2008年普通高等学校招生全国统一考试 （湖南卷）

文科数学能力测试

一．选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知$U=\{2,3,4,5,6,7\}$，$M=\{3,4,5,7\}$，$N=\{2,4,5,6\}$，则(　)

A．$M\cap N=\{4,6\}$　　*B.* $M\bigcup N=U$

C．$(C_uN)\bigcup M=U$　　D. $(C_uM)\bigcap N=N$

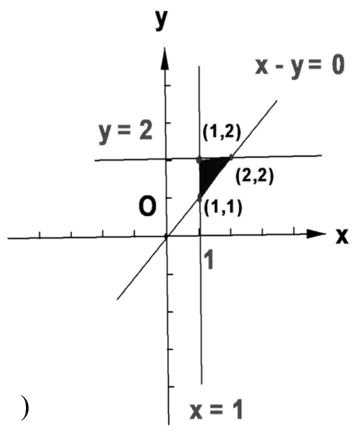
2．“$|x-1|<2$”是“$x<3$”的(　)

A．充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C．充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

3．已条变量x,y满足$\begin{cases}x\ge 1,\\ y\le 2,\\ x-y\le 0,\end{cases}$　则$x+y$的最小值是(　)

A．4　　B.3　　C.2　　D.1



4.函数$f(x)=x^2(x\le 0)$的反函数是(　)

$A.f^{-1}(x)=\sqrt{x}(x\ge 0)$　　$B.f^{-1}(x)=-\sqrt{x}(x\ge 0)$

$C.f^{-1}(x)=-\sqrt{-x}(x\le 0)$　　$D.f^{-1}(x)=-x^2(x\le 0)$

5.已知直线m,n和平面α,β满足$m\perp n, m\perp a, \alpha\perp\beta$,则(　)

$A.\ n\perp\beta$　　$B.n//\beta$,或$n\subset\beta$　　$C.n\perp\alpha$　　$D.n//\alpha$,或$n\subset\alpha$

6．下面不等式成立的是(　)

A．$\log_3 2<\log_2 3<\log_2 5$　　B．$\log_3 2<\log_2 5<\log_2 3$

C．$\log_2 3<\log_3 2<\log_2 5$　　D．$\log_2 3<\log_2 5<\log_3 2$

7．在ΔABC中，AB=3，AC=2，BC=$\sqrt{10}$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$(　)

A．$-\dfrac{3}{2}$　　B．$-\dfrac{2}{3}$　　C．$\dfrac{2}{3}$　　D．$\dfrac{3}{2}$

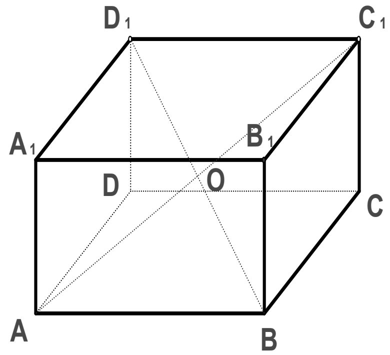
8．某市拟从4个重点项目和6个一般项目中各选2个项目作为本年度启动的项目，

则重点项目A和一般项目B至少有一个被选中的不同选法种数是(　　)

A．15　　B．45　　C．60　　D．75

9．长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的8个顶点在同一个球面上，且AB=2，AD=$\sqrt{3}$，$AA_1=1$，则顶点A、B间的球面距离是(　　)

A．$\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}$　B．$\dfrac{\sqrt{2}\pi}{2}$　C．$\sqrt{2}\pi$　D．$2\sqrt{2}\pi$



10．若双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右支上存在一点，它到右焦点及左准线的距离相等，则双曲线离心率的取值范围是(　　)

A．$(1,\sqrt{2}]$　　B．$[\sqrt{2},+\infty)$　C．$(1,\sqrt{2}+1]$　D．$[\sqrt{2}+1,+\infty)$

二．填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分，把答案填在横线上。

11．已知向量 $\vec{a}=(1,\sqrt{3})$，$\vec{b}=(-2,0)$，则 $|\vec{a}+\vec{b}|=$____________________.

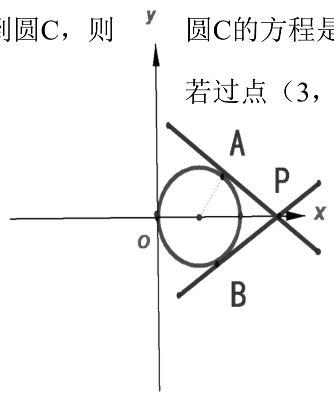
12.从某地区15000位老人中随机抽取500人，其生活能否自理的情况如下表所示：

性别 / 人数 / 生活能否自理	男	女
能	178	278
不能	23	21

则该地区生活不能自理的老人中男性比女性约多____________人。

13．记 $(2x+\dfrac{1}{x})^n$ 的展开式中第m项的系数为 b_m，若 $b_3=2b_4$，则 $n=$__________.

14．将圆 $x^2+y^2=1$ 沿x轴正向平移1个单位后所得到圆C，则圆C的方程是________，若过点（3，0）的直线 l 和圆C相切，则直线 l 的斜率为____________.



15．设$\left[x\right]$表示不超过x的最大整数，（如$\left[2\right]=2,\left[\dfrac{5}{4}\right]=1$）。对于给定的$n\in N^{+}$，

定义$C_n^x=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-\left[x\right]+1)}{x(x-1)\cdots(x-\left[x\right]+1)},x\in\left[1,+\infty\right)$，则$C_8^{\frac{3}{2}}=$________；

当$x\in\left[2,3\right)$时，函数C_8^x的值域是________________________。

三．解答题：本大题共6小题，共75分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16．（本小题满分12分）

甲乙丙三人参加一家公司的招聘面试，面试合格者可正式签约。甲表示只要面试合格就签约，乙、丙则约定：两人面试都合格就一同签约，否则两人都不签约。设每人面试合格的概率都是$\dfrac{1}{2}$，且面试是否合格互不影响。求：

（I）至少一人面试合格的概率；

（II）没有人签约的概率。

17．（本小题满分12分）

已知函数$f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}+\sin x$.

（I）求函数$f(x)$的最小正周期；

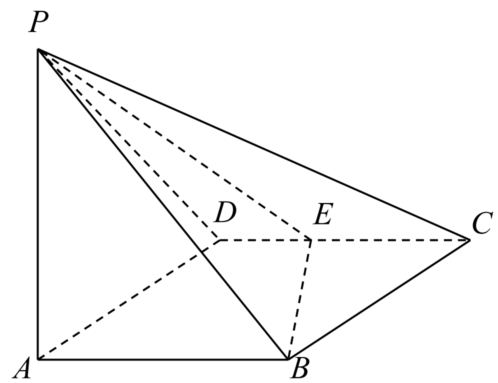
（II）当$x_0\in(0,\dfrac{\pi}{4})$且$f(x_0)=\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$时，求$f(x_0+\dfrac{\pi}{6})$的值。

18．（本小题满分12分）

如图所示，四棱锥$P-ABCD$的底面$ABCD$是边长为1的菱形，$\angle BCD=60^0$，E是CD的中点，PA⊥底面ABCD，$PA=\sqrt{3}$。

（I）证明：平面PBE⊥平面PAB；

（II）求二面角A—BE—P的大小。



19（本小题满分13分）

已知椭圆的中心在原点，一个焦点是$F(2,0)$，且两条准线间的距离为$\lambda(\lambda>4)$。

（I）求椭圆的方程；

（II）若存在过点A（1，0）的直线l，使点F关于直线l的对称点在椭圆上，求λ的取值范围。

20．（本小题满分13分）

数列$\{a_n\}$满足$a_1=0, a_2=2, a_{n+2}=(1+\cos^2\frac{n\pi}{2})a_n+4\sin^2\frac{n\pi}{2}, n=1,2,3,\cdots,$

（I）求a_3,a_4，并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（II）设$S_k=a_1+a_3+\cdots+a_{2k-1}$，$T_k=a_2+a_4+\cdots+a_{2k}$，$W_k=\frac{2S_k}{2+T_k}(k\in N^+)$，

求使$W_k>1$的所有k的值，并说明理由。

21．（本小题满分13分）

已知函数$f(x)=\frac{1}{4}x^4+x^3-\frac{9}{2}x^2+cx$有三个极值点。

（I）证明：$-27<c<5$；

（II）若存在实数c，使函数$f(x)$在区间$[a,a+2]$上单调递减，求a的取值范围。

2008年普通高等学校招生全国统一考试 （湖南卷）

文科数学能力测试

一．选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知$U=\{2,3,4,5,6,7\}$，$M=\{3,4,5,7\}$，$N=\{2,4,5,6\}$，则(　)

A．$M\cap N=\{4,6\}$　　$B.\ M\bigcup N=U$

C．$(C_u N)\bigcup M=U$　　D. $(C_u M)\bigcap N=N$

【答案】B

【解析】由$U=\{2,3,4,5,6,7\}$，$M=\{3,4,5,7\}$，$N=\{2,4,5,6\}$，易知B正确.

2．“$|x-1|<2$”是“$x<3$”的(　)

A．充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C．充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

【答案】A

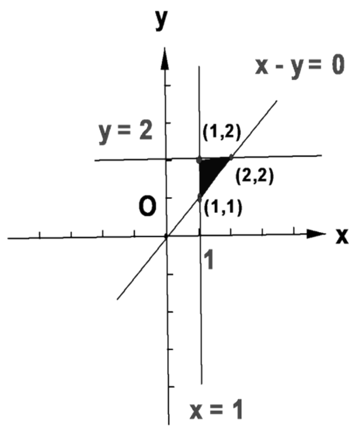
【解析】由$|x-1|<2$得$-1<x<3$，所以易知选A.

3．已条变量x,y满足$\begin{cases}x\ge 1,\\ y\le 2,\\ x-y\le 0,\end{cases}$　则$x+y$的最小值是(
)

A．4　　B.3　　C.2　　D.1

【答案】C

【解析】如图得可行域为一个三角形，其三个顶点分别为$(1,1),(1,2),(2,2),$代入验证知在点$(1,1)$时，$x+y$最小值是$1+1=2.$故选C.



4.函数$f(x)=x^2(x\le 0)$的反函数是(　)

$A.f^{-1}(x)=\sqrt{x}(x\ge 0)$　　$B.f^{-1}(x)=-\sqrt{x}(x\ge 0)$

$C.f^{-1}(x)=-\sqrt{-x}(x\le 0)$　　$D.f^{-1}(x)=-x^2(x\le 0)$

【答案】B

【解析】用特殊点法,取原函数过点$(-1,1),$则其反函数过点$(1,-1),$验证知只有答案B满足.

也可用直接法或利用“原函数与反函数的定义域、值域互换”来解答。

5.已知直线m,n和平面α,β满足$m\perp n,m\perp a,\alpha\perp\beta$,则(　)

$A.\ \ n\perp\beta$　　$B.n//\beta,$或$n\subset\beta$　　$C.n\perp\alpha$　　$D.n//\alpha,$或$n\subset\alpha$

【答案】D

【解析】易知D正确.

6．下面不等式成立的是(　)

A．$\log_3 2 < \log_2 3 < \log_2 5$　B．$\log_3 2 < \log_2 5 < \log_2 3$

C．$\log_2 3 < \log_3 2 < \log_2 5$　D．$\log_2 3 < \log_2 5 < \log_3 2$

【答案】A

【解析】由$\log_3 2 < 1 < \log_2 3 < \log_2 5$，故选A.

7．在ΔABC中，AB=3，AC=2，BC=$\sqrt{10}$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} =$ (　)

A．$-\frac{3}{2}$　B．$-\frac{2}{3}$　C．$\frac{2}{3}$　D．$\frac{3}{2}$

【答案】D

【解析】由余弦定理得$\cos\angle CAB = \frac{1}{4}$，所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3\times 2\times\frac{1}{4} = \frac{3}{2}$，选D.

8．某市拟从4个重点项目和6个一般项目中各选2个项目作为本年度启动的项目，则重点项目A和一般项目B至少有一个被选中的不同选法种数是(　)

A．15　B．45　C．60　D．75

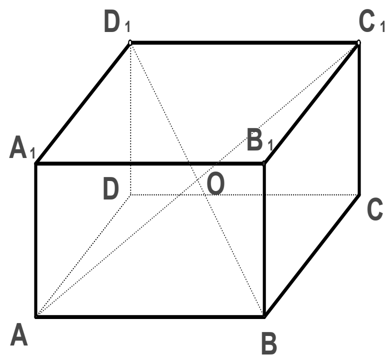
【答案】C

【解析】用直接法：$C_3^1C_5^1 + C_3^1C_5^2 + C_3^2C_5^1 = 15 + 30 + 15 = 60,$

或用间接法：$C_4^2C_6^2 - C_3^2C_5^2 = 90 - 30 = 60,$故选C.

9．长方体$ABCD - A_1B_1C_1D_1$的8个顶点在同一个球面上，且AB=2，AD=$\sqrt{3}$，$AA_1 = 1$，则顶点A、B间的球面距离是(　)

A．$\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$　B．$\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$　C．$\sqrt{2}\pi$　D．$2\sqrt{2}\pi$



【答案】B

【解析】$\because BD_1 = AC_1 = 2R = 2\sqrt{2}, \therefore R = \sqrt{2},$设

$BD_1 \cap AC_1 = O,$则$OA = OB = R = \sqrt{2},$

$\Rightarrow \angle AOB = \frac{\pi}{2}, \therefore l = R\theta = \sqrt{2}\times\frac{\pi}{2},$故选B.

10．若双曲线$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$的右支上存在一点，它到右焦点及左准线的距离相等，则双曲线离心率的取值范围是(　)

A．$(1,\sqrt{2}]$　B．$[\sqrt{2},+\infty)$　C．$(1,\sqrt{2}+1]$　D．$[\sqrt{2}+1,+\infty)$

【答案】C

【解析】$\because ex_0-a=x_0+\dfrac{a^2}{c}\Rightarrow(e-1)x_0=\dfrac{a^2}{c}+a\Rightarrow\dfrac{a^2}{c}+a\ge(e-1)a,$

$\therefore e-1\le1+\dfrac{a}{c}=1+\dfrac{1}{e},\Rightarrow e^2-2e-1\le0,\Rightarrow1-\sqrt{2}\le e\le1+\sqrt{2},$

而双曲线的离心率$e>1,\ \therefore e\in(1,\sqrt{2}+1]$, 故选C.

二．填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分，把答案填在横线上。

11．已知向量$\vec{a}=(1,\sqrt{3})$，$\vec{b}=(-2,0)$，则$|\vec{a}+\vec{b}|=$____________________.

【答案】 2

【解析】由$\because\vec{a}+\vec{b}=(-1,\sqrt{3}),\therefore|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{1+3}=2.$

12.从某地区15000位老人中随机抽取500人，其生活能否自理的情况如下表所示：

性别 / 人数 / 生活能否自理	男	女
能	178	278
不能	23	21

则该地区生活不能自理的老人中男性比女性约多____________人。

【答案】60

【解析】由上表得$(23-21)\times\dfrac{15000}{500}=2\times30=60.$

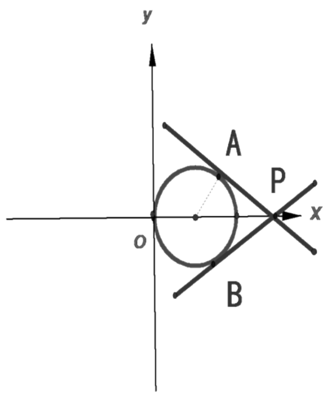
13．记$(2x+\dfrac{1}{x})^n$的展开式中第m项的系数为b_m，若$b_3=2b_4$，则$n=$_________.

【答案】5

【解析】由$T_{r+1}=C_n^r(2x)^{n-r}\cdot(\dfrac{1}{x})^r=2^{n-r}\cdot C_n^r\cdot x^{n-2r}$, 得$2^{n-2}\cdot C_n^2=2\times2^{n-3}\cdot C_n^3,$

所以解得$n=5.$

14．将圆$x^2+y^2=1$沿x轴正向平移1个单位后所得到圆C，则圆C的方程是________,若过点（3，0）的直线l和圆C相切，则直线l的斜率为____________.



【答案】$(x-1)^2+y^2=1$，$\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】易得圆C的方程是$(x-1)^2+y^2=1$，

直线l的倾斜角为$30^\circ,150^\circ$，

所以直线l的斜率为$k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

15．设$\left[x\right]$表示不超过x的最大整数，（如$\left[2\right]=2,\left[\dfrac{5}{4}\right]=1$）。对于给定的$n\in N^+$，

定义$C_n^x=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-\left[x\right]+1)}{x(x-1)\cdots(x-\left[x\right]+1)},x\in\left[1,+\infty\right)$，则$C_8^{\frac{3}{2}}=$________；

当$x\in\left[2,3\right)$时，函数C_8^x的值域是________________________。

【答案】$\dfrac{16}{3}$，$(\dfrac{28}{3},28]$

【解析】$C_8^{\frac{3}{2}}=\dfrac{8}{\frac{3}{2}}=\dfrac{16}{3}$，当$x=2$时，$C_8^2=\dfrac{8\times 7}{2\times 1}=28$，当$x\to 3$时，$\left[x\right]=2$，

所以$C_8^x=\dfrac{8\times 7}{3\times 2}=\dfrac{28}{3}$，故函数$C_8^x$的值域是$(\dfrac{28}{3},28]$.

三．解答题：本大题共6小题，共75分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16．（本小题满分12分）

甲乙丙三人参加一家公司的招聘面试，面试合格者可正式签约。甲表示只要面试合格就签约，乙、丙则约定：两人面试都合格就一同签约，否则两人都不签约。设每人面试合格的概率都是$\dfrac{1}{2}$，且面试是否合格互不影响。求：

（I）至少一人面试合格的概率；

（II）没有人签约的概率。

解：用A,B,C分别表示事件甲、乙、丙面试合格．由题意知A,B,C相互独立，

且$P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{2}$.

（I）至少有一人面试合格的概率是$1-P(\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C})$

$=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=1-(\dfrac{1}{2})^3=\dfrac{7}{8}$.

（II）没有人签约的概率为$P(\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C})+P(\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C)+P(\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C})$

$$P(\overline{A})\cdot P(B)\cdot P(\overline{C})+P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})\cdot P(C)+P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})\cdot P(\overline{C})$$

$$=(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^3=\frac{3}{8}.$$

17．（本小题满分12分）

已知函数 $f(x)=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}+\sin x$.

（I）求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

（II）当 $x_0\in(0,\frac{\pi}{4})$ 且 $f(x_0)=\frac{4\sqrt{2}}{5}$ 时，求 $f(x_0+\frac{\pi}{6})$ 的值。

解：由题设有 $f(x)=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$.

（I）函数 $f(x)$ 的最小正周期是 $T=2\pi$.

（II）由 $f(x_0)=\frac{4\sqrt{2}}{5}$ 得 $\sqrt{2}\sin(x_0+\frac{\pi}{4})=\frac{4\sqrt{2}}{5}$, 即 $\sin(x_0+\frac{\pi}{4})=\frac{4}{5}$,

因为 $x_0\in(0,\frac{\pi}{4})$,所以 $x_0+\frac{\pi}{4}\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$.

从而 $\cos(x_0+\frac{\pi}{4})=\sqrt{1-\sin^2(x_0+\frac{\pi}{4})}=\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=\frac{3}{5}$.

于是 $f(x_0+\frac{\pi}{6})=\sqrt{2}\sin(x_0+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})=\sqrt{2}\sin[(x_0+\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{6}]$

$=\sqrt{2}[\sin(x_0+\frac{\pi}{4})\cos\frac{\pi}{6}+\cos(x_0+\frac{\pi}{4})\sin\frac{\pi}{6}]$

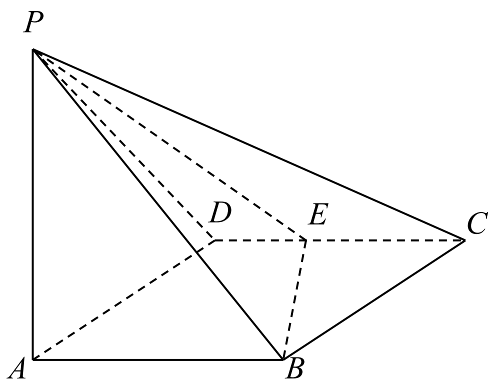
$=\sqrt{2}(\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2})=\frac{4\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{10}$.

18．（本小题满分12分）

如图所示，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为1的菱形，$\angle BCD=60^0$，E是CD的中点，PA⊥底面ABCD，$PA=\sqrt{3}$。

（I）证明：平面PBE⊥平面PAB；

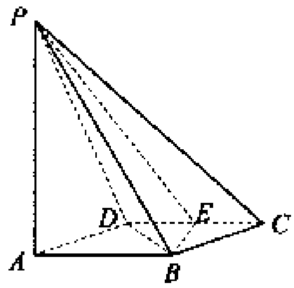
（II）求二面角A—BE—P的大小。



解：解法一（I）如图所示, 连结 BD, 由 $ABCD$ 是菱形且 $\angle BCD=60^0$ 知，

$\triangle BCD$ 是等边三角形. 因为E是CD的中点，所以

$BE\perp CD$, 又 $AB//CD$, 所以 $BE\perp AB$,



又因为PA⊥平面ABCD， $BE\subset$ 平面ABCD，

所以 PA⊥ BE, 而 PA$\cap AB=A$, 因此 $BE\perp$ 平面PAB.

又 $BE\subset$ 平面PBE，所以平面PBE⊥平面PAB.

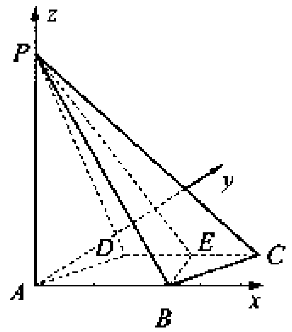
（II）由（I）知， $BE\perp$ 平面PAB, $PB\subset$ 平面PAB,

所以 $PB\perp BE$.

又 AB⊥ BE, 所以 $\angle PBA$ 是二面角 $A-BE-P$ 的平面角.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PAB$ 中, $\tan\angle PBA=\dfrac{PA}{AB}=\sqrt{3}, \angle PBA=60^\circ$..

故二面角 $A-BE-P$ 的大小为 60°.



解法二：如图所示,以A为原点，建立空间直角坐标系．则相关各点的坐标分别是

$A(0,0,0),\ B(1,0,0),\ C(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0),\ D(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0),\ P(0,0,\sqrt{3}),\ E(1,\frac{\sqrt{3}}{2},0)$.

（I）因为 $\overrightarrow{BE}=(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0)$, 平面PAB的一个法向量是 $\overrightarrow{n_0}=(0,1,0)$, 所以

$\overrightarrow{BE}$ 和 $\overrightarrow{n_0}$ 共线.从而 $BE\perp$ 平面PAB.

又因为 $BE\subset$ 平面PBE，所以平面PBE⊥平面PAB.

（II）易知 $\overrightarrow{PB}=(1,0,-\sqrt{3}), \overrightarrow{BE}=(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0)$, 设 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$ 是平面PBE的一个法向量,

则由 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1+0\times y_1-\sqrt{3}z_1=0,\\ 0\times x_1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y_1+0\times z_1=0\end{cases}$ 所以 $y_1=0$，$x_1=\sqrt{3}z_1$.

故可取 $\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{3},0,1)$. 而平面ABE的一个法向量是 $\overrightarrow{n_2}=(0,0,1)$.

于是, $\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\bullet\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\bullet|\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{1}{2}$..

故二面角 $A-BE-P$ 的大小为 60°.

19（本小题满分13分）

已知椭圆的中心在原点，一个焦点是$F(2,0)$，且两条准线间的距离为$\lambda(\lambda>4)$。

（I）求椭圆的方程；

（II）若存在过点A（1，0）的直线l，使点F关于直线l的对称点在椭圆上，求λ的取值范围。

解：（I）设椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0).$

由条件知$c=2,$且$\dfrac{2a^2}{c}=\lambda,$所以$a^2=\lambda,\ b^2=a^2-c^2=\lambda-4.$

故椭圆的方程是$\dfrac{x^2}{\lambda}+\dfrac{y^2}{\lambda-4}=1(\lambda>4).$

（II）依题意, 直线l的斜率存在且不为0,记为k ,则直线l的方程是$y=k(x-1).$

设点$F(2,0)$关于直线l的对称点为$F'(x_0，y_0),$则

$$\begin{cases}\dfrac{y_0}{2}=k(\dfrac{x_0+2}{2}-1),\\ \dfrac{y_0}{x_0-2}\cdot k=-1\end{cases}\quad 解得\begin{cases}x_0=\dfrac{2}{1+k^2},\\ y_0=\dfrac{2k}{1+k^2}\end{cases}$$

因为点$F'(x_0，y_0)$在椭圆上，所以$\dfrac{(\frac{2}{1+k^2})^2}{\lambda}+\dfrac{(\frac{2k}{1+k^2})^2}{\lambda-4}=1.$即

$\lambda(\lambda-4)k^4+2\lambda(\lambda-6)k^2+(\lambda-4)^2=0.$

设$k^2=t,$则$\lambda(\lambda-4)t^2+2\lambda(\lambda-6)t+(\lambda-4)^2=0.$

因为$\lambda>4,$所以$\dfrac{(\lambda-4)^2}{\lambda(\lambda-4)}>0.$于是,

$$当且仅当\begin{cases}\Delta=[2\lambda(\lambda-6)]^2-4\lambda(\lambda-4)^3,\\ -\dfrac{2\lambda(\lambda-6)}{\lambda(\lambda-4)}>0.\end{cases}\qquad (*)$$

上述方程存在正实根,即直线l存在.

解$(*)$得$\begin{cases}\lambda \le \dfrac{16}{3}, \\ 4 < \lambda < 6.\end{cases}$ 所以$4 < \lambda \le \dfrac{16}{3}.$

即λ的取值范围是$4 < \lambda \le \dfrac{16}{3}.$

20．（本小题满分13分）

数列$\{a_n\}$满足$a_1 = 0, a_2 = 2, a_{n+2} = (1+\cos^2 \dfrac{n\pi}{2})a_n + 4\sin^2 \dfrac{n\pi}{2}, n = 1,2,3,\cdots,$

（I）求a_3, a_4，并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（II）设$S_k = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2k-1}$，$T_k = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k}$，$W_k = \dfrac{2S_k}{2+T_k}(k \in N^+)$，

求使$W_k > 1$的所有k的值，并说明理由。

解：（I）因为$a_1 = 0, a_2 = 2,$所以$a_3 = (1+\cos^2 \dfrac{\pi}{2})a_1 + 4\sin^2 \dfrac{\pi}{2} = a_1 + 4 = 4,$

$a_4 = (1+\cos^2 \pi)a_2 + 4\sin^2 \pi = 2a_2 = 4,$

一般地, 当$n = 2k-1(k \in N^*)$时，

$$a_{2k+1} = [1+\cos^2 \frac{(2k-1)\pi}{2}]a_{2k-1} + 4\sin^2 \frac{2k-1}{2}\pi = a_{2k-1} + 4,$$

即$a_{2k+1} - a_{2k-1} = 4.$所以数列$\{a_{2k-1}\}$是首项为0、公差为4的等差数列，

因此$a_{2k-1} = 4(k-1).$

当$n = 2k(k \in N^*)$时，$a_{2k+2} = [1+\cos^2 \dfrac{2k\pi}{2}]a_{2k} + 4\sin^2 \dfrac{2k}{2}\pi = 2a_{2k},$

所以数列$\{a_{2k}\}$是首项为2、公比为2的等比数列，因此$a_{2k} = 2^k.$

故数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n = \begin{cases} 2(n-1), n = 2k-1(k \in N^*), \\ 2^{\frac{n}{2}}, n = 2k(k \in N^*) \end{cases}$

（II）由（I）知，$S_k = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2k-1} = 0 + 4 + \cdots + 4(k-1) = 2k(k-1),$

$$T_k = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k} = 2 + 2^2 + \cdots 2^k = 2^{k+1} - 2, W_k = \frac{2S_k}{2+T_k} = \frac{k(k-1)}{2^{k-1}}.$$

于是$W_1=0, W_2=1, W_3=\frac{3}{2}, W_4=\frac{3}{2}, W_5=\frac{5}{4}, W_6=\frac{15}{16}$.

下面证明: 当$k\geq 6$时，$W_k<1$.事实上, 当$k\geq 6$时，

$W_{k+1}-W_k=\frac{(k+1)k}{2^k}-\frac{k(k-1)}{2^{k-1}}=\frac{k(3-k)}{2^k}<0$, 即$W_{k+1}<W_k$.

又$W_6<1$,所以当$k\geq 6$时，$W_k<1$.

故满足$W_k>1$的所有k的值为3,4,5.

21．（本小题满分13分）

已知函数$f(x)=\frac{1}{4}x^4+x^3-\frac{9}{2}x^2+cx$有三个极值点。

（I）证明：$-27<c<5$；

（II）若存在实数c，使函数$f(x)$在区间$[a,a+2]$上单调递减，求a的取值范围。

解：（I）因为函数$f(x)=\frac{1}{4}x^4+x^3-\frac{9}{2}x^2+cx$有三个极值点,

所以$f'(x)=x^3+3x^2-9x+c=0$有三个互异的实根.

设$g(x)=x^3+3x^2-9x+c$, 则$g'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$,

当$x<-3$时，$g'(x)>0$, $g(x)$在$(-\infty,-3)$上为增函数;

当$-3<x<1$时，$g'(x)<0$, $g(x)$在$(-3,1)$上为减函数;

当$x>1$时，$g'(x)>0$, $g(x)$在$(1,+\infty)$上为增函数;

所以函数$g(x)$在$x=-3$时取极大值,在$x=1$时取极小值.

当$g(-3)\leq 0$或$g(1)\geq 0$时, $g(x)=0$最多只有两个不同实根.

因为$g(x)=0$有三个不同实根, 所以$g(-3)>0$且$g(1)<0$.

即$-27+27+27+c>0$,且$1+3-9+c<0$,

解得$c>-27$, 且$c<5$, 故$-27<c<5$.

（II）由（I）的证明可知，当$-27<c<5$时, $f(x)$有三个极值点.

不妨设为x_1，x_2，x_3（$x_1<x_2<x_3$），则$f'(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

所以$f(x)$的单调递减区间是$(-\infty，x_1]$,$[x_2,x_3]$

若 $f(x)$ 在区间 $\left[a,a+2\right]$ 上单调递减，

则 $\left[a,a+2\right]\subset(-\infty，x_1]$, 或 $\left[a,a+2\right]\subset[x_2,x_3]$,

若 $\left[a,a+2\right]\subset(-\infty，x_1]$,则 $a+2\le x_1$.由（I）知，$x_1<-3$,于是 $a<-5$.

若 $\left[a,a+2\right]\subset[x_2,x_3]$,则 $a\ge x_2$ 且 $a+2\le x_3$.由（I）知，$-3<x_2<1$.

又 $f'(x)=x^3+3x^2-9x+c$,当 $c=-27$ 时，$f'(x)=(x-3)(x+3)^2$;

当 $c=5$ 时，$f'(x)=(x+5)(x-1)^2$.

因此,当 $-27<c<5$ 时，$1<x_3<3$.所以 $a>-3$, 且 $a+2<3$.

即 $-3<a<1$. 故 $a<-5$, 或 $-3<a<1$. 反之,当 $a<-5$, 或 $-3<a<1$ 时，

总可找到 $c\in(-27,5)$, 使函数 $f(x)$ 在区间 $\left[a,a+2\right]$ 上单调递减.

综上所述, a 的取值范围是 $(-\infty,-5)\cup(-3,1)$.