wedge q$

【答案】A

【解析】

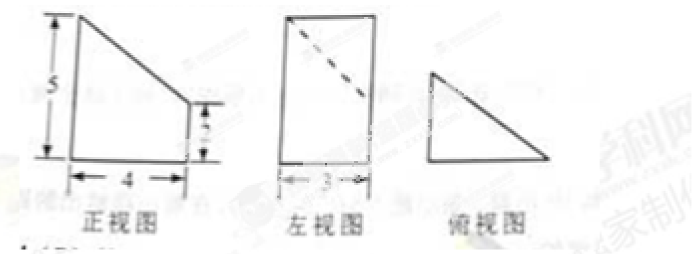
试题分析：因为命题 p:“对任意 $x\in R$，总有 $|x|\geq 0$”为真命题；

命题 q：“$x=1$ 是方程 $x+2=0$ 的根”是学科网假命题，所以 $\neg q$ 是真命题，所以 $p\wedge\neg q$ 为真命题,故选A.

考点：1、命题；2、充要条件.

7.

某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为(　　)



A.12　　　　B.18　　　　C.24　　　　D.30

【答案】C

【解析】

试题分析：由三视图可知该几何体是一个底面为直角三角形的直三棱柱的一部分，其直观图如上图所示，

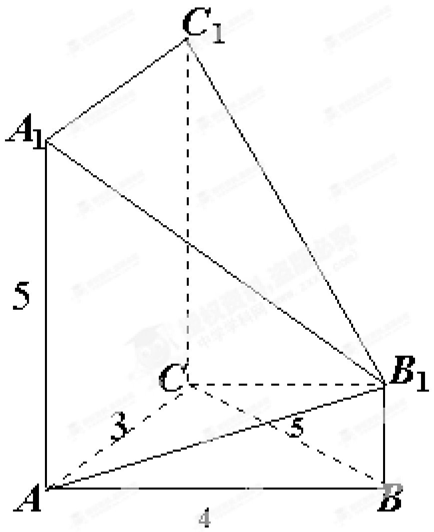
其中 $\angle BAC=90^{\circ}$，侧面 ACC_1A_1 是矩形，其余两个侧面是直角梯形，由于 $AC\perp AB$，

平面 $ABC\perp$ 平面 ACC_1A_1，所以 $AB\perp$ 平面 ACC_1A_1，

所以几何体的体积为：$V=V_{三棱锥B_1-ABC}+V_{四棱锥B_1-ACC_1A_1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times4\times2+\frac{1}{3}\times3\times5\times4=24$

故选 C.

考点：1、空间几何体的三视图；2、空间几何体的体积.



8.设 F_1，F_2 分别为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，双曲线上存在一点 P 使得 $(|PF_1|-|PF_2|)^2=b^2-3ab$，则该双曲线的离心率为(　　)

A. $\sqrt{2}$　　　　B. $\sqrt{15}$　　　　C.4　　　　D. $\sqrt{17}$

【答案】D

【解析】

试题分析：由双曲纯的定义知：$\left||PF_1|-|PF_2|\right|=2a$，又 $\left(|PF_1|-|PF_2|\right)^2=b^2-3ab$，所以，$4a^2=b^2-3ab$，

即 $\left(\dfrac{b}{a}\right)^2-3\cdot\dfrac{b}{a}-4=0$，解之得：$\dfrac{b}{a}=-1$（舍去），$\dfrac{b}{a}=4$，所以，$e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2}=1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2=1+4^2=17$，

$e=\sqrt{17}$ 故选 D.

考点：双曲的定义，标准方程及其简单几何性质.

9. 若 $\log_4(3a+4b)=\log_2\sqrt{ab}$，则 $a+b$ 的最小值是(　　)

A. $6+2\sqrt{3}$　　　　B. $7+2\sqrt{3}$　　　　C. $6+4\sqrt{3}$　　　　D. $7+4\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】

试题分析：由题意，$ab>0$，且 $3a+4b>0$，所以 $a>0,b>0$.

又 $\log_4(3a+4b)=\log_2\sqrt{ab}$，所以，$3a+4b=ab$，所以 $\dfrac{4}{a}+\dfrac{3}{b}=1$.

所以$a+b=(a+b)\left(\dfrac{4}{a}+\dfrac{3}{b}\right)=7+\dfrac{4b}{a}+\dfrac{3a}{b}\geq 7+2\sqrt{\dfrac{4b}{a}\cdot\dfrac{3a}{b}}=7+4\sqrt{3}$，

当且仅当$\dfrac{4b}{a}=\dfrac{3a}{b}$，即$a=4+2\sqrt{3}$，$b=3+2\sqrt{3}$时，等号成立.故选 D.

10. 考点：1、对数的运算；2、基本不等式.

11.已知函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}-3, & x\in(-1,0]\\ x, & x\in(0,1]\end{cases}$,且$g(x)=f(x)-mx-m$在（$-1,1]$内有且仅有两个不同的零点，则实数$m$的取值范围是(　　)

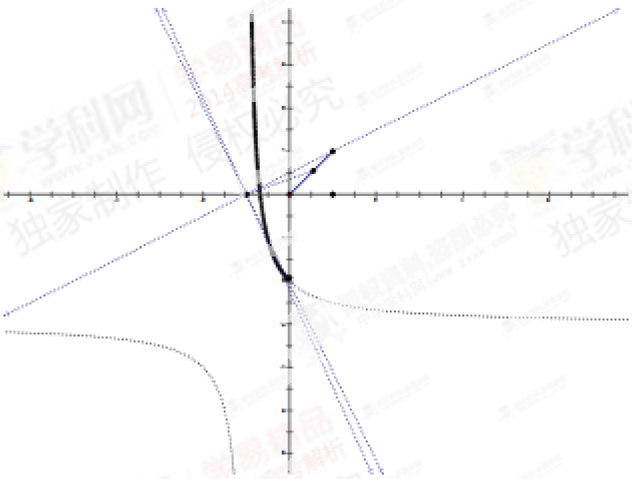
A. $(-\dfrac{9}{4},-2]\cup(0,\dfrac{1}{2}]$　　　　B. $(-\dfrac{11}{4},-2]\cup(0,\dfrac{1}{2}]$

C. $(-\dfrac{9}{4},-2]\cup(0,\dfrac{2}{3}]$　　　　D. $(-\dfrac{11}{4},-2]\cup(0,\dfrac{2}{3}]$

【答案】A

【解析】

试题分析：



令$h(x)=mx+m$，则问题转化为$f(x)$与$h(x)$的图象在$(-1,1]$内有且仅有两个交点；$f(x)$是一个分段函数，$h(x)$的图象是过定点$(-1,0)$的直线发上图所学科网示，易求当直线与曲线在第三象限相切时，$m=-\dfrac{9}{4}$由图可知，$-\dfrac{9}{4}<m\leq -2$或$0<m\leq\dfrac{1}{2}$，故选 A.

考点：1、分段函数；2、函数的零点；3、数形结合的思想.

二、填空题：本在题共 5 小题，第小题 5 分，共 25 分.把答案填写在答题卡相应位置上.

11. 已知集合 $A=\{3,4,5,12,13\}, B=\{2,3,5,8,13\}$，则 $A\cap B=$______.

【答案】$\{3,5,13\}$

【解析】

试题分析：$A\cap B=\{3,4,5,12,13\}\cap\{2,3,5,8,13\}=\{3,5,13\}$

所以答案应填 $\{3,5,13\}$.

考点：集合的运算.

12. 已知向量 $\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为60°，且$\vec{a}=(-2,-6), |\vec{b}|=\sqrt{10}$,则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$________.

【答案】10

【解析】

试题分析：$\vec{a}=(-2,-6), \therefore |\vec{a}|=\sqrt{(-2)^2+(-6)^2}=2\sqrt{10}$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 60^\circ=2\sqrt{10}\times\sqrt{10}\times\frac{1}{2}=10$，所以答案应填：10.

考点：1、平面向量的坐标运算；2、向量的模；3、向量的数量积.

13. 将函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0, -\frac{\pi}{2}\le\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 图像上每一点的横坐标缩短为原来的一半，纵坐标不变，再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到 $y=\sin x$ 的图像，则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=$______.

【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

试题分析：

由题意，$y=\sin x \xrightarrow[\frac{\pi}{6}\text{个单位}]{\text{向左平移}} y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{每个点的横坐标都伸长到原来的2倍}} f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$

所以 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以答案应填：$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

考点：1、三角函数的图象变换；2、特殊角的三角函数值.

14. 已知直线 $x-y+a=0$ 与圆心为 C 的圆 $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 相交于 A，B 两点，且

$AC\perp BC$，则实数a的值为________.

【答案】0或6

【解析】

试题分析：圆C的标准方程为：$(x+1)^2+(y-2)^2=9$，所以圆C的圆心在$(-1,2)$，半径$r=3$

又直线$x-y+a=0$与圆C交于A,B两点，且$AC\perp BC$，所以圆心C到直线$x-y+a=0$的距离$d=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 所以，$\frac{|-1-2+a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，整理得：$|a-3|=3$解得：$a=0$或$a=6$.

考点：1、圆的标准方程；2、直线与圆的位置关系；3、点到直线的距离公式.

15. 某校早上8：00开始上课，假设该校学生小张与小王在早上7:30—7:50之间到校，且每人在该时间段的任何时刻到校是等可能的，则小张比小王至少早5分钟到校的概率为_____（用数字作答）

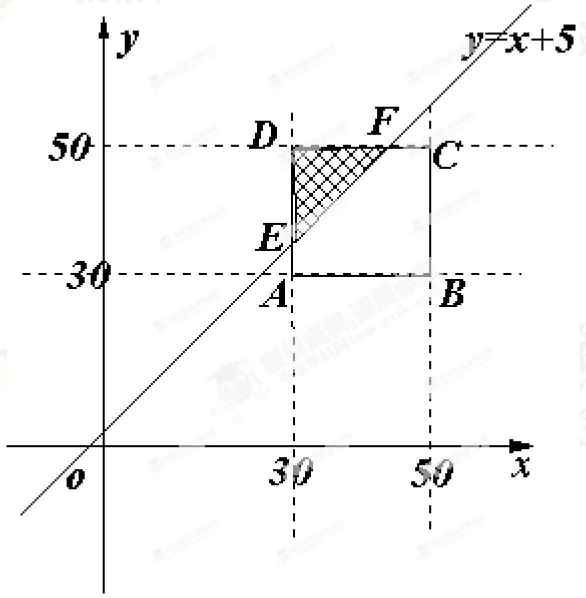
【答案】$\frac{9}{32}$

【解析】

试题分析：用x表示小张到校的时间，$30\le x\le 50$，用y表示小王到校的时间，$30\le y\le 50$

则所有可能的结果对应直角坐标平面内的正方形区域$ABCD$

记“小张比小王至少早到5分钟”为事件M，则M所对区域为图中的阴影部分ΔDEF



所以 $P(A)=\frac{S_{\Delta DEF}}{S_{正方形ABCD}}=\frac{\frac{1}{2}\times 15\times 15}{20\times 20}=\frac{9}{32}$

所以答案应填：$\frac{9}{32}$.

考点：几何概型.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16. （本小题满分 13 分.（I）小问 6 分，（II）小问 7 分）

已知 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公差为 2 的等差数列，S_n 表示 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

（I）求 a_n 及 S_n；

（II）设 $\{b_n\}$ 是首项为 2 的等比数列，公比 q 满足 $q^2-(a_4+1)q+S_4=0$，求 $\{b_n\}$ 的通项公式及其前 n 项和 T_n.

【答案】（I）$a_n=2n-1, S_n=n^2$；（II）$b_n=2^{2n-1}, T_n=\frac{2}{3}\left(4^n-1\right)$.

【解析】

试题分析：（I）已知等差数列的首项和公差，可直接利有公式 $a_n=a_1+(n-1)d, S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$ 求解.

（II）利用（I）的结学科网果求出 a_4, S_4，解方程 $q^2-(a_4+1)q+S_4=0$ 得出等比数 $\{b_n\}$ 列的公比 q 的值，

从而可直接由公式 $b_n=b_1\cdot q^{n-1}, T_n=\begin{cases} nb_1 & (q=1) \\ \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} & (q\neq 1)\end{cases}$ 求 $\{b_n\}$ 的通项公式及其前 n 项和 T_n.

试题解析：

解：（I）因为 $\{a_n\}$ 是首项 $a_1=1$，公差 $d=2$ 的等差数列，所以

$a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$

故 $S_n=1+3+\cdots+(2n-1)=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$

（II）由（I）得，$a_4=7, S_4=16$.因为 $q^2-(a_4+1)q+S_4=0$，即 $q^2-8q+16=0$

所以 $(q-4)^2=0$，从而 $q=4$.

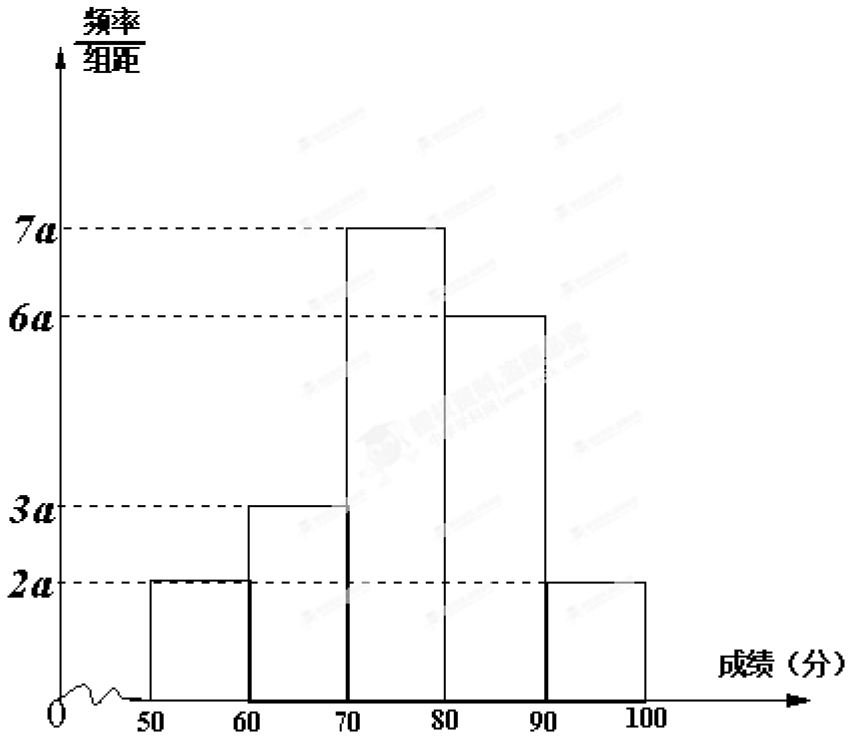
又因 $b_1=2$，是 $\{b_n\}$ 公比 $q=4$ 的等比数列，所以 $b_n=b_1q^{n-1}=2\cdot4^{n-1}=2^{2n-1}$

从而 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=\dfrac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=\dfrac{2}{3}\left(4^n-1\right)$

考点：1、等差数列的通项公式与前 n 项和公式；2、等比数列的通项公式与前 n 项和公式

17. （本小题满分 13 分.（I）小问 4 分，（II）小问 4 分，（III）小问 5 分）

20 名学生某次数学考试成绩（单位：分）的频数分布直方图如下：



（I）求频率分布直方图中 a 的值；

（II）分别球出成绩落在 $[50,60)$ 与 $[60,70)$ 中的学生人数；

（III）从成绩在 $[50,70)$ 的学生中人选 2 人，求此 2 人的成绩都在 $[60,70)$ 中的概率.

【答案】（I） $a=0.005$；（II）2,3；（III） $\dfrac{3}{10}$.

【解析】

试题分析：（I）由频率分布直方图的意义可知，图中五个小长方形的面积之和为 1，由此列方程即可求得.

（II）根据（I）的结果，分别求出成绩落在 $[50,60)$ 与 $[60,70)$ 的频率值，分别乘以学生总数即得相应的频

数；

（III）由（II）知，成绩落在$[50, 60)$中有 2 人，用A_1, A_2表示，成绩落学科网在$[60, 70)$中的有 3 人，分别用B_1、B_2、B_3表示，从五人中任取两人，写出所有 10 种可能的结果，可用古典概型求此 2 人的成绩都在$[60, 70)$中的概率.

试题解析：

解：（I）据直方图知组距=10，由

$(2a+3a+6a+7a+2a)\times 10=1$，解得$a=\frac{1}{200}=0.005$

（II）成绩落在$[50,60)$中的学生人数为$2\times 0.005\times 10\times 20=2$

成绩落在$[60, 70)$中的学生人数为$3\times 0.005\times 10\times 20=3$

（III）记成绩落在$[50, 60)$中的 2 人为A_1, A_2，成绩落在$[60, 70)$中的 3 人为B_1、B_2、B_3，则从成绩在$[50, 70)$的学生中人选 2 人的基本事件共有 10 个：

$(A_1,A_2),(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_1,B_3),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_2,B_3),(B_1,B_2),(B_1,B_3),(B_2,B_3)$

其中 2 人的成绩都在中的基本事伯有 3 个：$(B_1,B_2),(B_1,B_3),(B_2,B_3)$

故所求概率为$P=\frac{3}{10}$

考点：1、频率分布直方图；2、古典概型.

18.（本小题满分 13 分，（ I ）小问 5 分，（ II ）小问 8 分）

在ΔABC中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且$a+b+c=8$

（ I ）若$a=2,b=\frac{5}{2}$，求$\cos C$的值;

（ II ）若$\sin A\cos^2\frac{B}{2}+\sin B\cos^2\frac{A}{2}=2\sin C$，且$\Delta ABC$的面积$S=\frac{9}{2}\sin C$，求$a$和$b$的值.

【答案】（ I ）$-\frac{1}{5}$；（ II ）$a=3,b=3$.

【解析】

试题分析：（ I ）由$a+b+c=8$及$a=2,b=\frac{5}{2}$可得$c=\frac{7}{2}$，而后由余弦定理可求$\cos C$的值;

（ II ）由降幂公式$\sin A\cos^2\frac{B}{2}+\sin B\cos^2\frac{A}{2}=2\sin C\Rightarrow \sin A\cdot\frac{1+\cos B}{2}+\sin B\cdot\frac{1+\cos A}{2}=2\sin C$

$\Rightarrow \sin A+\sin B=3\sin C\Rightarrow a+b=3c$

又因为 $S=\frac{9}{2}\sin C\Rightarrow\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{9}{2}\sin C\Rightarrow ab=9$，最后解方程组可得 a 和 b 的值.

试题解析：

解：（Ⅰ）由题意可知：$c=8-(a+b)=\frac{7}{2}$

由余弦定理得：$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{2^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2}{2\cdot2\cdot\frac{5}{2}}=-\frac{1}{5}$

（Ⅱ）由 $\sin A\cos^2\frac{B}{2}+\sin B\cos^2\frac{A}{2}=2\sin C$ 可得：$\sin A\cdot\frac{1+\cos B}{2}+\sin B\cdot\frac{1+\cos A}{2}=2\sin C$

化简得 $\sin A+\sin A\cos B+\sin B+\sin B\cos A=4\sin C$

因为 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin(A+B)=\sin C$，所以 $\sin A+\sin B=3\sin C$

由正弦定理可知：$a+b=3c$，又因 $a+b+c=8$，故 $a+b=6$

由于 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{9}{2}\sin C$，所以 $ab=9$，从而 $a^2-6a+9=0$，解得 $a=3,b=3$.

考点：1、两角和与差的三角函数公式及二倍角公式；2、正弦定理与余弦定理.

19.（本小题满分 12 分，（Ⅰ）小问 5 分，（Ⅱ）小问 7 分）

已知函数 $f(x)=\frac{x}{4}+\frac{a}{x}-\ln x-\frac{3}{2}$，其中 $a\in R$，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线垂直于 $y=\frac{1}{2}x$.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值.

【答案】（Ⅰ）$a=\frac{5}{4}$；（Ⅱ）单调递增区间$(5,+\infty)$，单调递减区间$(0,5)$，$f(x)_{极小}=f(5)=-\ln 5$

【解析】

试题分析：（Ⅰ）由$f(x)=\frac{x}{4}+\frac{a}{x}-\ln x-\frac{3}{2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{4}-\frac{a}{x^2}-\frac{1}{x}$，

而曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线垂直于$y=\frac{1}{2}x$，所以$f'(1)=-2$，解方程可得a的值；

（Ⅱ）由（Ⅰ）的结果知$f(x)=\frac{x}{4}+\frac{5}{4x}-\ln x-\frac{3}{2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{4}-\frac{5}{4x^2}-\frac{1}{x}=\frac{x^2-4x-5}{4x^2}$于是可用导函数求$f(x)$的单调区间；

试题解析：

解：（Ⅰ）对$f(x)$求导得$f'(x)=\frac{1}{4}-\frac{a}{x^2}-\frac{1}{x}$，由$f(x)$在点$(1,f(1))$处切线垂直于直线$y=\frac{1}{2}x$知$f'(x)=-\frac{3}{4}-a=-2$，解得$a=\frac{5}{4}$；

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$f(x)=\frac{x}{4}+\frac{5}{4x}-\ln x-\frac{3}{2}$，则$f'(x)=\frac{1}{4}-\frac{5}{4x^2}-\frac{1}{x}=\frac{x^2-4x-5}{4x^2}$，

令$f'(x)=0$，解得$x=-1$或$x=5$.因$x=-1$不在$f(x)$的定义域$(0,+\infty)$内，故舍去.

当$x\in(0,5)$时，$f'(x)<0$，故$f(x)$在$(0,5)$内为减函数；

当$x\in(5,+\infty)$时，$f'(x)>0$，故$f(x)$在$(5,+\infty)$内为增函数；

由此知函数$f(x)$在$x=5$时取得极小值$f(5)=-\ln 5$.

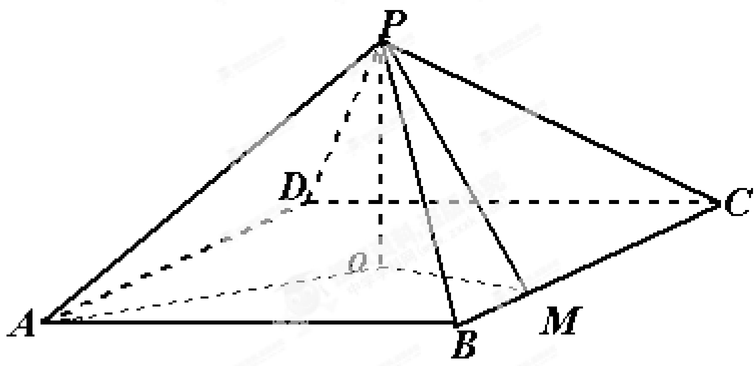
考点：1、导数的求法；2、导数的几何意义；3、导数在研究函数性质中的应用.

20.（本小题满分 12 分，（Ⅰ）小问 4 分，（Ⅱ）小问 8 分）

如题（20）图，四棱锥$P-ABCD$中，底面是以O为中心的菱形，$PO\perp$底面$ABCD$，$AB=2,\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，$M$为$BC$上一点，且$BM=\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）证明：$BC\perp$平面POM；

（Ⅱ）若$MP\perp AP$，求四棱锥$P-ABMO$的体积.



题（20）图

【答案】（Ⅰ）详见解析；（Ⅱ）$\frac{5}{16}$.

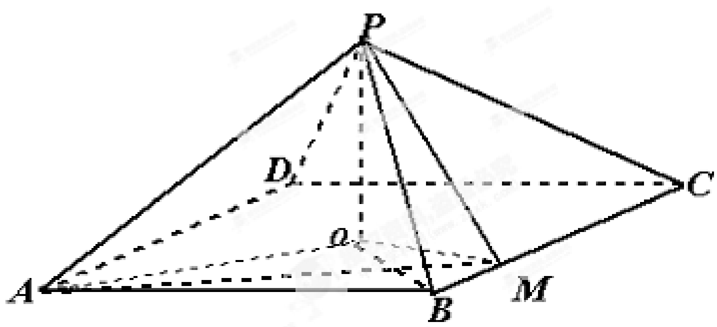
【解析】

试题分析：（Ⅰ）因为$PO\perp$底面$ABCD$，所以有$PO\perp BC$，因此欲证$BC\perp$平面POM，只要证$BC\perp OM$，而这一点可通过连结OB，利用菱形学科网的性质及勾股定理解决.

（Ⅱ）欲求四棱锥$P-ABMO$的体积.，必须先求出$|PO|$,连结AM，设$|PO|=x$，在ΔABM利用余弦定理求出$|AM|$，由三个直角三角形PAO,PMO,PAM，依据勾股定理建立关于x的方程即可.

试题解析：

解：



答（20）图

（Ⅰ）如答（20）图，因 $ABCD$ 为菱形，O 为菱形中心，连结 OB，则 $AO\perp OB$，因 $\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，故

$OB=AB\cdot\sin\angle OAB=2\sin\frac{\pi}{6}=1$

又因为 $BM=\frac{1}{2}$，且 $\angle OBM=\frac{\pi}{3}$，在 ΔOBM 中

$OM^2=OB^2+BM^2-2OB\cdot BM\cdot\cos\angle OBM$

$=1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times1\times\frac{1}{2}\times\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}$

所以 $OB^2=OM^2+BM^2$，故 $OM\perp BM$

又 $PO\perp$ 底面 $ABCD$，所以 $PO\perp BC$，从而 BC 与平面 POM 内两条学科网相交直线 OM，PO 都垂直，

所以 $BC\perp$ 平面 POM.

（Ⅱ）解：由（Ⅰ）可知，$OA=AB\cdot\cos\angle OAB=2\cdot\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$

设 $PO=a$，由 $PO\perp$ 底面 $ABCD$ 知，ΔPOA 为直角三角形，故

$PA^2=PO^2+OA^2=a^2+3$

由 ΔPOM 也是直角三角形，故 $PM^2=PO^2+OM^2=a^2+\frac{3}{4}$

连结 AM，在 ΔABM 中, $AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos\angle ABM$

$$= 2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\cdot 2\cdot \frac{1}{2}\cdot \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{21}{4}$$

由已知 $MP \perp AP$，故 ΔAPM 为直角三角形，则

$$PA^2 + PM^2 = AM^2$$

即 $a^2 + 3 + a^2 + \frac{3}{4} = \frac{21}{4}$，得 $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$， $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ （舍去），即 $PO = \frac{\sqrt{3}}{2}$

此时 $S_{ABMO} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta OMB} = \frac{1}{2}\cdot AO\cdot OB + \frac{1}{2}\cdot BM\cdot OM$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{8}$$

所以四棱锥 $P-ABMO$ 的体积

$$V_{P-ABMO} = \frac{1}{3}\cdot S_{ABMO}\cdot PO = \frac{1}{3}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{16}$$

考点：1、直线与平面垂直的判定与性质；2、空间几何体的体积.3、余弦定理及勾股定理.

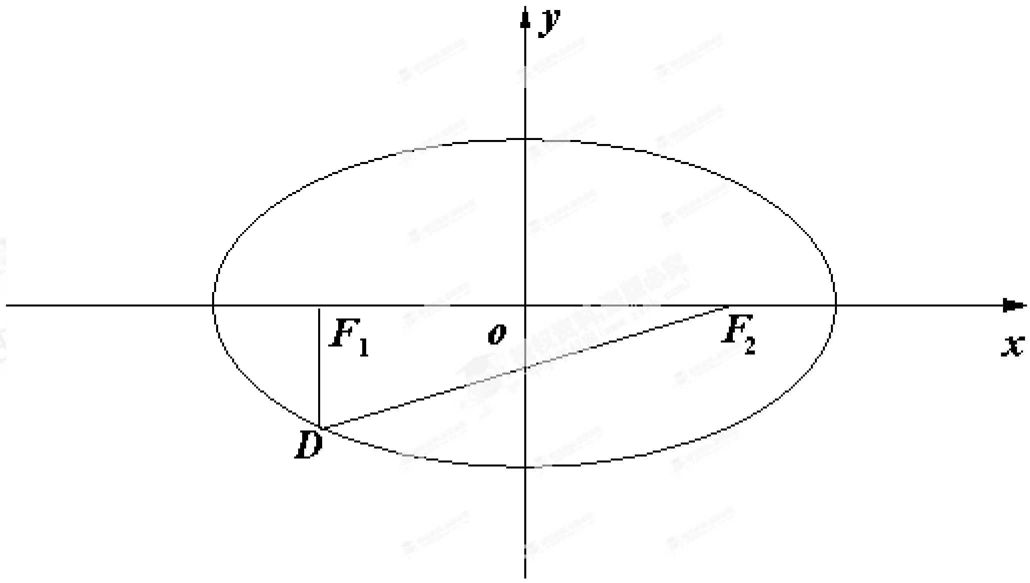
21.（本小题满分 12 分，（Ⅰ）小问 5 分，（Ⅱ）小问 7 分）

如题（21）图，设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2，点 D 在椭圆上，

$DF_1 \perp F_1F_2$，$\frac{|F_1F_2|}{|DF_1|} = 2\sqrt{2}$，$\Delta DF_1F_2$ 的面积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（Ⅰ）求该椭圆的标准方程;

（Ⅱ）是否存在圆心在 y 轴上的圆，使圆在 x 轴的上方与椭圆两个交点，且圆在这两个交点处的两条切线相互垂直并分别过不同的焦点？若存在，求圆的方程，若不存在，请说明理由.



题（21）图

【答案】（Ⅰ）$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$；（Ⅱ）存在满足条件的圆，其方程为 $x^2+\left(y-\dfrac{5}{3}\right)^2=\dfrac{32}{9}$.

【解析】

试题分析：（Ⅰ）由题设知 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$ 其中 $c^2=a^2-b^2$

由 $\dfrac{|F_1F_2|}{|DF_1|}=2\sqrt{2}\Rightarrow|DF_1|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}c$,结合条件 ΔDF_1F_2 的面积为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，可求 c 的值，再利用椭圆的定义和勾股定理即可求得 a,b 的值，从而确定椭圆的标准方程；

（Ⅱ）假设存在圆心在 y 轴上的圆，使圆在 x 轴的学科网上方与椭圆两个交点，且圆在这两个交点处的两条切线相互垂直并分别过不同的焦点；设圆心在 y 轴上的圆与椭圆在 x 轴的上方有两个交点为 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$ 由圆的对称性可知 $x_1=-x_2,y_1=y_2$，利用 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$ 在圆上及 $\overrightarrow{P_1F_1}\cdot\overrightarrow{P_2F_2}=0$ 确定交点的坐标，进而得到圆的方程.

试题解析：

解：（Ⅰ）设 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$，其中 $c^2=a^2-b^2$，

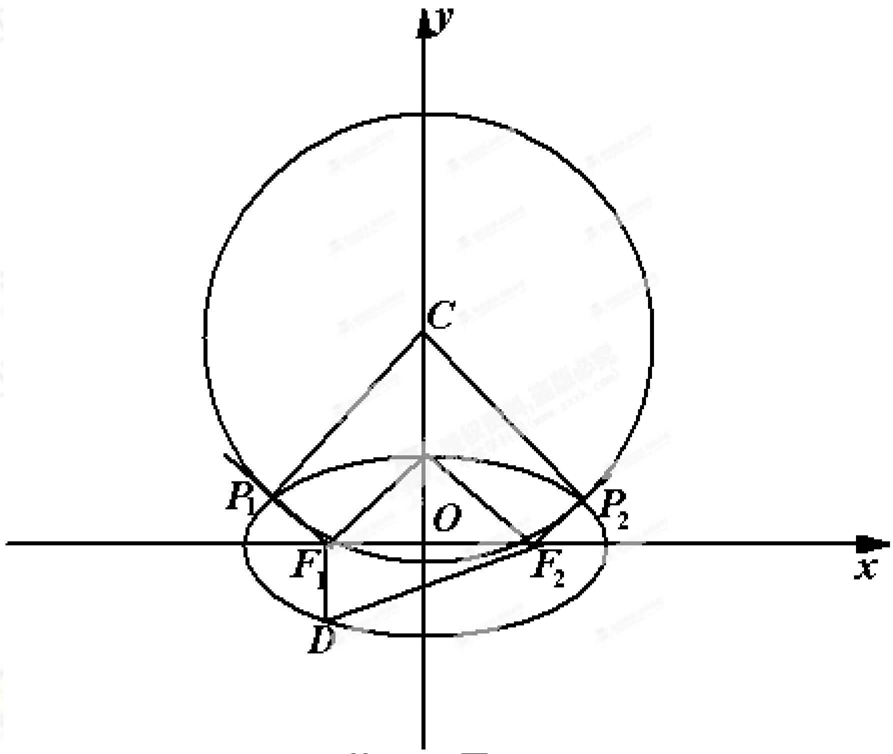
由 $\dfrac{|F_1F_2|}{|DF_1|}=2\sqrt{2}$ 得 $|DF_1|=\dfrac{|F_1F_2|}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}c$

从而 $S_{\Delta DF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|DF_1|\cdot|F_1F_2|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}c^2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 故 $c=1$.

从而$|DF_1|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，由$DF_1\perp F_1F_2$得$|DF_2|^2=|DF_1|^2+|F_1F_2|^2=\frac{9}{2}$，因此$|DF_2|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

所以$2a=|DF_1|+|DF_2|=2\sqrt{2}$，故$a=\sqrt{2},b^2=a^2-c^2=1$

因此，所求椭圆的标准方程为：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$



答（21）图

（Ⅱ）如答（21）图，设圆心在y轴上的圆C与椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$相交，$P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$是两个交点，$y_1>0,y_2>0$，$F_1P_1,F_2P_2$是圆$C$的切线，且$F_1P_1\perp F_2P_2$由圆和椭圆的对称性，易知$x_2=-x_1,y_1=y_2$

$|P_1P_2|=2|x_1|$.，

由（Ⅰ）知$F_1(-1,0),F_2(1,0)$，所以$\overrightarrow{F_1P_1}=(x_1+1,y_1),\overrightarrow{F_2P_2}=(-x_1-1,y_1)$，再由$F_1P_1\perp F_2P_2$得

$-(x_1+1)^2+y_1^2=0$，由椭圆方程得$1-\frac{x_1^2}{2}=(x_1+1)^2$，即$3x_1^2+4x_1=0$，解得$x_1=-\frac{4}{3}$或$x_1=0$.

当$x_1=0$时，P_1,P_2重合，此时题设要求的圆不存在.

当$x_1=-\frac{4}{3}$时，过P_1,P_2分别与F_1P_1,F_2P_2垂直的直线的交点即为圆心C，设$C(0,y_0)$

由$CP_1\perp F_1P_1$,得$\frac{y_1-y_0}{x_1}\cdot\frac{y_1}{x_1+1}=-1$,而$y_1=|x_1+1|=\frac{1}{3}$,故$y_0=\frac{5}{3}$

圆C的半径$|CP_1|=\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

综上，存在满足条件的圆，其方程为：$x^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{32}{9}$

考点：1、椭圆的标准方程；2、圆的标准方程；3、直线与圆的位置关系；4、平面向量数量积的应用.