

2009年北京市普通高等学校招生全国统一考试

数学（理工农医类）

本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，第I卷1至2页，第II卷3至9页，共150分。考试时间120分钟。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第I卷（选择题 共40分）

注意事项：

1. 答第I卷前，考生务必将答题卡上的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔填写，用2B铅笔将准考证号对应的信息点涂黑。
2. 每小题选出答案后，将答题卡上对应题目的答案选中涂满涂黑，黑度以盖住框内字母为准，修改时用橡皮擦除干净。在试卷上作答无效。

一、本大题每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 在复平面内，复数 $z = i(1 + 2i)$ 对应的点位于
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 已知向量 a, b 不共线， $c = ka + b (k \in R), d = a - b$ 如果 $c \parallel d$ ，那么
A. $k = 1$ 且 c 与 d 同向 B. $k = 1$ 且 c 与 d 反向
C. $k = -1$ 且 c 与 d 同向 D. $k = -1$ 且 c 与 d 反向
3. 为了得到函数 $y = \lg \frac{x+3}{10}$ 的图像，只需把函数 $y = \lg x$ 的图像上所有的点
A. 向左平移3个单位长度，再向上平移1个单位长度
B. 向右平移3个单位长度，再向上平移1个单位长度
C. 向左平移3个单位长度，再向下平移1个单位长度
D. 向右平移3个单位长度，再向下平移1个单位长度
4. 若正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为1， AB_1 与底面 $ABCD$ 成 60° 角，则 A_1C_1 到底面 $ABCD$ 的距离为
A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$
5. “ $\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in Z)$ ”是“ $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$ ”的
A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
6. 若 $(1 + \sqrt{2})^5 + a + b\sqrt{2} (a, b \text{ 为有理数})$ ，则 $a + b =$

- A. 45 B. 55 C. 70 D. 80
7. 用0到9这10个数字，可以组成没有重复数字的三位偶数的个数为
A. 324 B. 328 C. 360 D. 648
8. 点 P 在直线 $l: y = x - 1$ 上，若存在过 P 的直线交抛物线 $y = x^2$ 于 A, B 两点，且 $|PA| = |AB|$ ，则称点 P 为“ B 点”，那么下列结论中正确的是
- A. 直线 l 上的所有点都是“ B 点”
- B. 直线 l 上仅有有限个点是“ B 点”
- C. 直线 l 上的所有点都不是“ B 点”
- D. 直线 l 上有无穷多个点（点不是所有的点）是“ B 点”

第II卷（共110分）

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分。把答案填在题中横线上。

9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} - x}{x - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$

10. 若实数 x, y 满足 $\begin{cases} x + y - 2 \geq 0 \\ x \leq 4 \\ y \leq 5 \end{cases}$ 则 $s = y - x$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

11. 设 $f(x)$ 是偶函数，若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率为1，则该曲线在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线的斜率为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 ，点 P 在椭圆上，若 $|PF_1| = 4$ ，则 $|PF_2| = \underline{\hspace{2cm}}$ ；
 $\angle F_1PF_2$ 的小大为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

13. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ (\frac{1}{3})^x, & x \geq 0 \end{cases}$ 则不等式 $|f(x)| \geq \frac{1}{3}$ 的解集为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_{4n-3} = 1, a_{4n-1} = 0, a_{2n} = a_n, n \in \mathbb{N}^*$ ，则 $a_{2009} = \underline{\hspace{2cm}}$ ； $a_{2014} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、解答题：本大题共6小题，共80分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15. （本小题共13分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $B = \frac{\pi}{3}$, $\cos A = \frac{4}{5}$, $b = \sqrt{3}$ 。

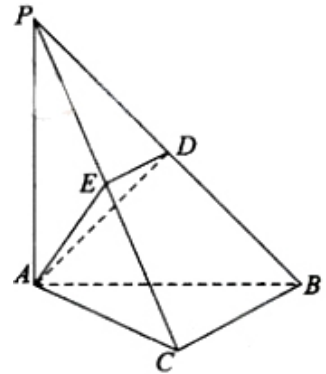
- (I) 求 $\sin C$ 的值；
 (II) 求 $\triangle ABC$ 的面积。

16. (本小题共14分)

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 底面 ABC , $PA = AB$, $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle BCA = 90^\circ$,

点 D, E 分别在棱 PB, PC 上，且 $DE \parallel BC$

- (I) 求证： $BC \perp$ 平面 PAC ；
 (II) 当 D 为 PB 的中点时，求 AD 与平面 PAC 所成的角的大小；
 (III) 是否存在点 E 使得二面角 $A-DE-P$ 为直二面角？并说明理由。



17. (本小题共13分)

某学生在上学路上要经过4个路口，假设在各路口是否遇到红灯是相互独立的，遇到红灯的概率都是 $\frac{1}{3}$ ，遇到红灯时停留的时间都是2min。

- (I) 求这名学生在上学路上到第三个路口时首次遇到红灯的概率；
 (II) 求这名学生在上学路上因遇到红灯停留的总时间 ξ 的分布列及期望。

18. (本小题共13分)

设函数 $f(x) = xe^{kx} (k \neq 0)$

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(III) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内单调递增, 求 k 的取值范围.

19. (本小题共14分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 右准线方程为 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(I) 求双曲线 C 的方程;

(II) 设直线 l 是圆 $O: x^2 + y^2 = 2$ 上动点 $P(x_0, y_0) (x_0 y_0 \neq 0)$ 处的切线, l 与双曲线 C 交

于不同的两点 A, B , 证明 $\angle AOB$ 的大小为定值.

20. (本小题共13分)

已知数集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} (1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n, n \geq 2)$ 具有性质 P : 对任意的

$i, j (1 \leq i < j \leq n)$, $a_i a_j$ 与 $\frac{a_j}{a_i}$ 两数中至少有一个属于 A .

(I) 分别判断数集 $\{1, 3, 4\}$ 与 $\{1, 2, 3, 6\}$ 是否具有性质 P , 并说明理由;

(II) 证明: $a_1 = 1$, 且 $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}} = a_n$;

(III) 证明: 当 $n = 5$ 时, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 成等比数列.