

本套试题从新课标的新理念出发,展现了新课程新考纲的新观念.考点覆盖全面,考查知识方法的同时考查能力、思想和方法,没有忘记创新,特别是第15、17题.

2012年福建省高考理科数学真题解析(专版)

第I卷(选择题 共50分)

一、选择题:本大题共10小题,每小题5分,共50分.在每小题给出四个选项中,只有一项是符合题目要求的

1.若复数 z 满足 $zi=1-i$,则 z 等于

A. $-1-i$ B. $1-i$ C. $-1+i$ D. $1+i$

【解析】 $\because z = \frac{1-i}{i} = -1-i \therefore A$ 正确.

【答案】 A

【考点定位】 本题主要考查复数的代数运算, 主要掌握复数四则运算法则.

2.等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1+a_5=10, a_4=7$, 则数列 $\{a_n\}$ 的公差为

A.1 B.2 C.3 D.4

【解析】 $\because a_1 + a_5 = 10, \therefore 2a_1 + 4d = 10, a_4 = a_1 + 3d = 7, \therefore d = 2.$

【答案】 B

【考点定位】 该题主要考查等差数列的通项公式, 考查计算求解能力.

3.下列命题中, 真命题是

A. $\exists x_0 \in R, e^{x_0} \leq 0$

B. $\forall x \in R, 2^x > x^2$

C. $a+b=0$ 的充要条件是 $\frac{a}{b} = -1$

D. $a>1, b>1$ 是 $ab>1$ 的充分条件

【解析】 A,B,C 均错, D 正确.

【答案】 D

【考点定位】 此题主要考查逻辑用语中的充分必要条件, 考查逻辑推理能力、分析判断能力、必然与或然的能力.

4.一个几何体的三视图形状都相同、大小均相等, 那么这个几何体不可以是

A.球 B.三棱柱 C.正方形 D.圆柱

【解析】 分别比较 A,B,C 的三视图不符合条件, D 符合.

【答案】 D

【考点定位】 考查空间几何体的三视图与直观图, 考查空间想象能力、逻辑推理能力.

5.下列不等式一定成立的是

A. $\log(x^2 + \frac{1}{4}) > \lg x (x > 0)$

B. $\sin x + \frac{1}{\sin x} \geq 2 (x \neq k\pi, k \in Z)$

C. $x^2 + 1 \geq 2|x| (x \in R)$

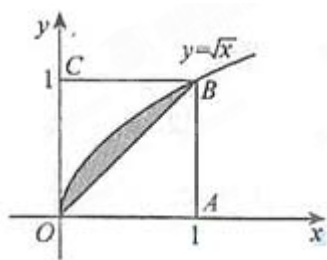
D. $\frac{1}{x^2+1} > 1 (x \in R)$

【解析】∵由基本不等式得： $x^2+1 \geq 2|x|$ ，∴ C正确.

【答案】C

【考点定位】此题主要考查基本不等式和均值不等式成立的条件和运用，考查综合运用能力. 掌握基本不等式的相关内容解题的关键.

6. 如图所示，在边长为 1 的正方形 OABC 中任取一点 P，则点 P 恰好取自阴影部分的概率为



A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{7}$

【解析】∵ $S_{\text{阴影}} = \int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$. $S_{\text{正}} = 1$, ∴ $P = \frac{1}{6}$, ∴ C正确.

【答案】C

【考点定位】本题主要考查几何概型的概率和定积分，考查推理能力、计算求解能力.

7. 设函数 $D(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 为有理数} \\ 0 & x \text{ 为无理数} \end{cases}$ ，则下列结论错误的是

- A. $D(x)$ 的值域为 $\{0,1\}$
- B. $D(x)$ 是偶函数
- C. $D(x)$ 不是周期函数
- D. $D(x)$ 不是单调函数

【解析】A, B, D 均正确，C 错误.

【答案】C

【考点定位】该题主要考查函数的概念、定义域、值域、单调性、周期性、奇偶性，全面掌握很关键.

8. 已知双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右焦点与抛物线 $y^2 = 12x$ 的焦点重合，则该双曲线的焦点到其渐

近线的距离等于

A. $\sqrt{5}$ B. $4\sqrt{2}$ C. 3 D. 5

【解析】

\therefore 抛物线的焦点是 $F(3, 0)$, \therefore 双曲线的半焦距 $c=3$,

$\therefore 4+b^2=3^2, \therefore b=\sqrt{5}, a=4, \therefore$ 一条渐近线方程为: $y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$,

即 $\sqrt{5}x-2y=0, \therefore d=\frac{|\sqrt{5}\times 3-4\times 0|}{\sqrt{5+(-2)^2}}=\sqrt{5}$.

【答案】 A

【考点定位】 本题主要考察双曲线、抛物线的标准方程、几何性质、点和直线的位置关系, 考查推理论证能力、逻辑思维能力、计算求解能力、数形结合思想、转化化归思想.

9. 若直线 $y=2x$ 上存在点 (x, y) 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-3\leq 0 \\ x-2y-3\leq 0 \\ x\geq m \end{cases}$, 则实数 m 的最大值为

- A. -1 B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

【解析】

$\therefore x+y-3=0$ 和 $y=2x$ 交点为 $(1, 2)$, \therefore 只有 $m\leq 1$ 才能符合条件. B 正确.

【答案】 B

【考点定位】 本题主要考察一元二次不等式表示平面区域, 考查分析判断能力、逻辑推理能力和求解能力.

10. 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义, 若对任意 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$

则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有性质 P. 设 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上具有性质 P, 现给出如下命题:

① $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上的图像是连续不断的;

② $f(x)$ 在 $[1, \sqrt{3}]$ 上具有性质 P;

③ 若 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得最大值 1, 则 $f(x)=1, x \in [1, 3]$;

④ 对任意 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [1, 3]$, 有 $f(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}) \leq \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)]$

其中真命题的序号是

- A. ①② B. ①③ C. ②④ D. ③④

【解析】 正确理解和推断可知①②错误, ③④正确.

【答案】 D

【考点定位】 此题主要考察函数的概念、图象、性质, 考查分析能力、推理论断能力, 数形结合思想、转化化归思想.

第 II 卷 (非选择题共 100 分)

二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分, 把答案填在答题卡的相应位置.

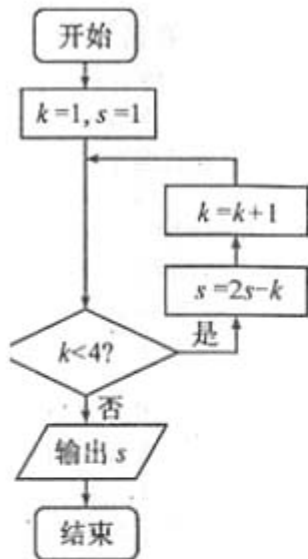
11. $(a+x)^4$ 的展开式中 x^3 的系数等于 8, 则实数 $a=$ _____

【解析】 $\because T_{r+1} = C_4^r a^{4-r} x^r, \therefore r = 3$ 时, $C_4^3 a^{4-3} = 8, \therefore a = 2$.

【答案】 2

【考点定位】 该题主要考查二项式定理、二项式定理的项与系数的关系, 考查计算求解能力.

12. 阅读右图所示的程序框图, 运行相应地程序, 输出的 s 值等于_____



【解析】

$$\because 1. S = 2 \times 1 - 1 = 1, K = 2$$

$$2. S = 2 \times 1 - 2 = 0, K = 3$$

$$3. S = 2 \times 0 - 3 = -3, K = 4, \text{ 输出 } -3.$$

【答案】 【答案】 -3

【考点定位】 该题主要考察算法的基本思想、结构和功能, 把握算法的基本思想是解好此类问题的根本.

13. 已知 $\triangle ABC$ 得三边长成公比为 $\sqrt{2}$ 的等比数列, 则其最大角的余弦值为_____.

【解析】

设最小边为 a , 则其他两边分别是 $\sqrt{2}a, 2a$, 由余弦定理得

$$\text{最大角的余弦值为 } \cos \alpha = \frac{a^2 + (\sqrt{2}a)^2 - (2a)^2}{2a(\sqrt{2}a)} = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

【答案】 $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

【考点定位】 此题主要考查三角形中的三角函数、等比数列的概念、余弦定理, 考查分析推理能力、运算求解能力.

14. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = n \cos \frac{n\pi}{2} + 1$, 前 n 项和为 S_n , 则 $S_{2012} =$ _____

【解析】

$$\because a_n = n \cos \frac{n\pi}{2} + 1,$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{2012} &= (1 \times 0 - 2 \times 1 + 3 \times 0 + 4 \times 1 + \dots + 2012 \times 1) + 2012 \\ &= (-2 + 4 - 6 + \dots - 2010 + 2012) + 2012 \\ &= 2 \times 503 + 2012 = 3018. \end{aligned}$$

【答案】 3018

【考点定位】 本题主要考察数列的项、前 n 项和，考查数列求和能力. 此类问题关键是并项求和.

15. 对于实数 a 和 b ，定义运算 “ $*$ ”：
$$a * b = \begin{cases} a^2 - ab, & (a \leq b), \\ b^2 - ab, & (a > b), \end{cases}$$

设 $f(x) = (2x-1) * (x-1)$ ，且关于 x 的方程为 $f(x) = m$ ($m \in \mathbb{R}$) 恰有三个互不相等的实数根 x_1, x_2, x_3 ，则 $x_1 x_2 x_3$ 的取值范围是_____

$$f(x) = \begin{cases} (2x-1)^2 - (2x-1)(x-1), & 2x-1 \leq x-1 \\ (x-1)^2 - (2x-1)(x-1), & 2x-1 > x-1 \end{cases}$$

【解析】 由定义运算 “ $*$ ” 可知

$$= \begin{cases} 2(x-\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{8}, & x \leq 0 \\ -(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}, & x > 0 \end{cases}, \text{ 画出该函数图象可知}$$

满足条件的取值范围是 $(\frac{1-\sqrt{3}}{16}, 0)$.

【答案】 $(\frac{1-\sqrt{3}}{16}, 0)$

【考点定位】 本题主要考查函数的零点，考查新定义新运算，考查创新能力.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分，解答题写出文字说明，证明过程或演算步骤。

16. (本小题满分 13 分)

受轿车在保修期内维修费等因素的影响，企业产生每辆轿车的利润与该轿车首次出现故障的时间有关，某轿车制造厂生产甲、乙两种品牌轿车，保修期均为 2 年，现从该厂已售出的两种品牌轿车中随机抽取 50 辆，统计书数据如下：

品牌	甲			乙	
	首次出现故障的时间 x (年)	首次出现故障的时间 x (年)	首次出现故障的时间 x (年)	首次出现故障的时间 x (年)	首次出现故障的时间 x (年)
轿车数量 (辆)	2	3	45	5	45
每辆利润 (万元)	1	2	3	1.8	2.9

将频率视为概率，解答下列问题：

- (I) 从该厂生产的甲品牌轿车中随机抽取一辆，求首次出现故障发生在保修期内的概率；
- (II) 若该厂生产的轿车均能售出，记住生产一辆甲品牌轿车的利润为 X_1 ，生产一辆乙品牌轿车的利润为 X_2 ，分别求 X_1, X_2 的分布列；
- (III) 该厂预计今后这两种品牌轿车销量相当，由于资金限制，只能生产其中一种品牌轿车，若从经济效益的角度考虑，你认为应该产生哪种品牌的轿车？说明理由。

【解析】

(1) 设“品牌轿车甲首次出现故障在保修期内”为事件A则 $P(A) = \frac{2+3}{50} = \frac{1}{10}$.

(2) 依题意 X_1, X_2 的分布列分别如下:

X_1	1	2	3	X_2	1.8	2.9
P	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{9}{10}$	P	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$

(3) 由(2)得

$$E(X_1) = 1 \times \frac{1}{25} + 2 \times \frac{3}{50} + 3 \times \frac{9}{10} = 2.86.$$

$$E(X_2) = 1.8 \times \frac{1}{10} + 2.9 \times \frac{9}{10} = 2.79.$$

$E(X_1) > E(X_2)$, ∴ 应生产甲品牌轿车.

【考点定位】 本题主要考查古典概型、互斥事件的概率、离散型随机变量的分布列、数学期望等基础知识, 考查数据处理能力、应用意识, 考查必然与或然思想.

17 (本小题满分 13 分)

某同学在一次研究性学习中发现, 以下五个式子的值都等于同一个常数.

- (1) $\sin^2 13^\circ + \cos^2 17^\circ - \sin 13^\circ \cos 17^\circ$
- (2) $\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ - \sin 15^\circ \cos 15^\circ$
- (3) $\sin^2 18^\circ + \cos^2 12^\circ - \sin 18^\circ \cos 12^\circ$
- (4) $\sin^2 (-18^\circ) + \cos^2 48^\circ - \sin^2 (-18^\circ) \cos^2 48^\circ$
- (5) $\sin^2 (-25^\circ) + \cos^2 55^\circ - \sin^2 (-25^\circ) \cos^2 55^\circ$

I 试从上述五个式子中选择一个, 求出这个常数

II 根据(I)的计算结果, 将该同学的发现推广位三角恒等式, 并证明你的结论

【解析】

(1) 选择(2)式计算如下: $\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ - \sin 15^\circ \cos 15^\circ = 1 - \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{3}{4}$.

(2) 证明: $\sin^2 \alpha + \cos^2 (30^\circ - \alpha) - \sin \alpha \cos (30^\circ - \alpha)$

$$= \sin^2 \alpha + (\cos 30^\circ \cos \alpha + \sin 30^\circ \sin \alpha)^2 - \sin \alpha (\cos 30^\circ \cos \alpha + \sin 30^\circ \sin \alpha)$$

$$\sin^2 \alpha + \frac{3}{4} \cos^2 \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha$$

$$= \frac{3}{4} \sin^2 \alpha + \frac{3}{4} \cos^2 \alpha = \frac{3}{4}.$$

【考点定位】 本题主要考察同角函数关系、两角和与差的三角函数公式、二倍角公式, 考查运算能力、特殊与一般思想、化归与转化思想.

18. (本小题满分 13 分)

如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中 $AA_1=AD=1$, E 为 CD 中点.

(I) 求证: $B_1E \perp AD_1$;

(II) 在棱 AA_1 上是否存在一点 P, 使得 $DP \parallel$ 平面 B_1AE ? 若存在, 求 AP 的长; 若不存在, 说明理由.

(III) 若二面角 $A-B_1E A_1$ 的大小为 30° ，求 AB 的长

【解析】

(1) 以点 A 为原点建立如图的空间直角坐标系，设 $AB=a$ ，

则 $A(0,0,0), D(0,1,0), D_1(0,1,1), E(\frac{a}{2}, 1, 0), B_1(a, 0, 1)$ ，

$\therefore \overrightarrow{AD_1} = (0, 1, 1), \overrightarrow{B_1E} = (-\frac{a}{2}, 1, -1), \overrightarrow{AB_1} = (a, 0, 1), \overrightarrow{AE} = (\frac{a}{2}, 1, 0)$ ，

$\therefore \overrightarrow{AD_1} \cdot \overrightarrow{B_1E} = -\frac{a}{2} \times 0 + 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0, \therefore B_1E \perp AD_1$ 。

(2) 假设在棱上存在一点 $P(0, 0, t)$ ，使得 $DP \parallel$ 平面 B_1AE ，则 $\overrightarrow{DP} = (0, -1, t)$ ，

设平面 B_1AE 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ 。 $\therefore \vec{n} \perp$ 平面 $B_1AE, \therefore \vec{n} \perp AB_1, \vec{n} \perp \overrightarrow{AE}$ ，

$\therefore \begin{cases} ax+z=0 \\ \frac{ax}{2}+y=0 \end{cases}$ ，取 $x=1$ ，得 $\vec{n} = (1, -\frac{a}{2}, -a)$ 要使 $DP \parallel$ 平面 B_1AE ，只要 $\vec{n} \perp \overrightarrow{DP}$ ，

$\therefore \frac{a}{2} - at = 0, t = \frac{1}{2}$ ，又 $DP \not\subset$ 平面 B_1AE, \therefore 存在点 P 使 $DP \parallel$ 平面 B_1AE ，此时 $AP = \frac{1}{2}$ 。

(3) 连接 A_1D, B_1C ，由长方体及 $AA_1 = AD = 1$ ，得 $A_1D \perp AD_1$ ，

$\therefore B_1C \parallel A_1D, \therefore AD_1 \perp B_1C$ ，由 (1) 知 $B_1E \perp AD_1, \therefore AD_1 \perp$ 平面 DCB_1A_1 ，

$\overrightarrow{AD_1}$ 是平面 DCB_1A_1 的法向量， $\overrightarrow{AD_1} = (0, 1, 1)$ ，则 $\cos \langle \overrightarrow{AD_1}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{AD_1} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{AD_1}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{-\frac{a}{2} - a}{\sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{a^2}{4} + a^2}}$ 。

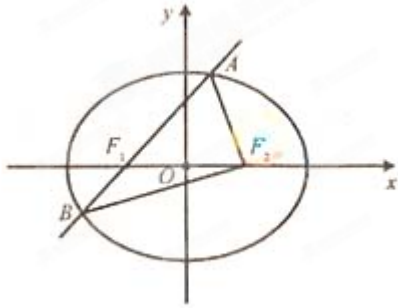
\therefore 二面角是 $30^\circ, \therefore \cos 30^\circ = |\cos \langle \overrightarrow{AD_1}, \vec{n} \rangle|, \therefore \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{a}{2} + a}{\sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{a^2}{4} + a^2}}, \therefore a = 2$ ，即 $AB = 2$ 。

【考点定位】 本题考查直线与直线、直线与平面以及二面角等基础知识，考查空间想象能力、推理论证能力、运算求解能力，考查函数与方程思想、数形结合思想、转化化归思想。

19. (本小题满分 13 分)

如图，椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F_1 ，右焦点为 F_2 ，离心率 $e = \frac{1}{2}$ 。过 F_1 的

直线交椭圆于 A, B 两点，且 $\triangle ABF_2$ 的周长为 8



(I) 求椭圆 E 的方程。

(II) 设动直线 $l: y=kx+m$ 与椭圆 E 有且只有一个公共点 P, 且与直线 $x=4$ 相较于点 Q. 试探究: 在坐标平面内是否存在定点 M, 使得以 PQ 为直径的圆恒过点 M? 若存在, 求出点 M 的坐标; 若不存在, 说明理由

【解析】

(1) 因为 $|AB|+|AF_2|+|BF_2|=8$, 即 $|AF_1|+|F_1B|+|AF_2|+|BF_2|=8$,

$$|AF_1|+|AF_2|=|F_1B|+|BF_2|=2a, \therefore 4a=8, a=2, \therefore \frac{c}{a}=\frac{1}{2}, c=1, b^2=3,$$

所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

$$(2) \text{ 由 } \begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases} \text{ 得 } (4k^2+3)x^2+8kmx+4m^2-12=0.$$

$$\therefore \Delta=64k^2m^2-4(4k^2+3)(4m^2-12)=0, \therefore 4k^2-m^2+3=0.$$

$$x_0=\frac{4km}{4k^2+3}=-\frac{4k}{m}, y_0=\frac{3}{m}, \therefore P\left(-\frac{4k}{m}, \frac{3}{m}\right), \text{ 由 } \begin{cases} y=kx+m \\ x=4 \end{cases} \text{ 得 } Q(4, 4k+m).$$

$$\text{设存在 } M(x_1, 0) \text{ 则 } \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ}=0, \therefore -\frac{16k}{m}+\frac{4kx_1}{m}-4x_1+x_1^2+\frac{12k}{m}+3=0,$$

$$\therefore (4x_1-4)\frac{k}{m}+x_1^2-4x_1+3=0 \text{ 由于对 } m, k \text{ 恒成立, 所以联立解得 } x_1=1,$$

故存在定点 $M(1, 0)$ 符合题意.

【考点定位】 本题考查椭圆的性质、圆的性质、直线与圆的位置关系、平面向量等基本知识, 考查运算求解能力、推理论证能力, 考查转化化归思想、数形结合思想、函数与方程思想、特殊与一般思想.

20. (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x)=e^x+ax^2-ex$, $a \in \mathbb{R}$

(I) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线平行于 x 轴, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 试确定 a 的取值范围, 使得曲线 $y=f(x)$ 上存在唯一的点 P, 曲线在该点处的切线与曲线只有一个公共点 P

【解析】

(1) $\because f'(x) = e^x + 2ax - e, \therefore k = f'(1) = 2a = 0, a = 0, \therefore f(x) = e^x - e$.
 $\therefore x > 1$ 时 $f'(x) > 0, x < 1$ 时, $f'(x) < 0, \therefore$ 增区间是 $(1, +\infty)$, 减区间是 $(-\infty, 1)$.

(2) 设切点 $P(x_0, f(x_0))$, 则切线: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

令 $g(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$, 因为只有一个切点,

所以函数 $g(x)$ 就只有一个零点因为 $g(x_0) = 0$,

$g'(x) = f'(x) - f'(x_0) = e^x - e^{x_0} + 2a(x - x_0)$, 若 $a \geq 0, \therefore g'(x) > 0$,

$g(x) > g(x_0) = 0$, 因此有唯一零点, 由 f 的任意性知 $a \geq 0$ 不合题意.

若 $a < 0$, 令 $h(x) = e^x - e^{x_0} + 2a(x - x_0)$, 则 $h(x_0) = 0$,

$h'(x) = e^x + 2a$, 存在一个零点 $P(\ln(-2a), f(\ln(-2a)))$ 使曲线与曲线有一个公共点.

【考点定位】 本题主要考查函数的导数、导数应用、二次函数的性质、函数的零点等基础知识啊, 考查运算求解能力、抽象概括能力、推理论证能力, 考查数形结合思想、转化化归思想、分类讨论思想、有限与无限思想.

21. 本题设有 (1)、(2)、(3) 三个选考题, 每题 7 分, 请考生任选 2 题作答, 满分 14 分. 如果多做, 则按所做的前两题计分. 作答时, 先用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应题号右边的方框图黑, 并将所选题号填入括号中.

(1) (本小题满分 7 分) 选修 4-2: 矩阵与变换

设曲线 $2x^2 + 2xy + y^2 = 1$ 在矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} (a > 0)$ 对应的变换作用下得到的曲线为 $x^2 + y^2 = 1$.

(I) 求实数 a, b 的值

(II) 求 A^2 的逆矩阵

【解析】

(1) 设曲线 $2x^2 + 2xy + y^2 = 1$ 上任一点 $P(x, y)$ 在矩阵 A 对应的

变换下的像是 $P'(x', y')$, 由 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ bx + y \end{pmatrix}$

得 $\begin{cases} x' = ax \\ y' = bx + y \end{cases}, \therefore P'(x', y')$ 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上, $\therefore (ax)^2 + (bx + y)^2 = 1$.

化简得 $(a^2 + b^2)x^2 + 2bxy + y^2 = 1$, 依题意 $a^2 + b^2 = 2, 2b = 2, \therefore a = 1, b = 1, a = -1, b = 1$.

$\because a > 0, \therefore a = b = 1$.

(2) 由 (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$|A^2| = 1, (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

【考点定位】 本题主要考查矩阵与变换等基础知识, 考查运算求解能力, 考查转化化归思想.

(2) (本小题满分 7 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系中，以坐标原点 O 为极点， x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系。已知直线 l

上两点 M, N 的极坐标分别为 $(2, 0)$ $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\pi}{2})$ ，圆 C 的参数方程

$$\begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta \\ y = -\sqrt{3} + 2\sin\theta \end{cases} (\theta \text{ 为参数}).$$

(I) 设 P 为线段 MN 的中点，求直线 OP 的平面直角坐标方程；

(II) 判断直线 l 与圆 C 的位置关系。

【解析】

(1) 由题意知 $M(2, 0), N(0, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ ，因为 P 是线段 MN 中点，则 $P(1, \frac{\sqrt{3}}{3})$ ，

因此 PO 直角坐标程为： $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 。

(2) 因为直线 l 上两点 $M(2, 0), N(0, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ ，

$\therefore l$ 垂直平分线方程为： $\sqrt{3}x + 3y - 2\sqrt{3} = 0$ 圆心 $(2, -\sqrt{3})$ ，半径 $r = 2$ 。

$\therefore d = \frac{|2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}|}{\sqrt{3+9}} = \frac{3}{2} < r$ ，故直线 l 和圆 C 相交。

【考点定位】 本题主要考查极坐标与参数方程的互化、圆的参数方程等基础知识，考查运算求解能力，考查转化化归思想。

(3) (本小题满分 7 分) 选修 4-5：不等式选讲

已知函数 $f(x) = m - |x-2|$ ， $m \in \mathbb{R}$ ，且 $f(x+2) \geq 0$ 的解集为 $[-1, 1]$ 。

(I) 求 m 的值；

(II) 若 $a, b, c \in \mathbb{R}$ ，且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{3c} = m$ ，求证： $a + 2b + 3c \geq 9$ 。

【解析】

(1) $\because f(x+2) = m - |x| \geq 0, \therefore |x| \leq m$ ，

$\therefore m \geq 0, -m \leq x \leq m, \therefore f(x+2) \geq 0$ 的解集是 $[-1, 1]$

故 $m = 1$ 。

(2) 由 (1) 知 $\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{3c} = 1, a, b, c \in \mathbb{R}$ ，由柯西不等式得

$$\begin{aligned} a + 2b + 3c &= (a + 2b + 3c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{3c} \right) \\ &\geq \left(\sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{2b} \cdot \frac{1}{\sqrt{2b}} + \sqrt{3c} \cdot \frac{1}{\sqrt{3c}} \right)^2 = 9. \end{aligned}$$

【考点定位】 本题主要考查绝对值不等式、柯西不等式等基本知识，考查运算求解能力，考查化归转化思想。

