

绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数 学（文史类）

本试卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟。第 I 卷1至2页，第 II 卷3至5页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利

第 I 卷

注意事项：

1. 每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。
2. 本卷共8小题，每小题5分共40分。

参考公式：

- 如果事件 A, B 互斥，那么 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 。
- 圆柱的体积公式 $V = Sh$ ，其中 S 表示圆柱的底面面积， h 表示圆柱的高
- 棱锥的体积公式 $V = \frac{1}{3}Sh$ ，其中 S 表示棱锥的底面面积， h 表示棱锥的高

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{-1, 1, 2, 3, 5\}$ ， $B = \{2, 3, 4\}$ ， $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 3\}$ ，则 $(A \cap C) \cup B =$

- A. $\{2\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{-1, 2, 3\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$

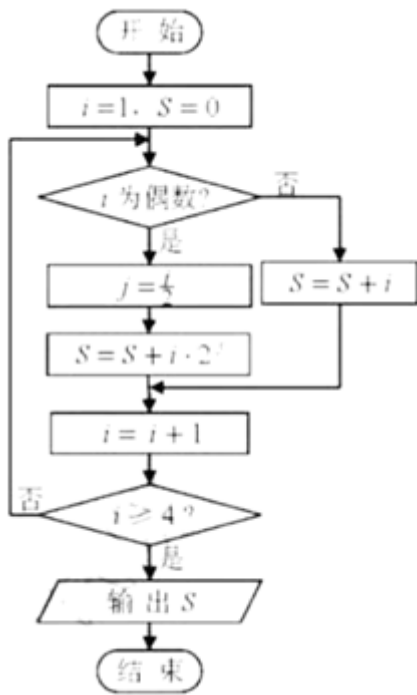
2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0, \\ x - y + 2 \geq 0, \\ x \geq -1, \\ y \geq -1, \end{cases}$ ，则目标函数 $z = -4x + y$ 的最大值为

- A. 2 B. 3 C. 5 D. 6

3. 设 $x \in \mathbb{R}$ ，则“ $0 < x < 5$ ”是“ $|x - 1| < 1$ ”的

- A. 充分而不必要条件
- B. 必要而不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

4. 阅读右边的程序框图，运行相应的程序，输出 S 的值为



- A. 5
- B. 8
- C. 24
- D. 29

5. 已知 $a = \log_2 7$, $b = \log_3 8$, $c = 0.3^{0.2}$, 则 a, b, c 的大小关系为

- A. $c < b < a$
- B. $a < b < c$
- C. $b < c < a$
- D. $c < a < b$

6. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l . 若与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线分别交于点 A 和点 B , 且 $|AB| = 4|OF|$ (O 为原点), 则双曲线的离心率为

- A. $\sqrt{2}$
- B. $\sqrt{3}$
- C. 2
- D. $\sqrt{5}$

7. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi)$ 是奇函数, 且 $f(x)$ 的最小正周期为 π , 将

$y = f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 所得图象对应的函数为 $g(x)$. 若

$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, 则 $f\left(\frac{3\pi}{8}\right) =$

- A. -2 B. $-\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. 2

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & x > 1. \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = -\frac{1}{4}x + a$ ($a \in R$) 恰有两个互异的实数解,

则 a 的取值范围为

- A. $\left[\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right]$ B. $\left(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right)$ C. $\left(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right] \cup \{1\}$ D. $\left[\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right] \cup \{1\}$

绝密★启用前

第II卷

注意事项:

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。
2. 本卷共12小题, 共110分。

二、填空题: 本大题共6小题, 每小题5分, 共30分。

9. i 是虚数单位, 则 $\left|\frac{5-i}{1+i}\right|$ 的值为_____.

10. 设 $x \in R$, 使不等式 $3x^2 + x - 2 < 0$ 成立的 x 的取值范围为_____.

11. 曲线 $y = \cos x - \frac{x}{2}$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为_____.

12. 已知四棱锥的底面是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形, 侧棱长均为 $\sqrt{5}$. 若圆柱的一个底面的圆周经过四棱锥四条侧棱的中点, 另一个底面的圆心为四棱锥底面的中心, 则该圆柱的体积为_____.

13. 设 $x > 0$, $y > 0$, $x + 2y = 4$, 则 $\frac{(x+1)(2y+1)}{xy}$ 的最小值为_____.

14. 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = 2\sqrt{3}$, $AD = 5$, $\angle A = 30^\circ$, 点 E 在线段 CB 的延长线上, 且 $AE = BE$, 则 $\overline{BD} \cdot \overline{AE} =$ _____.

三. 解答题: 本大题共6小题, 共80分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

15. 2019年, 我国施行个人所得税专项附加扣除办法, 涉及子女教育、继续教育、大病医疗、住房贷款利息或者住房租金、赡养老人等六项专项附加扣除. 某单位老、中、青员工分别有 72, 108, 120 人, 现采用分层

抽样的方法，从该单位上述员工中抽取 25 人调查专项附加扣除的享受情况.

(I) 应从老、中、青员工中分别抽取多少人?

(II) 抽取的 25 人中，享受至少两项专项附加扣除的员工有 6 人，分别记为 A, B, C, D, E, F . 享受情况如右表，其中“○”表示享受，“×”表示不享受. 现从这 6 人中随机抽取 2 人接受采访.

员工 项目	A	B	C	D	E	F
子女教育	○	○	×	○	×	○
继续教育	×	×	○	×	○	○
大病医疗	×	×	×	○	×	×
住房贷款利息	○	○	×	×	○	○
住房租金	×	×	○	×	×	×
赡养老人	○	○	×	×	×	○

(i) 试用所给字母列举出所有可能的抽取结果;

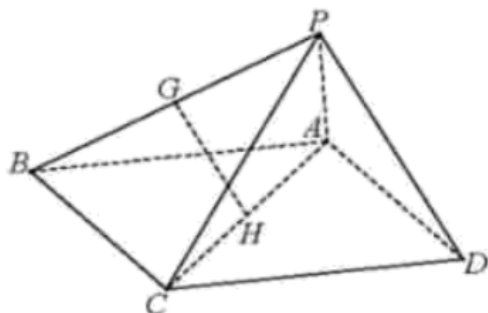
(ii) 设 M 为事件“抽取的 2 人享受的专项附加扣除至少有一项相同”，求事件 M 发生的概率.

16. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $b + c = 2a$, $3c \sin B = 4a \sin C$.

(I) 求 $\cos B$ 的值;

(II) 求 $\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

17. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形， $\triangle PCD$ 为等边三角形，平面 $PAC \perp$ 平面 PCD , $PA \perp CD$, $CD = 2$, $AD = 3$,



(I) 设 G, H 分别为 PB, AC 的中点, 求证: $GH \parallel$ 平面 PAD ;

(II) 求证: $PA \perp$ 平面 PCD ;

(III) 求直线 AD 与平面 PAC 所成角的正弦值.

18. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 公比大于 0, 已知 $a_1 = b_1 = 3, b_2 = a_3, b_3 = 4a_2 + 3$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{b_n}{2}, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$ 求 $a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_{2n}c_{2n} \quad (n \in N^*)$.

19.

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 左顶点为 A , 顶点为 B . 已知 $\sqrt{3}|OA| = 2|OB|$ (O 为原点)

(I) 求椭圆的离心率;

(II) 设经过点 F 且斜率为 $\frac{3}{4}$ 的直线 l 与椭圆在 x 轴上方的交点为 P , 圆 C 同时与 x 轴和直线 l 相切, 圆心 C 在直线 $x = 4$ 上, 且 $OC \parallel AP$, 求椭圆的方程.

20. 设函数 $f(x) = \ln x - a(x-1)e^x$, 其中 $a \in R$.

(I) 若 $a \leq 0$, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 若 $0 < a < \frac{1}{e}$,

(i) 证明 $f(x)$ 恰有两个零点

(ii) 设 x 为 $f(x)$ 的极值点, x_1 为 $f(x)$ 的零点, 且 $x_1 > x_0$, 证明 $3x_0 - x_1 > 2$.

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{-1, 1, 2, 3, 5\}$ ， $B = \{2, 3, 4\}$ ， $C = \{x \in R \mid 1 \leq x < 3\}$ ，则 $(A \cap C) \cup B =$

- A. $\{2\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{-1, 2, 3\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$

【答案】D

【解析】

【分析】

先求 $A \cap C$ ，再求 $(A \cap C) \cup B$ 。

【详解】因为 $A \cap C = \{1, 2\}$ ，

所以 $(A \cap C) \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ 。

故选D。

【点睛】集合的运算问题，一般要先研究集合中元素的构成，能化简的要先化简，同时注意数形结合，即借助数轴、坐标系、韦恩图等进行运算。

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0, \\ x - y + 2 \geq 0, \\ x \geq -1, \\ y \geq -1, \end{cases}$ ，则目标函数 $z = -4x + y$ 的最大值为

- A. 2 B. 3 C. 5 D. 6

【答案】D

【解析】

【分析】

画出可行域，用截距模型求最值。

【详解】已知不等式组表示的平面区域如图中的阴影部分。

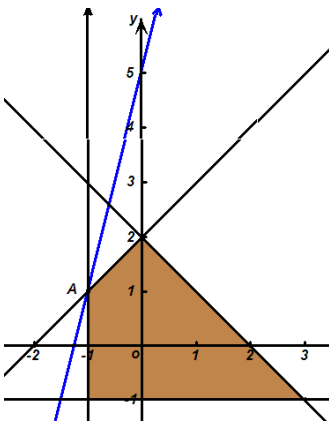
目标函数的几何意义是直线 $y = 4x + z$ 在 y 轴上的截距，

故目标函数在点 A 处取得最大值。

$$\text{由 } \begin{cases} x - y + 2 = 0, \\ x = -1 \end{cases}, \text{ 得 } A(-1, 1),$$

所以 $z_{\max} = -4 \times (-1) + 1 = 5$ 。

故选C。



【点睛】线性规划问题，首先明确可行域对应的是封闭区域还是开放区域，分界线是实线还是虚线，其次确定目标函数的几何意义，是求直线的截距、两点间距离的平方、直线的斜率、还是点到直线的距离等等，最后结合图形确定目标函数最值或范围。即：一画，二移，三求。

3. 设 $x \in R$ ，则“ $0 < x < 5$ ”是“ $|x-1| < 1$ ”的

- A. 充分而不必要条件
- B. 必要而不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】

求出 $|x-1| < 1$ 的解集，根据两解集的包含关系确定。

【详解】 $|x-1| < 1$ 等价于 $0 < x < 2$ ，故 $0 < x < 5$ 推不出 $|x-1| < 1$ ；

由 $|x-1| < 1$ 能推出 $0 < x < 5$ 。

故“ $0 < x < 5$ ”是“ $|x-1| < 1$ ”的必要不充分条件。

故选B。

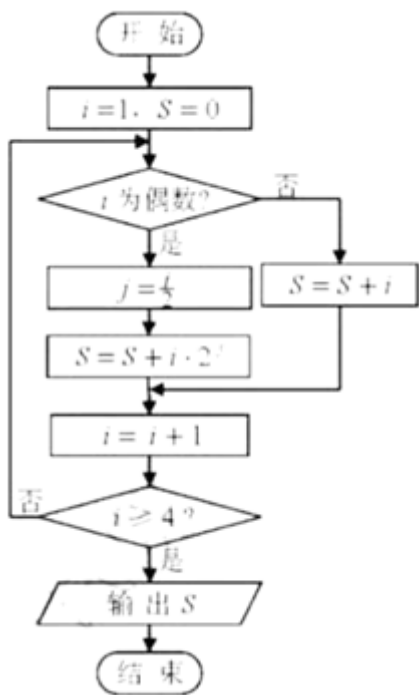
【点睛】充要条件的三种判断方法：

(1) 定义法：根据 $p \Rightarrow q$ ， $q \Rightarrow p$ 进行判断；

(2) 集合法：根据由 p ， q 成立的对象构成的集合之间的包含关系进行判断；

(3)等价转化法：根据一个命题与其逆否命题的等价性，把要判断的命题转化为其逆否命题进行判断。这个方法特别适合以否定形式给出的问题。

4.阅读右边的程序框图，运行相应的程序，输出 S 的值为



A. 5

B. 8

C. 24

D. 29

【答案】B

【解析】

【分析】

根据程序框图，逐步写出运算结果。

【详解】 $S=1, i=2 \rightarrow j=1, S=1+2 \cdot 2^1=5, i=3, S=8, i=4,$

结束循环，故输出8。

故选B。

【点睛】解决此类型问题时要注意：①要明确是当型循环结构，还是直到型循环结构，根据各自的特点执行循环体；②要明确图中的累计变量，明确每一次执行循环体前和执行循环体后，变量的值发生的变化；③要明确循环体终止的条件是什么，会判断什么时候终止循环体。

5.已知 $a = \log_2 7$ ， $b = \log_3 8$ ， $c = 0.3^{0.2}$ ，则 a, b, c 的大小关系为

A. $c < b < a$

B. $a < b < c$

C. $b < c < a$

D. $c < a < b$

【答案】A

【解析】

【分析】

利用利用0,1,2等中间值区分各个数值的大小。

【详解】 $c = 0.3^{0.2} < 0.3^0 = 1$;

$\log_2 7 > \log_2 4 = 2$;

$1 < \log_3 8 < \log_3 9 = 2$ 。

故 $c < b < a$ 。

故选A。

【点睛】利用指数函数、对数函数的单调性时要根据底数与1的大小区别对待。

6. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，准线为 l 。若与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线分别交于点 A 和点 B ，且 $|AB| = 4|OF|$ (O 为原点)，则双曲线的离心率为

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. $\sqrt{5}$

【答案】D

【解析】

【分析】

只需把 $|AB| = 4|OF|$ 用 a, b, c 表示出来，即可根据双曲线离心率的定义求得离心率。

【详解】 l 的方程为 $x = -1$ ，双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，

故得 $A(-1, \frac{b}{a}), B(-1, -\frac{b}{a})$ ，

所以 $|AB| = \frac{2b}{a}$ ， $\frac{2b}{a} = 4$ ， $b = 2a$ ，

所以 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{5}$ 。

故选D。

【点睛】双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$.

7. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi)$ 是奇函数，且 $f(x)$ 的最小正周期为 π ，将 $y = f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍（纵坐标不变），所得图象对应的函数为 $g(x)$ 。若

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, \text{ 则 } f\left(\frac{3\pi}{8}\right) =$$

- A. -2 B. $-\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】

只需根据函数性质逐步得出 A, ω, φ 值即可。

【详解】 $f(x)$ 为奇函数，可知 $f(0) = A \sin \varphi = 0$,

由 $|\varphi| < \pi$ 可得 $\varphi = 0$;

把其图象上各点的横坐标伸长到原来的2倍，得 $g(x) = A \sin \frac{1}{2} \omega x$,

由 $g(x)$ 的最小正周期为 2π 可得 $\omega = 2$,

由 $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ ，可得 $A = 2$ ，

所以 $f(x) = 2 \sin 2x$ ， $f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 2 \sin \frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}$ 。

故选C。

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & x > 1. \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = -\frac{1}{4}x + a$ ($a \in R$) 恰有两个互异的实数解，

则 a 的取值范围为

- A. $\left[\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right]$ B. $\left(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right)$ C. $\left(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right] \cup \{1\}$ D. $\left[\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right] \cup \{1\}$

【答案】D

【解析】

【分析】

画出 $f(x)$ 图象及直线 $y = -\frac{1}{4}x + a$ ，借助图象分析。

【详解】如图，当直线 $y = -\frac{1}{4}x + a$ 位于 B 点及其上方且位于 A 点及其下方，

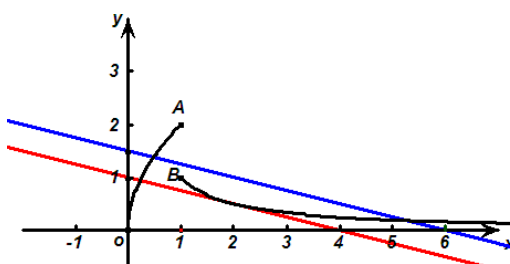
或者直线 $y = -\frac{1}{4}x + a$ 与曲线 $y = \frac{1}{x}$ 相切在第一象限时符合要求。

即 $1 \leq -\frac{1}{4} + a \leq 2$ ，即 $\frac{5}{4} \leq a \leq \frac{9}{4}$ ，

或者 $-\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{4}$ ，得 $x = 2$ ， $y = \frac{1}{2}$ ，即 $\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \times 2 + a$ ，得 $a = 1$ ，

所以 a 的取值范围是 $\left[\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right] \cup \{1\}$ 。

故选D。



【点睛】根据方程实根个数确定参数范围，常将其转化为曲线交点个数，特别是其中一条为直线时常用此法。

绝密★启用前

第II卷

注意事项：

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。
2. 本卷共12小题，共110分。

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分。

9. i 是虚数单位，则 $\left| \frac{5-i}{1+i} \right|$ 的值为_____。

【答案】 $\sqrt{13}$

【解析】

【分析】

先化简复数，再利用复数模的定义求所给复数的模。

【详解】解法一：
$$\left| \frac{5-i}{1+i} \right| = \left| \frac{(5-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \right| = |2-3i| = \sqrt{13}。$$

解法二：
$$\left| \frac{5-i}{1+i} \right| = \frac{|5-i|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{2}} = \sqrt{13}。$$

【点睛】所以解答与复数概念或运算有关的问题时，需把所给复数化为代数形式，即 $a+bi(a, b \in \mathbf{R})$ 的形式，再根据题意求解。

10. 设 $x \in \mathbf{R}$ ，使不等式 $3x^2 + x - 2 < 0$ 成立的 x 的取值范围为_____。

【答案】 $(-1, \frac{2}{3})$

【解析】

【分析】

通过因式分解，解不等式。

【详解】 $3x^2 + x - 2 < 0$ ，

即 $(x+1)(3x-2) < 0$ ，

即 $-1 < x < \frac{2}{3}$ ，

故 x 的取值范围是 $(-1, \frac{2}{3})$ 。

【点睛】解一元二次不等式的步骤：(1)将二次项系数化为正数；(2)解相应的一元二次方程；(3)根据一元二次方程的根，结合不等号的方向画图；(4)写出不等式的解集。容易出现的错误有：①未将二次项系数化正，对应错标准形式；②解方程出错；③结果未按要求写成集合。

11. 曲线 $y = \cos x - \frac{x}{2}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为_____。

【答案】 $x + 2y - 2 = 0$

【解析】

【分析】

利用导数值确定切线斜率，再用点斜式写出切线方程。

【详解】 $y' = -\sin x - \frac{1}{2}$,

当 $x = 0$ 时其值为 $-\frac{1}{2}$,

故所求的切线方程为 $y - 1 = -\frac{1}{2}x$, 即 $x + 2y - 2 = 0$ 。

【点睛】 曲线切线方程的求法:

(1) 以曲线上的点 $(x_0, f(x_0))$ 为切点的切线方程的求解步骤:

① 求出函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$;

② 求切线的斜率 $f'(x_0)$;

③ 写出切线方程 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, 并化简.

(2) 如果已知点 (x_1, y_1) 不在曲线上, 则设出切点 (x_0, y_0) , 解方程组 $\begin{cases} y_0 = f(x_0) \\ \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f'(x_0) \end{cases}$ 得切点 (x_0, y_0) , 进而

确定切线方程.

12. 已知四棱锥的底面是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形, 侧棱长均为 $\sqrt{5}$. 若圆柱的一个底面的圆周经过四棱锥四条侧棱的中点, 另一个底面的圆心为四棱锥底面的中心, 则该圆柱的体积为_____.

【答案】 $\frac{\pi}{4}$.

【解析】

【分析】

根据棱锥的结构特点, 确定所求的圆柱的高和底面半径.

【详解】 四棱锥的高为 $\sqrt{5-1} = 2$,

故圆柱的高为 1, 圆柱的底面半径为 $\frac{1}{2}$,

故其体积为 $\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 1 = \frac{\pi}{4}$ 。

【点睛】 圆柱的底面半径是棱锥底面对角线长度的一半、不是底边棱长的一半。

13. 设 $x > 0$, $y > 0$, $x + 2y = 4$, 则 $\frac{(x+1)(2y+1)}{xy}$ 的最小值为_____.

【答案】 $4\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】

把分子展开化为 $2xy+6$ ，再利用基本不等式求最值。

$$\text{【详解】 } \frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}} = \frac{2xy+x+2y+1}{\sqrt{xy}} = \frac{2xy+6}{\sqrt{xy}} \geq \frac{2\sqrt{2xy \cdot 6}}{\sqrt{xy}} = 4\sqrt{3},$$

等号当且仅当 $xy=3$ ，即 $x=3, y=1$ 时成立。

故所求的最小值为 $4\sqrt{3}$ 。

【点睛】 使用基本不等式求最值时一定要验证等号是否能够成立。

14. 在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = 2\sqrt{3}$ ， $AD = 5$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，点 E 在线段 CB 的延长线上，且 $AE = BE$ ，则 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AE} =$ _____.

【答案】 -1 .

【解析】

【分析】

可利用向量的线性运算，也可以建立坐标系利用向量的坐标运算求解。

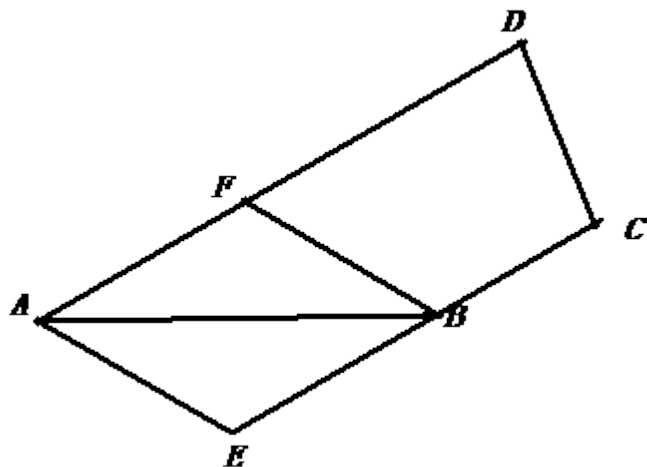
【详解】 详解：解法一：如图，过点 B 作 AE 的平行线交 AD 于 F ，

因为 $AE = BE$ ，故四边形 $AEBF$ 为菱形。

因为 $\angle BAD = 30^\circ$ ， $AB = 2\sqrt{3}$ ，所以 $AF = 2$ ，即 $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$ 。

因为 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$ ，

所以 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AE} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}) = \frac{7}{5}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}^2 - \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}^2 = \frac{7}{5} \times 2\sqrt{3} \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 12 - 10 = -1$ 。



解法二：建立如图所示的直角坐标系，则 $B(2\sqrt{3}, 0)$ ， $D(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2})$ 。

因为 $AD \parallel BC$ ， $\angle BAD = 30^\circ$ ，所以 $\angle CBE = 30^\circ$ ，

因为 $AE = BE$ ，所以 $\angle BAE = 30^\circ$ ，

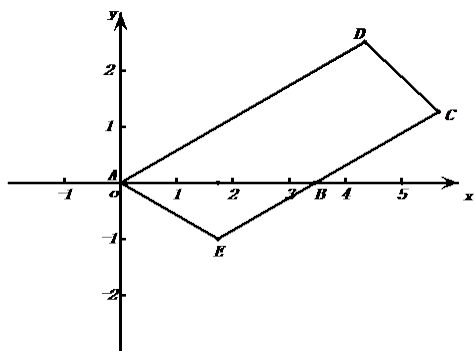
所以直线 BE 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，其方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2\sqrt{3})$ ，

直线 AE 的斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，其方程为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 。

$$\text{由} \begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2\sqrt{3}), \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \end{cases} \quad \text{得} \quad x = \sqrt{3}, \quad y = -1,$$

所以 $E(\sqrt{3}, -1)$ 。

所以 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AE} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}) \cdot (\sqrt{3}, -1) = -1$ 。



【点睛】平面向量问题有两大类解法：基向量法和坐标法，在便于建立坐标系的问题中使用坐标方法更为方便。

三. 解答题：本大题共6小题，共80分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15.2019年，我国施行个人所得税专项附加扣除办法，涉及子女教育、继续教育、大病医疗、住房贷款利息或者住房租金、赡养老人等六项专项附加扣除. 某单位老、中、青员工分别有 72,108,120 人，现采用分层抽样的方法，从该单位上述员工中抽取 25 人调查专项附加扣除的享受情况.

(I) 应从老、中、青员工中分别抽取多少人？

(II) 抽取的25人中，享受至少两项专项附加扣除的员工有6人，分别记为 A, B, C, D, E, F . 享受情况如右表，其中“○”表示享受，“×”表示不享受. 现从这6人中随机抽取2人接受采访.

员工项目	A	B	C	D	E	F
子女教育	○	○	×	○	×	○
继续教育	×	×	○	×	○	○
大病医疗	×	×	×	○	×	×
住房贷款利息	○	○	×	×	○	○
住房租金	×	×	○	×	×	×
赡养老人	○	○	×	×	×	○

(i) 试用所给字母列举出所有可能的抽取结果；

(ii) 设 M 为事件“抽取的2人享受的专项附加扣除至少有一项相同”，求事件 M 发生的概率.

【答案】(I) 6人，9人，10人；

(II) (i) 见解析； (ii) $\frac{11}{15}$.

【解析】

【分析】

(I) 根据题中所给的老、中、青员工人数，求得人数比，利用分层抽样要求每个个体被抽到的概率是相等

的，结合样本容量求得结果；

(II) (I) 根据6人中随机抽取2人，将所有的结果一一列出；

(ii) 根据题意，找出满足条件的基本事件，利用公式求得概率.

【详解】 (I) 由已知，老、中、青员工人数之比为6:9:10，

由于采取分层抽样的方法从中抽取25位员工，

因此应从老、中、青员工中分别抽取6人，9人，10人.

(II) (i) 从已知的6人中随机抽取2人的所有可能结果为

$\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{A, F\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{B, F\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{C, F\},$

$\{D, E\}, \{D, F\}, \{E, F\}$, 共15种；

(ii) 由表格知，符合题意的所有可能结果为 $\{A, B\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{A, F\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{B, F\},$

$\{C, E\}, \{C, F\}, \{D, F\}, \{E, F\}$, 共11种，

所以，时间M发生的概率 $P(M) = \frac{11}{15}$.

【点睛】 本小题主要考查随机抽样、用列举法计算随机事件所含的基本事件数、古典概型即其概率计算公式等基本知识，考查运用概率知识解决简单实际问题的能力.

16. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $b + c = 2a$, $3c \sin B = 4a \sin C$.

(I) 求 $\cos B$ 的值；

(II) 求 $\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

【答案】 (I) $-\frac{1}{4}$;

(II) $-\frac{3\sqrt{5}+7}{16}$.

【解析】

【分析】

(I) 由题意结合正弦定理得到 a, b, c 的比例关系，然后利用余弦定理可得 $\cos B$ 的值

(II) 利用二倍角公式首先求得 $\sin 2B, \cos 2B$ 的值，然后利用两角和的正弦公式可得 $a = 2$ 的值.

【详解】(I)在 $\triangle ABC$ 中,由正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 得 $b \sin C = c \sin B$,

又由 $3c \sin B = 4a \sin C$,得 $3b \sin C = 4a \sin C$,即 $3b = 4a$.

又因为 $b + c = 2a$,得到 $b = \frac{4}{3}a$, $c = \frac{2}{3}a$.

由余弦定理可得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + \frac{4}{9}a^2 - \frac{16}{9}a^2}{2 \cdot a \cdot \frac{2}{3}a} = -\frac{1}{4}$.

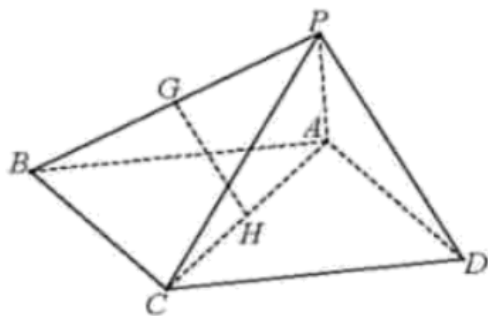
(II)由(I)可得 $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{15}}{4}$,

从而 $\sin 2B = 2 \sin B \cos B = -\frac{\sqrt{15}}{8}$, $\cos 2B = \cos^2 B - \sin^2 B = -\frac{7}{8}$.

故 $\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2B \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2B \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{15}}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{8} \times \frac{1}{2} = -\frac{3\sqrt{5} + 7}{16}$.

【点睛】本题主要考查同角三角函数的基本关系,两角和的正弦公式,二倍角的正弦与余弦公式,以及正弦定理、余弦定理等基础知识.考查计算求解能力.

17. 如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为平行四边形, $\triangle PCD$ 为等边三角形,平面 $PAC \perp$ 平面 PCD , $PA \perp CD$, $CD = 2$, $AD = 3$,



(I) 设 G, H 分别为 PB, AC 的中点,求证: $GH \parallel$ 平面 PAD ;

(II) 求证: $PA \perp$ 平面 PCD ;

(III) 求直线 AD 与平面 PAC 所成角的正弦值.

【答案】(I) 见解析; (II) 见解析; (III) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【解析】

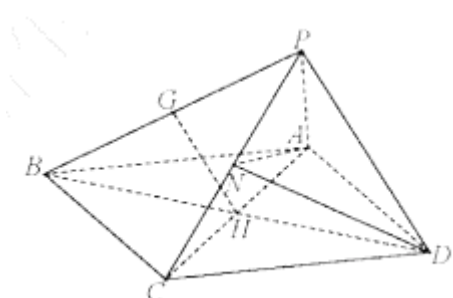
【分析】

(I) 连接 BD ，结合平行四边形的性质，以及三角形中位线的性质，得到 $GH \parallel PD$ ，利用线面平行的判定定理证得结果；

(II) 取棱 PC 的中点 N ，连接 DN ，依题意，得 $DN \perp PC$ ，结合面面垂直的性质以及线面垂直的性质得到 $DN \perp PA$ ，利用线面垂直的判定定理证得结果；

(III) 利用线面角的平面角的定义得到 $\angle DAN$ 为直线 AD 与平面 PAC 所成的角，放在直角三角形中求得结果.

【详解】 (I) 证明：连接 BD ，易知 $AC \cap BD = H$ ， $BH = DH$ ，



又由 $BG = PG$ ，故 $GH \parallel PD$ ，

又因为 $GH \not\subset$ 平面 PAD ， $PD \subset$ 平面 PAD ，

所以 $GH \parallel$ 平面 PAD 。

(II) 证明：取棱 PC 的中点 N ，连接 DN ，依题意，得 $DN \perp PC$ ，

又因为平面 $PAC \perp$ 平面 PCD ，平面 $PAC \cap$ 平面 $PCD = PC$ ，

所以 $DN \perp$ 平面 PAC ，又 $PA \subset$ 平面 PAC ，故 $DN \perp PA$ ，

又已知 $PA \perp CD$ ， $CD \cap DN = D$ ，

所以 $PA \perp$ 平面 PCD 。

(III) 解：连接 AN ，由 (II) 中 $DN \perp$ 平面 PAC ，

可知 $\angle DAN$ 为直线 AD 与平面 PAC 所成的角。

因为 $\triangle PCD$ 为等边三角形， $CD = 2$ 且 N 为 PC 的中点，

所以 $DN = \sqrt{3}$ ，又 $DN \perp AN$ ，

在 $Rt\triangle AND$ 中， $\sin \angle DAN = \frac{DN}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

所以，直线 AD 与平面 PAC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【点睛】 本小题主要考查直线与平面平行、直线与平面垂直、平面与平面垂直、直线与平面所成的角等基础知识，考查空间想象能力和推理能力.

18. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列， $\{b_n\}$ 是等比数列，公比大于 0，已知 $a_1 = b_1 = 3$ ， $b_2 = a_3$ ， $b_3 = 4a_2 + 3$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(II) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{b_n}{2}, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$ 求 $a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_{2n}c_{2n}$ ($n \in N^*$).

【答案】 (I) $a_n = 3n$ ， $b_n = 3^n$ ；

(II) $\frac{(2n-1)3^{n+2} + 6n^2 + 9}{2}$ ($n \in N^*$)

【解析】

【分析】

(I) 首先设出等差数列的公差，等比数列的公比，根据题意，列出方程组，求得 $\begin{cases} d = 3 \\ q = 3 \end{cases}$ ，进而求得等差

数列和等比数列的通项公式；

(II) 根据题中所给的 c_n 所满足的条件，将 $a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_{2n}c_{2n}$ 表示出来，之后应用分组求和法，结合等差数列的求和公式，以及错位相减法求和，最后求得结果.

【详解】 (I) 解：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ，

依题意，得 $\begin{cases} 3q = 3 + 2d \\ 3q^2 = 15 + 4d \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} d = 3 \\ q = 3 \end{cases}$ ，

故 $a_n = 3 + 3(n-1) = 3n$ ， $b_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$ ，

所以， $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 3^n$ ；

(II) $a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_{2n}c_{2n}$

$$\begin{aligned}
&= (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}) + (a_2 b_1 + a_4 b_2 + a_6 b_3 + \cdots + a_{2n} b_n) \\
&= [n \times 3 + \frac{n(n-1)}{2} \times 6] + (6 \times 3^1 + 12 \times 3^2 + 18 \times 3^3 + \cdots + 6n \times 3^n) \\
&= 3n^2 + 6 \times (1 \times 3^1 + 2 \times 3^2 + \cdots + n \times 3^n),
\end{aligned}$$

$$\text{记 } T_n = 1 \times 3^1 + 2 \times 3^2 + \cdots + n \times 3^n \quad \text{①}$$

$$\text{则 } 3T_n = 1 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + \cdots + n \times 3^{n+1} \quad \text{②}$$

$$\text{②} - \text{①} \text{ 得, } 2T_n = -3 - 3^2 - 3^3 - \cdots - 3^n + n \times 3^{n+1} = -\frac{3(1-3^n)}{1-3} + n \times 3^{n+1} = \frac{(2n-1)3^{n+1} + 3}{2},$$

$$\begin{aligned}
\text{所以 } a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots + a_{2n} c_{2n} &= 3n^2 + 6T_n = 3n^2 + 3 \times \frac{(2n-1)3^{n+1} + 3}{2} \\
&= \frac{(2n-1)3^{n+2} + 6n^2 + 9}{2} (n \in N^*).
\end{aligned}$$

【点睛】 本小题主要考查等差数列、等比数列的通项公式及前 n 项和公式等基础知识，考查数列求和的基本方法和运算求解能力，属于中档题目。

19.

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F ，左顶点为 A ，顶点为 B 。已知 $\sqrt{3}|OA| = 2|OB|$ (O 为原点)

(I) 求椭圆的离心率；

(II) 设经过点 F 且斜率为 $\frac{3}{4}$ 的直线 l 与椭圆在 x 轴上方的交点为 P ，圆 C 同时与 x 轴和直线 l 相切，圆心 C 在直线 $x=4$ 上，且 $OC \parallel AP$ ，求椭圆的方程。

【答案】 (I) 首先设椭圆的半焦距为 c ，根据题意得到 $\sqrt{3}a = 2b$ ，结合椭圆中 a, b, c 的关系，得到

$$a^2 = (\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2 + c^2, \text{ 化简得出 } \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \text{ 从而求得其离心率;}$$

(II) 结合 (I) 的结论，设出椭圆的方程 $\frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1$ ，写出直线的方程，两个方程联立，求得交点的坐标，利用直线与圆相切的条件，列出等量关系式，求得 $c = 2$ ，从而得到椭圆的方程。

【解析】

【分析】

(I) $\frac{1}{2}$;

(II) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

【详解】(I) 解：设椭圆的半焦距为 c ，由已知有 $\sqrt{3}a = 2b$ ，

又由 $a^2 = b^2 + c^2$ ，消去 b 得 $a^2 = (\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2 + c^2$ ，解得 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ ，

所以，椭圆的离心率为 $\frac{1}{2}$ 。

(II) 解：由 (I) 知， $a = 2c, b = \sqrt{3}c$ ，故椭圆方程为 $\frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1$ ，

由题意， $F(-c, 0)$ ，则直线 l 的方程为 $y = \frac{3}{4}(x+c)$ ，

点 P 的坐标满足 $\begin{cases} \frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1 \\ y = \frac{3}{4}(x+c) \end{cases}$ ，消去 y 并化简，得到 $7x^2 + 6cx - 13c^2 = 0$ ，

解得 $x_1 = c, x_2 = -\frac{13c}{7}$ ，

代入到 l 的方程，解得 $y_1 = \frac{3}{2}c, y_2 = -\frac{9}{14}c$ ，

因为点 P 在 x 轴的上方，所以 $P(c, \frac{3}{2}c)$ ，

由圆心在直线 $x=4$ 上，可设 $C(4, t)$ ，因为 $OC \parallel AP$ ，

且由 (I) 知 $A(-2c, 0)$ ，故 $\frac{t}{4} = \frac{\frac{3}{2}c}{c+2c}$ ，解得 $t = 2$ ，

因为圆 C 与 x 轴相切，所以圆的半径为 2，

又由圆 C 与 l 相切，得 $\frac{|\frac{3}{4}(4+c) - 2|}{\sqrt{1 + (\frac{3}{4})^2}} = 2$ ，解得 $c = 2$ ，

所以椭圆的方程为： $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

【点睛】 本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线方程、圆等基础知识，考查用代数方法研究圆锥曲线的性质，考查运算求解能力，以及用方程思想、数形结合思想解决问题的能力.

20. 设函数 $f(x) = \ln x - a(x-1)e^x$ ，其中 $a \in R$.

(I) 若 $a \leq 0$ ，讨论 $f(x)$ 的单调性；

(II) 若 $0 < a < \frac{1}{e}$ ，

(i) 证明 $f(x)$ 恰有两个零点

(ii) 设 x 为 $f(x)$ 的极值点， x_1 为 $f(x)$ 的零点，且 $x_1 > x_0$ ，证明 $3x_0 - x_1 > 2$.

【答案】 (I) $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增.;

(II) (i) 见解析；(ii) 见解析.

【解析】

【分析】

(I)；首先写出函数的定义域，对函数求导，判断导数在对应区间上的符号，从而得到结果；

(II) (i) 对函数求导，确定函数的单调性，求得极值的符号，从而确定出函数的零点个数，得到结果；

(ii) 首先根据题意，列出方程组，借助于中介函数，证得结果.

【详解】 (I) 解：由已知， $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，

$$\text{且 } f'(x) = \frac{1}{x} - [ae^x + a(x-1)e^x] = \frac{1 - ax^2e^x}{x},$$

因此当 $a \leq 0$ 时， $1 - ax^2e^x > 0$ ，从而 $f'(x) > 0$ ，

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增.

(II) 证明：(i) 由 (I) 知， $f'(x) = \frac{1 - ax^2e^x}{x}$ ，

令 $g(x) = 1 - ax^2e^x$ ，由 $0 < a < \frac{1}{e}$ ，可知 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减，

又 $g(1) = 1 - ae > 0$ ，且 $g(\ln \frac{1}{a}) = 1 - a(\ln \frac{1}{a})^2 \frac{1}{a} = 1 - (\ln \frac{1}{a})^2 < 0$ ，

故 $g(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一解,

从而 $f'(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一解, 不妨设为 x_0 ,

则 $1 < x_0 < \ln \frac{1}{a}$, 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) = \frac{g(x)}{x} > \frac{g(x_0)}{x} = 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 内单调递增;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) = \frac{g(x)}{x} < \frac{g(x_0)}{x} = 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 内单调递减,

因此 x_0 是 $f(x)$ 的唯一极值点.

令 $h(x) = \ln x - x + 1$, 则当 $x > 1$ 时, $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0$, 故 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内单调递减,

从而当 $x > 1$ 时, $h(x) < h(1) = 0$, 所以 $\ln x < x - 1$,

从而 $f(\ln \frac{1}{a}) = \ln \ln \frac{1}{a} - a(\ln \frac{1}{a} - 1)e^{\ln \frac{1}{a}} = \ln \ln \frac{1}{a} - \ln \frac{1}{a} + 1 = h(\ln \frac{1}{a}) < 0$,

又因为 $f(x_0) > f(1) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 内有唯一零点,

又 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 内有唯一零点 1, 从而, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内恰有两个零点.

(ii) 由题意, $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f(x_1) = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} ax_0^2 e^{x_0} = 1 \\ \ln x_1 = a(x_1 - 1)e^{x_1} \end{cases}$,

从而 $\ln x_1 = \frac{x_1 - 1}{x_0^2} e^{x_1 - x_0}$, 即 $e^{x_1 - x_0} = \frac{x_0^2 \ln x_1}{x_1 - 1}$,

以内当 $x > 1$ 时, $\ln x < x - 1$, 又 $x_1 > x_0 > 1$, 故 $e^{x_1 - x_0} < \frac{x_0^2 (x_1 - 1)}{x_1 - 1} = x_0^2$,

两边取对数, 得 $\ln e^{x_1 - x_0} < \ln x_0^2$,

于是 $x_1 - x_0 < 2 \ln x_0 < 2(x_0 - 1)$, 整理得 $3x_0 - x_1 > 2$,

【点睛】 本小题主要考查导数的运算、不等式证明、运用导数研究函数的性质等基础知识和方法, 考查函数思想、化归与转化思想, 考查综合分析问题和解决问题的能力.

