

2009年北京市普通高等学校招生全国统一考试

数学（理工农医类）

本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，第I卷1至2页，第II卷3至9页，共150分。考试时间120分钟。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第I卷（选择题 共40分）

注意事项：

1. 答第I卷前，考生务必将答题卡上的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔填写，用2B铅笔将准考证号对应的信息点涂黑。
2. 每小题选出答案后，将答题卡上对应题目的答案选中涂满涂黑，黑度以盖住框内字母为准，修改时用橡皮擦除干净。在试卷上作答无效。

一、本大题每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 在复平面内，复数 $z = i(1 + 2i)$ 对应的点位于
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 已知向量 a, b 不共线， $c = ka + b (k \in R), d = a - b$ 如果 $c \parallel d$ ，那么
A. $k = 1$ 且 c 与 d 同向 B. $k = 1$ 且 c 与 d 反向
C. $k = -1$ 且 c 与 d 同向 D. $k = -1$ 且 c 与 d 反向
3. 为了得到函数 $y = \lg \frac{x+3}{10}$ 的图像，只需把函数 $y = \lg x$ 的图像上所有的点
A. 向左平移3个单位长度，再向上平移1个单位长度
B. 向右平移3个单位长度，再向上平移1个单位长度
C. 向左平移3个单位长度，再向下平移1个单位长度
D. 向右平移3个单位长度，再向下平移1个单位长度
4. 若正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为1， AB_1 与底面 $ABCD$ 成 60° 角，则 A_1C_1 到底面 $ABCD$ 的距离为
A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$
5. “ $\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in Z)$ ” 是 “ $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$ ” 的
A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
6. 若 $(1 + \sqrt{2})^5 + a + b\sqrt{2} (a, b \text{ 为有理数})$ ，则 $a + b =$

- A. 45 B. 55 C. 70 D. 80
7. 用0到9这10个数字，可以组成没有重复数字的三位偶数的个数为
A. 324 B. 328 C. 360 D. 648
8. 点 P 在直线 $l: y = x - 1$ 上，若存在过 P 的直线交抛物线 $y = x^2$ 于 A, B 两点，且 $|PA| = |AB|$ ，则称点 P 为“ B 点”，那么下列结论中正确的是
- A. 直线 l 上的所有点都是“ B 点”
- B. 直线 l 上仅有有限个点是“ B 点”
- C. 直线 l 上的所有点都不是“ B 点”
- D. 直线 l 上有无穷多个点（点不是所有的点）是“ B 点”

第II卷（共110分）

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分。把答案填在题中横线上。

9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} - x}{x - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$

10. 若实数 x, y 满足 $\begin{cases} x + y - 2 \geq 0 \\ x \leq 4 \\ y \leq 5 \end{cases}$ 则 $s = y - x$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

11. 设 $f(x)$ 是偶函数，若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率为1，则该曲线在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线的斜率为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 ，点 P 在椭圆上，若 $|PF_1| = 4$ ，则 $|PF_2| = \underline{\hspace{2cm}}$ ；
 $\angle F_1PF_2$ 的大小为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

13. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ (\frac{1}{3})^x, & x \geq 0 \end{cases}$ 则不等式 $|f(x)| \geq \frac{1}{3}$ 的解集为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_{4n-3} = 1, a_{4n-1} = 0, a_{2n} = a_n, n \in \mathbb{N}^*$ ，则 $a_{2009} = \underline{\hspace{2cm}}$ ； $a_{2014} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、解答题：本大题共6小题，共80分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15. （本小题共13分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $B = \frac{\pi}{3}$, $\cos A = \frac{4}{5}$, $b = \sqrt{3}$ 。

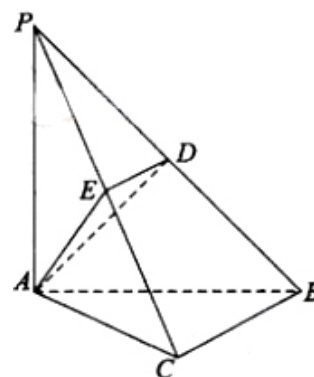
- (I) 求 $\sin C$ 的值；
 (II) 求 $\triangle ABC$ 的面积。

16. (本小题共14分)

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 底面 ABC , $PA = AB$, $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle BCA = 90^\circ$,

点 D, E 分别在棱 PB, PC 上，且 $DE \parallel BC$

- (I) 求证： $BC \perp$ 平面 PAC ；
 (II) 当 D 为 PB 的中点时，求 AD 与平面 PAC 所成的角的大小；
 (III) 是否存在点 E 使得二面角 $A-DE-P$ 为直二面角？并说明理由。



17. (本小题共13分)

某学生在上学路上要经过4个路口，假设在各路口是否遇到红灯是相互独立的，遇到红灯的概率都是 $\frac{1}{3}$ ，遇到红灯时停留的时间都是2min。

- (I) 求这名学生在上学路上到第三个路口时首次遇到红灯的概率；
 (II) 求这名学生在上学路上因遇到红灯停留的总时间 ξ 的分布列及期望。

18. (本小题共13分)

设函数 $f(x) = xe^{kx} (k \neq 0)$

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(III) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内单调递增, 求 k 的取值范围.

19. (本小题共14分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 右准线方程为 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(I) 求双曲线 C 的方程;

(II) 设直线 l 是圆 $O: x^2 + y^2 = 2$ 上动点 $P(x_0, y_0) (x_0 y_0 \neq 0)$ 处的切线, l 与双曲线 C 交

于不同的两点 A, B , 证明 $\angle AOB$ 的大小为定值.

20. (本小题共13分)

已知数集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} (1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n, n \geq 2)$ 具有性质 P : 对任意的

$i, j (1 \leq i \leq j \leq n)$, $a_i a_j$ 与 $\frac{a_j}{a_i}$ 两数中至少有一个属于 A .

(I) 分别判断数集 $\{1, 3, 4\}$ 与 $\{1, 2, 3, 6\}$ 是否具有性质 P , 并说明理由;

(II) 证明: $a_1 = 1$, 且 $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}} = a_n$;

(III) 证明: 当 $n = 5$ 时, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 成等比数列。

参考答案解析

1. B 2. D 3. C 4. D 5. A 6. C 7. B 8. A

9. $\frac{1}{2}$ 10. -6 11. -1 12. $2, 120^\circ$ 13. $[-3, 1]$ 14. $1, 0$

三、解答题: 本大题共6小题, 共80分。解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。

15. (I) $\because A, B, C$ 为 $\triangle ABC$ 的内角, 且 $B = \frac{\pi}{3}, \cos A = \frac{4}{5},$

$$\therefore C = \frac{2\pi}{3} - A, \sin A = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \sin C = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A + \frac{1}{2} \sin A = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{10}.$$

(II) 由 (I) 知 $\sin A = \frac{3}{5}, \sin C = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{10},$

$$\text{又} \because B = \frac{\pi}{3}, b = \sqrt{3},$$

\therefore 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理, 得

$$\therefore a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{6}{5}.$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times \frac{6}{5} \times \sqrt{3} \times \frac{3 + 4\sqrt{3}}{10} = \frac{36 + 9\sqrt{3}}{50}.$$

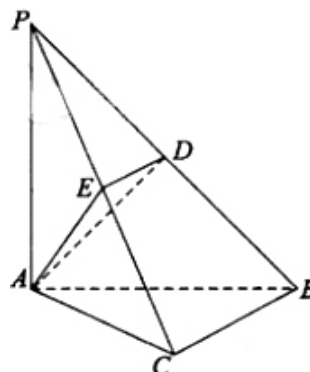
16. (I) $\because PA \perp$ 底面 $ABC, \therefore PA \perp BC.$

又 $\angle BCA = 90^\circ, \therefore AC \perp BC.$

$\therefore BC \perp$ 平面 $PAC.$

(II) $\because D$ 为 PB 的中点, $DE \parallel BC,$

$$\therefore DE = \frac{1}{2} BC,$$



又由 (I) 知, $BC \perp$ 平面 PAC ,
 $\therefore DE \perp$ 平面 PAC , 垂足为点 E .
 $\therefore \angle DAE$ 是 AD 与平面 PAC 所成的角,
 $\therefore PA \perp$ 底面 ABC , $\therefore PA \perp AB$, 又 $PA=AB$,

$$\therefore \triangle ABP \text{ 为等腰直角三角形, } \therefore AD = \frac{1}{\sqrt{2}} AB,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中, } \angle ABC = 60^\circ, \therefore BC = \frac{1}{2} AB.$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ADE \text{ 中, } \sin \angle DAE = \frac{DE}{AD} = \frac{BC}{2AD} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\therefore AD \text{ 与平面 } PAC \text{ 所成的角的大小为 } \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

(III) $\therefore DE \parallel BC$, 又由 (I) 知, $BC \perp$ 平面 PAC , $\therefore DE \perp$ 平面 PAC ,
 又 $\therefore AE \subset$ 平面 PAC , $PE \subset$ 平面 PAC , $\therefore DE \perp AE$, $DE \perp PE$,
 $\therefore \angle AEP$ 为二面角 $A-DE-P$ 的平面角,

$\therefore PA \perp$ 底面 ABC , $\therefore PA \perp AC$, $\therefore \angle PAC = 90^\circ$..

\therefore 在棱 PC 上存在一点 E , 使得 $AE \perp PC$, 这时 $\angle AEP = 90^\circ$,

故存在点 E 使得二面角 $A-DE-P$ 是直二面角.

17 (I) 设这名学生在上学路上到第三个路口时首次遇到红灯为事件 A , 因为事件 A 等价于事件“这名学生在第一和第二个路口没有遇到红灯, 在第三个路口遇到红灯”, 所以事件 A

$$\text{的概率为 } P(A) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}.$$

(II) 由题意可得, ξ 可能取的值为 $0, 2, 4, 6, 8$ (单位: min) ..

事件“ $\xi = 2k$ ”等价于事件“该学生在路上遇到 k 次红灯” ($k = 0, 1, 2, 3, 4$),

$$\therefore P(\xi = 2k) = C_4^k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{4-k} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4),$$

\therefore 即 ξ 的分布列是

ξ	0	2	4	6	8
P	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

$$\therefore \xi \text{ 的期望是 } E\xi = 0 \times \frac{16}{81} + 2 \times \frac{32}{81} + 4 \times \frac{8}{27} + 6 \times \frac{8}{81} + 8 \times \frac{1}{81} = \frac{8}{3}.$$

18. (I) $f'(x) = (1+kx)e^{kx}, f'(0) = 1, f(0) = 0$,

曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = x$

$$(II) \text{ 由 } f'(x) = (1+kx)e^{kx} = 0, \text{ 得 } x = -\frac{1}{k} (k \neq 0),$$

若 $k > 0$, 则当 $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{k}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in \left(-\frac{1}{k}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增,

若 $k < 0$, 则当 $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{k}\right)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in \left(-\frac{1}{k}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减,

(III) 由 (II) 知, 若 $k > 0$, 则当且仅当 $-\frac{1}{k} \leq -1$, 即 $k \leq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在

$(-1, 1)$ 内单调递增;

若 $k < 0$, 则当且仅当 $-\frac{1}{k} \geq 1$, 即 $k \geq -1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内单调递增,

综上所述, 函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内单调递增时, k 的取值范围是

$[-1, 0) \cup (0, 1]$.

$$19. (I) \text{ 由题意, 得 } \begin{cases} \frac{a^2}{c} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{c}{a} = \sqrt{3} \end{cases}, \text{ 解得 } a = 1, c = \sqrt{3}, \therefore b^2 = c^2 - a^2 = 2,$$

$$\therefore \text{所求双曲线 } C \text{ 的方程为 } x^2 - \frac{y^2}{2} = 1.$$

(II) 点 $P(x_0, y_0) (x_0 y_0 \neq 0)$ 在圆 $x^2 + y^2 = 2$ 上,

圆在点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程为 $y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$, 化简得 $x_0 x + y_0 y = 2$

$$\text{由 } \begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{2} = 1 \\ x_0 x + y_0 y = 2 \end{cases} \text{ 及 } x_0^2 + y_0^2 = 2 \text{ 得 } (3x_0^2 - 4)x^2 - 4x_0 x + 8 - 2x_0^2 = 0,$$

\therefore 切线 l 与双曲线 C 交于不同的两点 A, B , 且 $0 < x_0^2 < 2$,

$$\therefore 3x_0^2 - 4 \neq 0, \text{ 且 } \Delta = 16x_0^2 - 4(3x_0^2 - 4)(8 - 2x_0^2) > 0,$$

设A、B两点的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{4x_0}{3x_0^2 - 4}, x_1 x_2 = \frac{8 - 2x_0^2}{3x_0^2 - 4}, \therefore \cos \angle AOB = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|},$$

$$\text{且 } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = x_1 x_2 + \frac{1}{y_0^2} (2 - x_0 x_1)(2 - x_0 x_2),$$

$$= x_1 x_2 + \frac{1}{2 - x_0^2} [4 - 2x_0(x_1 + x_2) + x_0^2 x_1 x_2]$$

$$= \frac{8 - 2x_0^2}{3x_0^2 - 4} + \frac{1}{2 - x_0^2} \left[4 - \frac{8x_0^2}{3x_0^2 - 4} + \frac{x_0^2(8 - 2x_0^2)}{3x_0^2 - 4} \right]$$

$$= \frac{8 - 2x_0^2}{3x_0^2 - 4} + \frac{2x_0^2 - 8}{3x_0^2 - 4} = 0.$$

$\therefore \angle AOB$ 的大小为 90° .

20. (I) 由于 3×4 与 $\frac{4}{3}$ 均不属于数集 $\{1, 3, 4\}$, \therefore 该数集不具有性质P.

由于 $1 \times 2, 1 \times 3, 1 \times 6, 2 \times 3, \frac{6}{2}, \frac{6}{3}, \frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{6}{6}$ 都属于数集 $\{1, 2, 3, 6\}$,

\therefore 该数集具有性质P.

(II) $\because A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 具有性质P, $\therefore a_n a_n$ 与 $\frac{a_n}{a_n}$ 中至少有一个属于A,

由于 $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n$, $\therefore a_n a_n > a_n$, 故 $a_n a_n \notin A$.

从而 $1 = \frac{a_n}{a_n} \in A$, $\therefore a_1 = 1$

$\because 1 = a_1 < a_2 < \dots < a_n$, $\therefore a_k a_n > a_n$, 故 $a_k a_n \notin A (k = 2, 3, \dots, n)$.

由A具有性质P可知 $\frac{a_n}{a_k} \in A (k = 1, 2, 3, \dots, n)$.

又 $\because \frac{a_n}{a_n} < \frac{a_n}{a_{n-1}} < \dots < \frac{a_n}{a_2} < \frac{a_n}{a_1}$, $\therefore \frac{a_n}{a_n} = a_1, \frac{a_n}{a_{n-1}} = a_2, \dots, \frac{a_n}{a_2} = a_{n-1}, \frac{a_n}{a_1} = a_n$,

$$\text{从而 } \frac{a_n}{a_n} + \frac{a_n}{a_{n-1}} + \cdots + \frac{a_n}{a_2} + \frac{a_n}{a_1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n, \therefore \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}} = a_n.$$

(III) 由 (II) 知, 当 $n=5$ 时, 有 $\frac{a_5}{a_4} = a_2, \frac{a_5}{a_3} = a_3$, 即 $a_5 = a_2 a_4 = a_3^2$,

$\because 1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_5, \therefore a_3 a_4 > a_2 a_4 = a_5, \therefore a_3 a_4 \notin A$, 由 A 具有性质 P 可知 $\frac{a_4}{a_3} \in A$.

由 $a_2 a_4 = a_3^2$, 得 $\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} \in A$, 且 $1 < \frac{a_3}{a_2} < a_3, \therefore \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_3}{a_2} = a_2, \therefore$

$$\frac{a_5}{a_4} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} = a_2,$$

即 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 是首项为 1, 公比为 a_2 成等比数列.

解析

一、本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 在复平面内，复数 $z = i(1 + 2i)$ 对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】 B

【解析】 本题主要考查复数在复平面内复数与点的对应关系. 属于基础知识的考查.

$\because z = i(1 + 2i) = i + 2i^2 = -2 + i$, \therefore 复数 z 所对应的点为 $(-2, 1)$, 故选 B.

2. 已知向量 a 、 b 不共线, $c = ka + b (k \in \mathbb{R})$, $d = a - b$, 如果 $c \parallel d$, 那么 ()

- A. $k = 1$ 且 c 与 d 同向 B. $k = 1$ 且 c 与 d 反向
C. $k = -1$ 且 c 与 d 同向 D. $k = -1$ 且 c 与 d 反向

【答案】 D

【解析】 本题主要考查向量的共线(平行)、向量的加减法.

属于基础知识、基本运算的考查.

取 $a = (1, 0)$, $b = (0, 1)$, 若 $k = 1$, 则 $c = a + b = (1, 1)$, $d = a - b = (1, -1)$,

显然, a 与 b 不平行, 排除 A、B.

若 $k = -1$, 则 $c = -a + b = (-1, 1)$, $d = a - b = (1, -1)$,

即 $c \parallel d$ 且 c 与 d 反向, 排除 C, 故选 D.

3. 为了得到函数 $y = \lg \frac{x+3}{10}$ 的图像, 只需把函数 $y = \lg x$ 的图像上所有的点 ()

- A. 向左平移3个单位长度, 再向上平移1个单位长度
B. 向右平移3个单位长度, 再向上平移1个单位长度
C. 向左平移3个单位长度, 再向下平移1个单位长度
D. 向右平移3个单位长度, 再向下平移1个单位长度

【答案】 C

【解析】 本题主要考查函数图象的平移变换. 属于基础知识、基本运算的考查.

A. $y = \lg(x+3) + 1 = \lg 10(x+3)$,

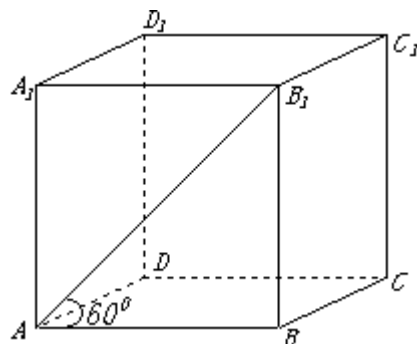
B. $y = \lg(x-3) + 1 = \lg 10(x-3)$,

C. $y = \lg(x+3) - 1 = \lg \frac{x+3}{10}$,

D. $y = \lg(x-3) - 1 = \lg \frac{x-3}{10}$.

故应选 C.

4. 若正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为1,



AB_1 与底面 $ABCD$ 成 60° 角, 则 A_1C_1

到底面 $ABCD$ 的距离为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. 1
C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

【答案】 D

【解析】 本题主要考查正四棱柱的概念、直线与平面所成的角以及直线与平面的距离等概念. (第4题解答图)
属于基础知识、基本运算的考查.

依题意, $\angle B_1AB = 60^\circ$, 如图,

$$BB_1 = 1 \times \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \text{ 故选D.}$$

5. “ $\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ”是“ $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$ ”的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】 A

【解析】 本题主要考查三角函数的基本概念、简易逻辑中充要条件的判断.
属于基础知识、基本运算的考查.

$$\text{当 } \alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \text{ 时, } \cos 2\alpha = \cos \left(4k\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\text{反之, 当 } \cos 2\alpha = \frac{1}{2} \text{ 时, 有 } 2\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = k\pi + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{或 } 2\alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = k\pi - \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z}), \text{ 故应选A.}$$

6. 若 $(1 + \sqrt{2})^5 = a + b\sqrt{2}$ (a, b 为有理数), 则 $a + b =$ ()

- A. 45 B. 55 C. 70 D. 80

【答案】 C

【解析】 本题主要考查二项式定理及其展开式. 属于基础知识、基本运算的考查.

$$\begin{aligned} \therefore (1 + \sqrt{2})^5 &= C_5^0 (\sqrt{2})^0 + C_5^1 (\sqrt{2})^1 + C_5^2 (\sqrt{2})^2 + C_5^3 (\sqrt{2})^3 + C_5^4 (\sqrt{2})^4 + C_5^5 (\sqrt{2})^5 \\ &= 1 + 5\sqrt{2} + 20 + 20\sqrt{2} + 20 + 4\sqrt{2} = 41 + 29\sqrt{2}, \end{aligned}$$

由已知, 得 $41 + 29\sqrt{2} = a + b\sqrt{2}$, $\therefore a + b = 41 + 29 = 70$. 故选C.

7. 用0到9这10个数字, 可以组成没有重复数字的三位偶数的个数为 ()

- A. 324 B. 328 C. 360 D. 648

【答案】 B

【解析】 本题主要考查排列组合知识以及分类计数原理和分步计数原理知识. 属于基础知识、基本运算的考查.

首先应考虑“0”是特殊元素, 当0排在末位时, 有 $A_9^2 = 9 \times 8 = 72$ (个),

当0不排在末位时, 有 $A_4^1 \cdot A_8^1 \cdot A_8^1 = 4 \times 8 \times 8 = 256$ (个),

于是由分类计数原理, 得符合题意的偶数共有 $72 + 256 = 328$ (个). 故选B.

8. 点 P 在直线 $l: y = x - 1$ 上, 若存在过 P 的直线交抛物线 $y = x^2$ 于 A, B 两点, 且

$|PA| = |AB|$, 则称点 P 为“ B 点”, 那么下列结论中正确的是 ()

- A. 直线 l 上的所有点都是“ B 点”
- B. 直线 l 上仅有有限个点是“ B 点”
- C. 直线 l 上的所有点都不是“ B 点”
- D. 直线 l 上有无穷多个点 (但不是所有的点) 是“ B 点”

【答案】 A

【解析】 本题主要考查阅读与理解、信息迁移以及学生的学习潜力, 考查学生分析问题和解决问题的能力. 属于创新题型.

本题采作数形结合法易于求解, 如图,

设 $A(m, n), P(x, x - 1)$,

则 $B(2m - x, 2n - x - 2)$,

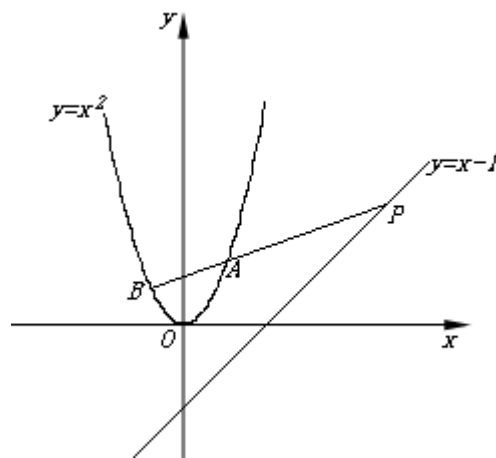
$\because A, B$ 在 $y = x^2$ 上,

$$\therefore \begin{cases} n = m^2 \\ 2n - x + 1 = (2m - x)^2 \end{cases}$$

消去 n , 整理得关于 x 的方程 $x^2 - (4m - 1)x + 2m^2 - 1 = 0$ (1)

$\because \Delta = (4m - 1)^2 - 4(2m^2 - 1) = 8m^2 - 8m + 5 > 0$ 恒成立,

\therefore 方程 (1) 恒有实数解, \therefore 应选A.



2009年普通高等学校招生全国统一考试

数学 (理工农医类) (北京卷)

第II卷（共110分）

注意事项：

1. 用钢笔或圆珠笔将答案直接写在试卷上。
2. 答卷前将密封线内的项目填写清楚。

题号	二	三						总分
		15	16	17	18	19	20	
分数								

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分。把答案填在题中横线上。

9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} - x}{x - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 本题主要考极限的基本运算，其中重点考查如何约去“零因子”。属于基础知识、基本运算的考查。

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} - x}{(\sqrt{x})^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}, \text{ 故应填 } \frac{1}{2}.$$

10. 若实数 x, y 满足 $\begin{cases} x + y - 2 \geq 0 \\ x \leq 4 \\ y \leq 5 \end{cases}$ 则

$s = y - x$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

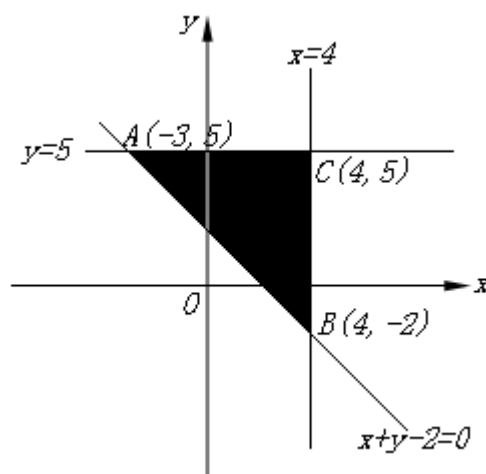
【答案】 -6

【解析】 本题主要考查线性规划方面的基础知识。属于基础知识、基本运算的考查。

如图，当 $x = 4, y = -2$ 时，

$$s = y - x - 2 - 4 = -6 \text{ 为最小值.}$$

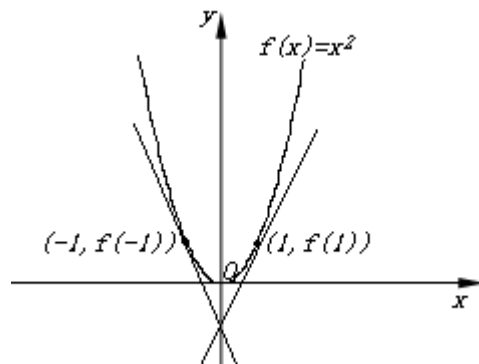
故应填 -6 .



11. 设 $f(x)$ 是偶函数，若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率为1，则该曲线在 $(-1, f(-1))$ 处的切线的斜率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -1

【解析】 本题主要考查导数与曲线在某一点处切线的斜率的概念。属于基础知识、基本运算的考查。



取 $f(x) = x^2$ ，如图，采用数形结合法，

易得该曲线在 $(-1, f(-1))$ 处的切线的斜率为 -1 。

故应填 -1 。

12. 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 ，点 P 在椭圆上，若 $|PF_1| = 4$ ，则 $|PF_2| =$ _____

； $\angle F_1PF_2$ 的大小为 _____。

【答案】 2, 120°

【解析】 本题主要考查椭圆的定义、焦点、长轴、短轴、焦距之间的关系以及余弦定理。
属

于基础知识、基本运算的考查。

$$\because a^2 = 9, b^2 = 3,$$

$$\therefore c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 2} = \sqrt{7},$$

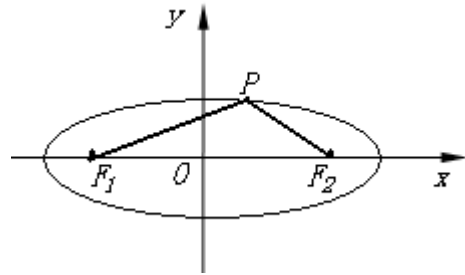
$$\therefore |F_1F_2| = 2\sqrt{7},$$

$$\text{又 } |PF_1| = 4, |PF_1| + |PF_2| = 2a = 6,$$

$$\therefore |PF_2| = 2,$$

$$\text{又由余弦定理，得 } \cos \angle F_1PF_2 = \frac{2^2 + 4^2 - (2\sqrt{7})^2}{2 \times 2 \times 4} = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle F_1PF_2 = 120^\circ, \text{ 故应填 } 2, 120^\circ.$$



13. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ (\frac{1}{3})^x, & x \geq 0 \end{cases}$ 则不等式 $|f(x)| \geq \frac{1}{3}$ 的解集为 _____。

【答案】 $[-3, 1]$

【解析】 本题主要考查分段函数和简单绝对值不等式的解法。
属于基础知识、基本运算的考查。

$$(1) \text{ 由 } |f(x)| \geq \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \left| \frac{1}{x} \right| \geq \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow -3 \leq x < 0.$$

$$(2) \text{ 由 } |f(x)| \geq \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \left| \left(\frac{1}{3} \right)^x \right| \geq \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \left(\frac{1}{3} \right)^x \geq \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x \leq 1.$$

\therefore 不等式 $|f(x)| \geq \frac{1}{3}$ 的解集为 $\{x | -3 \leq x \leq 1\}$, \therefore 应填 $[-3, 1]$.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{4n-3} = 1, a_{4n-1} = 0, a_{2n} = a_n, n \in \mathbb{N}^*$, 则 $a_{2009} =$ _____;

$a_{2014} =$ _____.

【答案】 1, 0

【解析】 本题主要考查周期数列等基础知识. 属于创新题型.

依题意, 得 $a_{2009} = a_{4 \times 503 - 3} = 1$, $a_{2014} = a_{2 \times 1007} = a_{1007} = a_{4 \times 252 - 1} = 0$.

\therefore 应填 1, 0.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

15. (本小题共 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 $a, b, c, B = \frac{\pi}{3}, \cos A = \frac{4}{5}, b = \sqrt{3}$.

(I) 求 $\sin C$ 的值;

(II) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【解析】 本题主要考查三角形中的三角函数变换及求值、诱导公式、三角形的面积公式等基础知识, 主要考查基本运算能力.

(I) $\because A, B, C$ 为 $\triangle ABC$ 的内角, 且 $B = \frac{\pi}{3}, \cos A = \frac{4}{5}$,

$$\therefore C = \frac{2\pi}{3} - A, \sin A = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \sin C = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A + \frac{1}{2} \sin A = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{10}.$$

(II) 由 (I) 知 $\sin A = \frac{3}{5}, \sin C = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{10}$,

$$\text{又} \because B = \frac{\pi}{3}, b = \sqrt{3},$$

\therefore 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理, 得

$$\therefore a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{6}{5}.$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times \frac{6}{5} \times \sqrt{3} \times \frac{3 + 4\sqrt{3}}{10} = \frac{36 + 9\sqrt{3}}{50}.$$

16. (本小题共 14 分)

如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABC, PA = AB, \angle ABC = 60^\circ, \angle BCA = 90^\circ$,

点 D , E 分别在棱 PB, PC 上, 且 $DE \parallel BC$.

(I) 求证: $BC \perp$ 平面 PAC ;

(II) 当 D 为 PB 的中点时, 求 AD 与平面 PAC 所成的角的大小;

(III) 是否存在点 E 使得二面角 $A-DE-P$ 为直二面角? 并说明理由.

【解法1】 本题主要考查直线和平面垂直、直线与平面所成的角、二面角等基础知识, 考查空间想象能力、运算能力和推理论证能力.

(I) $\because PA \perp$ 底面 ABC , $\therefore PA \perp BC$.

又 $\angle BCA = 90^\circ$, $\therefore AC \perp BC$.

$\therefore BC \perp$ 平面 PAC .

(II) $\because D$ 为 PB 的中点, $DE \parallel BC$,

$$\therefore DE = \frac{1}{2} BC,$$

又由 (I) 知, $BC \perp$ 平面 PAC ,

$\therefore DE \perp$ 平面 PAC , 垂足为点 E .

$\therefore \angle DAE$ 是 AD 与平面 PAC 所成的角,

$\because PA \perp$ 底面 ABC , $\therefore PA \perp AB$, 又 $PA = AB$,

$$\therefore \triangle ABP \text{ 为等腰直角三角形, } \therefore AD = \frac{1}{\sqrt{2}} AB,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中, } \angle ABC = 60^\circ, \therefore BC = \frac{1}{2} AB.$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ADE \text{ 中, } \sin \angle DAE = \frac{DE}{AD} = \frac{BC}{2AD} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\therefore AD \text{ 与平面 } PAC \text{ 所成的角的大小为 } \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

(III) $\because DE \parallel BC$, 又由 (I) 知, $BC \perp$ 平面 PAC , $\therefore DE \perp$ 平面 PAC ,

又 $\because AE \subset$ 平面 PAC , $PE \subset$ 平面 PAC , $\therefore DE \perp AE$, $DE \perp PE$,

$\therefore \angle AEP$ 为二面角 $A-DE-P$ 的平面角,

$\because PA \perp$ 底面 ABC , $\therefore PA \perp AC$, $\therefore \angle PAC = 90^\circ$.

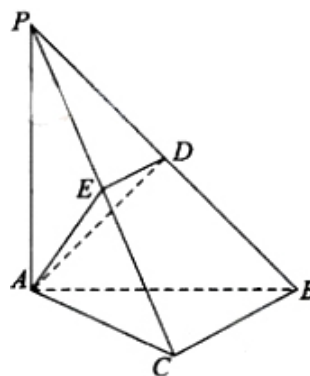
\therefore 在棱 PC 上存在一点 E , 使得 $AE \perp PC$, 这时 $\angle AEP = 90^\circ$,

故存在点 E 使得二面角 $A-DE-P$ 是直二面角.

【解法2】 如图, 以 A 为原点建立空间直角坐标系 $A-xyz$,

设 $PA = a$, 由已知可得

$$A(0,0,0), B\left(-\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a, 0\right), C\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}a, 0\right), P(0,0,a).$$



$$(I) \because \overrightarrow{AP} = (0, 0, a), \overrightarrow{BC} = \left(\frac{1}{2}a, 0, 0\right),$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AP} = 0, \therefore BC \perp AP.$$

又 $\because \angle BCA = 90^\circ$, $\therefore BC \perp AC$, $\therefore BC \perp$ 平面 PAC .

(II) $\because D$ 为 PB 的中点, $DE \parallel BC$, $\therefore E$ 为 PC 的中点,

$$\therefore D\left(-\frac{1}{4}a, \frac{\sqrt{3}}{4}a, \frac{1}{2}a\right), E\left(0, \frac{\sqrt{3}}{4}a, \frac{1}{2}a\right),$$

\therefore 又由 (I) 知, $BC \perp$ 平面 PAC , $\therefore DE \perp$ 平面 PAC , 垂足为点 E .

$\therefore \angle DAE$ 是 AD 与平面 PAC 所成的角,

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \left(-\frac{1}{4}a, \frac{\sqrt{3}}{4}a, \frac{1}{2}a\right), \overrightarrow{AE} = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{4}a, \frac{1}{2}a\right),$$

$$\therefore \cos \angle DAE = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AE}|} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

$\therefore AD$ 与平面 PAC 所成的角的大小为 $\arccos \frac{\sqrt{14}}{4}$.

(III) 同解法1.

17. (本小题共13分)

某学生在上学路上要经过4个路口, 假设在各路口是否遇到红灯是相互独立的, 遇到红灯的概率都是 $\frac{1}{3}$, 遇到红灯时停留的时间都是2min.

(I) 求这名学生在上学路上到第三个路口时首次遇到红灯的概率;

(II) 求这名学生在上学路上因遇到红灯停留的总时间 ξ 的分布列及期望.

【解析】 本题主要考查随机事件、互斥事件、相互独立事件等概率知识、考查离散型随机变量的分布列和期望等基础知识, 考查运用概率与统计知识解决实际问题的能力.

(I) 设这名学生在上学路上到第三个路口时首次遇到红灯为事件 A , 因为事件 A 等价于事件“这名学生在第一和第二个路口没有遇到红灯, 在第三个路口遇到红灯”, 所以事件

$$A \text{ 的概率为 } P(A) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}.$$

(II) 由题意可得, ξ 可能取的值为0, 2, 4, 6, 8 (单位: min) ..

事件“ $\xi = 2k$ ”等价于事件“该学生在路上遇到 k 次红灯” ($k = 0, 1, 2, 3, 4$)

$$\therefore P(\xi = 2k) = C_4^k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{4-k} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4),$$

∴即 ξ 的分布列是

ξ	0	2	4	6	8
P	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

$$\therefore \xi \text{ 的期望是 } E\xi = 0 \times \frac{16}{81} + 2 \times \frac{32}{81} + 4 \times \frac{8}{27} + 6 \times \frac{8}{81} + 8 \times \frac{1}{81} = \frac{8}{3}.$$

18. (本小题共13分)

设函数 $f(x) = xe^{kx} (k \neq 0)$

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(III) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内单调递增, 求 k 的取值范围.

【解析】 本题主要考查利用导数研究函数的单调性和极值、解不等式等基础知识, 考查综合分析和解决问题的能力.

$$(I) f'(x) = (1+kx)e^{kx}, f'(0) = 1, f(0) = 0,$$

曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = x$

$$(II) \text{ 由 } f'(x) = (1+kx)e^{kx} = 0, \text{ 得 } x = -\frac{1}{k} (k \neq 0),$$

若 $k > 0$, 则当 $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{k}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in \left(-\frac{1}{k}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增,

若 $k < 0$, 则当 $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{k}\right)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in \left(-\frac{1}{k}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减.

(III) 由 (II) 知, 若 $k > 0$, 则当且仅当 $-\frac{1}{k} \leq -1$, 即 $k \leq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在

$(-1, 1)$ 内单调递增;

若 $k < 0$ ，则当且仅当 $-\frac{1}{k} \geq 1$ ，即 $k \geq -1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内单调递增，

综上所述，函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内单调递增时， k 的取值范围是

$$[-1, 0) \cup (0, 1].$$

19. (本小题共14分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$ ，右准线方程为 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(I) 求双曲线 C 的方程；

(II) 设直线 l 是圆 $O: x^2 + y^2 = 2$ 上动点 $P(x_0, y_0) (x_0 y_0 \neq 0)$ 处的切线， l 与双曲线

C 交于不同的两点 A, B ，证明 $\angle AOB$ 的大小为定值.

【解法1】 本题主要考查双曲线的标准方程、圆的切线方程等基础知识，考查曲线和方程的关系等解析几何的基本思想方法，考查推理、运算能力.

$$(I) \text{ 由题意, 得 } \begin{cases} \frac{a^2}{c} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \frac{c}{a} = \sqrt{3} \end{cases},$$

$$\text{解得 } a = 1, c = \sqrt{3},$$

$$\therefore b^2 = c^2 - a^2 = 2,$$

$$\therefore \text{所求双曲线 } C \text{ 的方程为 } x^2 - \frac{y^2}{2} = 1.$$

(II) 点 $P(x_0, y_0) (x_0 y_0 \neq 0)$ 在圆 $x^2 + y^2 = 2$ 上，

$$\text{圆在点 } P(x_0, y_0) \text{ 处的切线方程为 } y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0),$$

$$\text{化简得 } x_0 x + y_0 y = 2$$

$$\text{由 } \begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{2} = 1 \\ x_0 x + y_0 y = 2 \end{cases} \text{ 及 } x_0^2 + y_0^2 = 2 \text{ 得 } (3x_0^2 - 4)x^2 - 4x_0 x + 8 - 2x_0^2 = 0,$$

$$\therefore \text{切线 } l \text{ 与双曲线 } C \text{ 交于不同的两点 } A, B, \text{ 且 } 0 < x_0^2 < 2,$$

$$\therefore 3x_0^2 - 4 \neq 0, \text{ 且 } \Delta = 16x_0^2 - 4(3x_0^2 - 4)(8 - 2x_0^2) > 0,$$

设A、B两点的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{4x_0}{3x_0^2 - 4}, x_1x_2 = \frac{8 - 2x_0^2}{3x_0^2 - 4},$$

$$\therefore \cos \angle AOB = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{|\overline{OA}| \cdot |\overline{OB}|},$$

$$\text{且 } \overline{OA} \cdot \overline{OB} = x_1x_2 + y_1y_2 = x_1x_2 + \frac{1}{y_0^2}(2 - x_0x_1)(2 - x_0x_2),$$

$$= x_1x_2 + \frac{1}{2 - x_0^2} [4 - 2x_0(x_1 + x_2) + x_0^2x_1x_2]$$

$$= \frac{8 - 2x_0^2}{3x_0^2 - 4} + \frac{1}{2 - x_0^2} \left[4 - \frac{8x_0^2}{3x_0^2 - 4} + \frac{x_0^2(8 - 2x_0^2)}{3x_0^2 - 4} \right]$$

$$= \frac{8 - 2x_0^2}{3x_0^2 - 4} + \frac{2x_0^2 - 8}{3x_0^2 - 4} = 0.$$

$\therefore \angle AOB$ 的大小为 90° .

【解法2】

(I) 同解法1

(II) 点 $P(x_0, y_0)$ ($x_0y_0 \neq 0$) 在圆 $x^2 + y^2 = 2$ 上,

圆在点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程为 $y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$,

化简得 $x_0x + y_0y = 2$.

$$\text{由 } \begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{2} = 1 \\ x_0x + y_0y = 2 \end{cases} \quad \text{及 } x_0^2 + y_0^2 = 2 \text{ 得}$$

$$(3x_0^2 - 4)x^2 - 4x_0x + 8 - 2x_0^2 = 0 \quad \text{①}$$

$$(3x_0^2 - 4)y^2 - 8y_0x - 8 + 2x_0^2 = 0 \quad \text{②}$$

\therefore 切线 l 与双曲线 C 交于不同的两点A、B, $\therefore 3x_0^2 - 4 \neq 0$,

设A、B两点的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,

$$\text{则 } x_1x_2 = \frac{8-2x_0^2}{3x_0^2-4}, y_1y_2 = \frac{2x_0^2-8}{3x_0^2-4},$$

$$\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1x_2 + y_1y_2 = 0,$$

$\therefore \angle AOB$ 的大小为 90° .

($\because x_0^2 + y_0^2 = 2$ 且 $x_0y_0 \neq 0$, $\therefore 0 < x_0^2 < 2, 0 < y_0^2 < 2$, 从而当 $3x_0^2 - 4 \neq 0$ 时, 方程①和方程②的判别式均大于零).

20. (本小题共13分)

已知数集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} (1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n, n \geq 2)$ 具有性质 P : 对任意的

$i, j (1 \leq i \leq j \leq n)$, $a_i a_j$ 与 $\frac{a_j}{a_i}$ 两数中至少有一个属于 A .

(I) 分别判断数集 $\{1, 3, 4\}$ 与 $\{1, 2, 3, 6\}$ 是否具有性质 P , 并说明理由;

(II) 证明: $a_1 = 1$, 且 $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}} = a_n$;

(III) 证明: 当 $n = 5$ 时, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 成等比数列.

【解析】 本题主要考查集合、等比数列的性质, 考查运算能力、推理论证能力、分类讨论等数学思想方法. 本题是数列与不等式的综合题, 属于较难层次题.

(I) 由于 3×4 与 $\frac{4}{3}$ 均不属于数集 $\{1, 3, 4\}$, \therefore 该数集不具有性质 P .

由于 $1 \times 2, 1 \times 3, 1 \times 6, 2 \times 3, \frac{6}{2}, \frac{6}{3}, \frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{6}{6}$ 都属于数集 $\{1, 2, 3, 6\}$,

\therefore 该数集具有性质 P .

(II) $\because A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 具有性质 P , $\therefore a_n a_n$ 与 $\frac{a_n}{a_n}$ 中至少有一个属于 A ,

由于 $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n$, $\therefore a_n a_n > a_n$, 故 $a_n a_n \notin A$.

从而 $1 = \frac{a_n}{a_n} \in A$, $\therefore a_1 = 1$

$\because 1 = a_1 < a_2 < \dots < a_n$, $\therefore a_k a_n > a_n$, 故 $a_k a_n \notin A (k = 2, 3, \dots, n)$.

由 A 具有性质 P 可知 $\frac{a_n}{a_k} \in A (k = 1, 2, 3, \dots, n)$.

$$\text{又} \because \frac{a_n}{a_n} < \frac{a_n}{a_{n-1}} < \cdots < \frac{a_n}{a_2} < \frac{a_n}{a_1},$$

$$\therefore \frac{a_n}{a_n} = a_1, \frac{a_n}{a_{n-1}} = a_2, \cdots, \frac{a_n}{a_2} = a_{n-1}, \frac{a_n}{a_1} = a_n,$$

$$\text{从而} \frac{a_n}{a_n} + \frac{a_n}{a_{n-1}} + \cdots + \frac{a_n}{a_2} + \frac{a_n}{a_1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n,$$

$$\therefore \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}} = a_n.$$

(III) 由(II)知, 当 $n=5$ 时, 有 $\frac{a_5}{a_4} = a_2, \frac{a_5}{a_3} = a_3$, 即 $a_5 = a_2 a_4 = a_3^2$,

$$\therefore 1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_5,$$

$$\therefore a_3 a_4 > a_2 a_4 = a_5, \therefore a_3 a_4 \notin A,$$

由A具有性质P可知 $\frac{a_4}{a_3} \in A$.

由 $a_2 a_4 = a_3^2$, 得 $\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} \in A$, 且 $1 < \frac{a_3}{a_2} < a_3$, $\therefore \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_3}{a_2} = a_2$,

$$\therefore \frac{a_5}{a_4} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} = a_2,$$

即 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 是首项为1, 公比为 a_2 成等比数列.