

2000 年黑龙江高考文科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。第 I 卷 1 至 2 页。第 II 卷 3 至 8 页。共 150 分。考试时间 120 分钟。

第 I 卷（选择题 60 分）

注意事项：

1. 答第 I 卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上。
2. 每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答，不能答在试题卷上。
3. 考试结束，监考人将本试卷和答题卡一并收回。

参考公式：

三角函数的积化和差公式

正棱台、圆台的侧面积公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$S_{\text{侧}} = \frac{1}{2}(c' + c)l$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

其中 c' 、 c 分别表示上、下底面

周长， l 表示斜高或母线长

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$V_{\text{台}} = \frac{1}{3}(S' + \sqrt{S'S} + S)h$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

其中 S' 、 S 分别表示上、下底面积，

h 表示高

一、选择题：本大题共 12 分，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

(1) 设集合 $A = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ 且 } -10 \leq x \leq -1\}$ ， $B = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ 且 } |x| \leq 5\}$ ，则 $A \cup B$ 中的元素个数是

- (A) 11 (B) 10 (C) 16 (D) 15

(2) 在复平面内，把复数 $3 - \sqrt{3}i$ 对应的向量按顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$ ，所得向量对应的复数是

- (A) $2\sqrt{3}$ (B) $-2\sqrt{3}i$ (C) $\sqrt{3}-3i$ (D) $3+\sqrt{3}i$

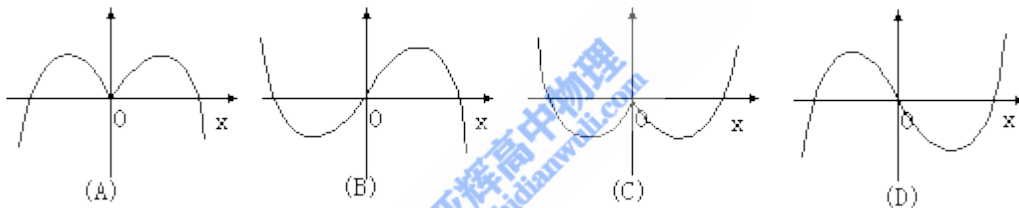
(3) 一个长方体共一顶点的三个面的面积分别是 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ ，这个长方体对角线的长是

- (A) $2\sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) 6 (D) $\sqrt{6}$

(4) 已知 $\sin \alpha > \sin \beta$ ，那么下列命题成立的是

- (A) 若 α, β 是第一象限角，则 $\cos \alpha > \cos \beta$
 (B) 若 α, β 是第二象限角，则 $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \beta$
 (C) 若 α, β 是第三象限角，则 $\cos \alpha > \cos \beta$
 (D) 若 α, β 是第四象限角，则 $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \beta$

(5) 函数 $y = -x \cos x$ 的部分图象是



(6) 《中华人民共和国个人所得税法》规定，公民全月工资、薪金所得不超过 800 元的部分不必纳税，超过 800 元的部分为全月应纳税所得额，此项税款按下表分希累进计算。

全月应纳税所得额	税率
不超过 500 元的部分	5%
超过 500 元至 2000 元的部分	10%
超过 2000 元至 5000 元的部分	15%
...	...

某人一月份应交纳此项税款 26.78 元，则他的当月工资、薪金所得介于

- (A) 800~900 元 (B) 900~1200 元 (C) 1200~1500 元 (D) 1500~2800 元

(7) 若 $a > b > 1$ ， $P = \sqrt{\lg a \cdot \lg b}$ ， $Q = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b)$ ， $R = \lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ，则

- (A) $R < P < Q$ (B) $P < Q < R$ (C) $Q < P < R$ (D) $P < R < Q$

(8) 已知两条直线 $l_1: y = x$, $l_2: ax - y = 0$, 其中 a 为实数。当这两条直线的夹角在 $(0, \frac{\pi}{12})$ 内变动时, a 的取值范围是

- (A) $(0, 1)$ (B) $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3})$ (C) $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1) \cup (1, \sqrt{3})$ (D) $(1, \sqrt{3})$

(9) 一个圆柱的侧面展开图是一个正方形, 这个圆柱的全面积与侧面积的比是

- (A) $\frac{1+2\pi}{2\pi}$ (B) $\frac{1+4\pi}{4\pi}$ (C) $\frac{1+2\pi}{\pi}$ (D) $\frac{1+4\pi}{2\pi}$

(10) 过原点的直线与圆 $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$ 相切, 若切点在第三象限, 则该直线的方程是

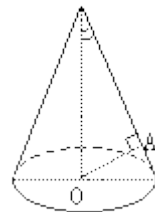
- (A) $y = \sqrt{3}x$ (B) $y = -\sqrt{3}x$ (C) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ (D) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$

(11) 过抛物线 $y = ax^2$ ($a > 0$) 的焦点 F 作一直线交抛物线于 P 、 Q 两点, 若线段 PF 与 FQ 的长分别是 p 、 q , 则 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ 等于

- (A) $2a$ (B) $\frac{1}{2a}$ (C) $4a$ (D) $\frac{4}{a}$

(12) 如图, OA 是圆锥底面中心 O 到母线的垂线, OA 绕轴旋转一周所得曲面将圆锥分成体积相等的两部分, 则母线与轴的夹角为

- (A) $\arccos \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (B) $\arccos \frac{1}{2}$ (C) $\arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\arccos \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$



2000年普通高等学校招生全国统一考试

数学(文史类)

第II卷(非选择题共90分)

注意事项:

1. 第II卷共6页,用钢笔或圆珠笔直接答在试题卷中。
2. 答卷前将密封线内的项目填写清楚。

题号	二	三						总分
		17	18	19	20	21	22	
分数								

二、填空题:本大题共4小题,每小题4分,共16分。把答案填在题中横线上。

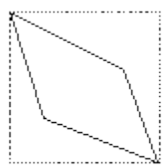
(13) 乒乓球队的10名队员中有3名主力队员,派5名参加比赛,3名主力队员要安排在第一、第三、五位置,其余7名队员选2名安排在第二、四位置,那么不同的出场安排共有_____种(用数字作答)

(14) 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 , 点P为其上的动点。当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角时, 点P横坐标的取值范围是_____。

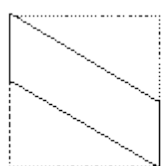
(15) 设 $\{a_n\}$ 是首项为1的正项数列, 且 $(n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2 + a_{n+1}a_n = 0$ ($n=1, 2, 3, \dots$), 则它的通项公式是 $a_n =$ _____。

(16) 如图, E、F 分别为正方体的面 ADD_1A_1 、面 BCC_1B_1 的中心, 则四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的射影可能是_____。

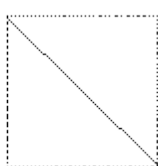
都
(要求: 把可能的图的序号填上)



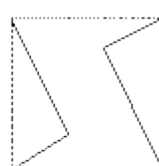
①



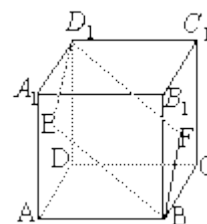
②



③



④



三、解答题: 本大题共 16 小题, 共 74 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

17 (本小题满分 12 分)

已知函数 $y = \sqrt{3} \sin x + \cos x, x \in \mathbb{R}$

(I) 当函数 y 取得最大值时, 求自变量 x 的集合;

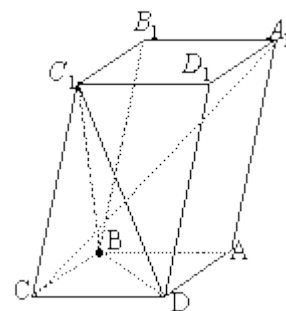
(II) 该函数的图象可由 $y = \sin x (x \in \mathbb{R})$ 的图象经过怎样的平移和伸缩变换得到?

(18) (本小题满分 12 分)

设 $\{a_n\}$ 为等差数列, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $S_7 = 7, S_{15} = 75, T_n$ 为数列 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 的前 n 项和, 求 T_n 。

(19) (本小题满分 12 分)

如图, 已知平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是菱形, 且 $\angle C_1CB = \angle C_1CD = \angle BCD = 60^\circ$



(I) 证明: $C_1C \perp BD$;

(II) 当 $\frac{CD}{CC_1}$ 的值为多少时, 能使 $A_1C \perp$ 平面 C_1BD ? 请给出证明。

(20) (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - ax$, 其中 $a > 0$ 。

(I) 解不等式 $f(x) \leq 1$;

(II) 证明: 当 $a \geq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调函数。

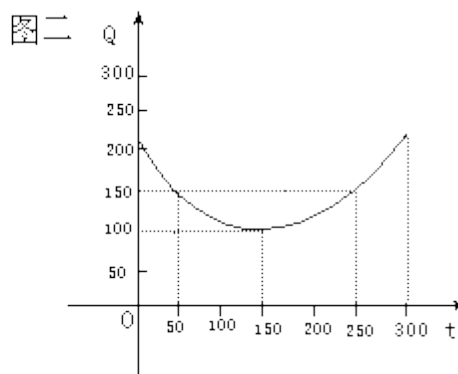
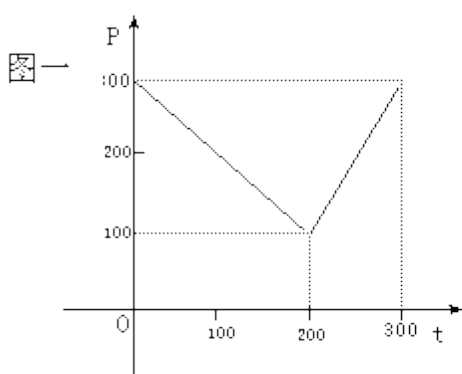
(21) (本小题满分 12 分)

某蔬菜基地种植西红柿, 由历年市场行情得知, 从二月一日起的 300 天内, 西红柿市场售价与上市时间的关系用图一的一条折线表示; 西红柿的种植成本与上市时间的关系用图二的抛物线段表示。

(I) 写出图一表示的市场售价与时间的函数关系 $P=f(t)$;

写出图二表示的种植成本与时间的函数关系式 $Q=g(t)$;

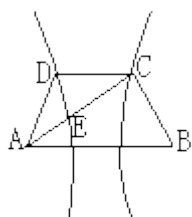
(II) 认定市场售价减去种植成本为纯收益, 问何时上市的西红柿纯收益最大?



(注: 市场售价和种植成本的单位: 元/ 10^2 kg, 时间单位: 天)

(22) (本小题满分 14 分)

如图, 已知梯形 $ABCD$ 中 $|AB|=2|CD|$, 点 E 分有向线段 \overline{AC} 所成的比为 $\frac{8}{11}$, 双曲线过 C 、 D 、 E 三点, 且以 A 、 B 为焦点。求双曲线的离心率。



2000 年普通高等学校招生全国统一考试

数学试题 (文史类) 参考解答及评分标准

说明:

一、本解答指出了每题要考查的主要知识和能力，并给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则。

二、对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

三、解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

四、只给整数分数，选择题和填空题不给中间分。

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算，每小题 5 分，满分 60 分。

- (1) C (2) B (3) D (4) D (5) D (6) C
(7) B (8) C (9) A (10) C (11) C (12) D

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算，每小题 4 分，满分 60 分。

- (13) 252 (14) $-\frac{3}{\sqrt{5}} < x < \frac{3}{\sqrt{5}}$ (15) $\frac{1}{n}$ (16) ②③

三、解答题

(17) 本小题主要考查三角函数的图象和性质，考查利用三角公式进行恒等变形的技能以及运算能力。满分 12 分。

解： (I)

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{3} \sin x + \cos x \\ &= 2\left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6}\right) \\ &= 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

y 取得最大值必须且只需

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

即
$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

所以，当函数 y 取得最大值时，自变量 x 的集合为

$$\{x \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \quad \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

(II) 变换的步骤是:

(1) 把函数 $y = \sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$, 得到函数 $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ 的图象; $\dots\dots\dots 9 \text{分}$

(2) 令所得到的图象上各点横坐标不变, 把纵坐标伸长到原来的 2 倍, 得到函数 $y = 2 \sin(x + \frac{\pi}{6})$ 的
 图象;

经过这样的变换就得到函数 $y = \sqrt{3} \sin x + \cos x$ 的图象。 $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

(18) 本小题主要考查等差数列的基础知识和基本技能, 运算能力, 满分 12 分。

解: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则

$$S_n = na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)d$$

$$\because S_7 = 7, S_{15} = 75$$

$$\therefore \begin{cases} 7a_1 + 21d = 7 \\ 15a_1 + 105d = 75 \end{cases} \quad \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

$$\text{即 } \begin{cases} a_1 + 3d = 1 \\ a_1 + 7d = 5 \end{cases}$$

$$\text{解得 } a_1 = -2, d = 1 \quad \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

$$\therefore \frac{S_n}{n} = a_1 + \frac{1}{2}(n-1)d = -2 + \frac{1}{2}(n-1)$$

$$\therefore \frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = \frac{1}{2}$$

\therefore 数列 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是等差数列, 其首项为 -2 , 公差为 $\frac{1}{2}$

$$\therefore T_n = \frac{1}{4}n^2 - \frac{9}{4}n \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

(19) 本小题主要考查直线与直线、直线与平面的关系，逻辑推理能力，满分 12 分。

(I) 证明：连结 A_1C_1 、AC，AC 和 BD 交于 O，连结 C_1O

\because 四边形 ABCD 是菱形

$\therefore AC \perp BD, BC=CD$

又 $\because \angle BCC_1 = \angle DCC_1, C_1C = C_1C$

$\therefore \triangle C_1BC \cong \triangle C_1DC$

$\therefore C_1B = C_1D$

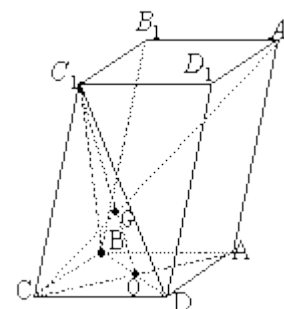
$\because DO=OB$

$\therefore C_1O \perp BD \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

但 $AC \perp BD, AC \cap C_1O = O$

$\therefore C_1C \perp BD \therefore BD \perp \text{平面} AC_1$

又 $C_1C \subset \text{平面} AC_1 \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$



(II) 当 $\frac{CD}{CC_1} = 1$ 时，能使 $A_1C \perp \text{平面} C_1BD$

证明一：

$$\because \frac{CD}{CC_1} = 1$$

$\therefore BC = CD = C_1C$

又 $\angle BCD = \angle C_1CB = \angle C_1CD$

由此可推得 $BD = C_1B = C_1D$

∴ 三棱锥 $C - C_1BD$ 是正三棱锥。……………9分

设 A_1C 与 C_1O 相交于 G.

∵ $A_1C_1 \parallel AC$, 且 $A_1C_1 : OC = 2 : 1$

∴ $C_1O : GO = 2 : 1$

又 C_1O 是正三角形 C_1BD 的 BD 边上的高和中线,

∴ 点 G 是正三角形 C_1BD 的中心。

∴ $CG \perp$ 平面 C_1BD

即 $A_1C \perp$ 平面 C_1BD 。

……………12

分

证明二:

由 (I) 知, $BD \perp$ 平面 AC_1

∵ $A_1C \subset$ 平面 AC_1 , ∴ $BD \perp A_1C$ 。……………9分

当 $\frac{CD}{CC_1} = 1$ 时, 平行六面体的六个面是全等的菱形。

同 $BD \perp AC_1$ 的证法可得 $BC_1 \perp A_1C$

又 $BD \perp BC_1 = B$

∴ $A_1C \perp$ 平面 C_1BD ……………12分

(20) 本小题主要考查不等式的解法、函数的单调性等基本知识，分数讨论的数学思想方法和运算、推理能力。满分 12 分。

解：(I) 不等式 $f(x) \leq 1$ 即

$$\sqrt{x^2 + 1} \leq 1 + ax,$$

由此得 $1 \leq 1 + ax$ ，即 $ax \geq 0$ ，其中常数 $a > 0$

所以，原不等式等价于

$$\begin{cases} x^2 + 1 \leq (1 + ax)^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} x \geq 0 \\ (a^2 - 1)x + 2a \geq 0 \end{cases}$$

.....3 分

所以，当 $0 < a < 1$ 时，所给不等式的解集为 $\{x | 0 \leq x \leq \frac{2a}{1 - a^2}\}$;

当 $a \geq 1$ 时，所给不等式的解集为 $\{x | x \geq 0\}$

.....6 分

(II) 证明：在区间 $[0, +\infty)$ 上任取 x_1, x_2 ，使得 $x_1 < x_2$

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \sqrt{x_1^2 + 1} - \sqrt{x_2^2 + 1} - a(x_1 - x_2) \\ &= \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} - a(x_1 - x_2) \\ &= (x_1 - x_2) \left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} - a \right) \end{aligned}$$

.....9 分

$$\therefore \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} < 1, \text{ 且 } a \geq 1$$

$$\therefore \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} - a < 0$$

又 $x_1 - x_2 < 0$

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) > 0$$

$$\text{即 } f(x_1) > f(x_2)$$

所以，当 $a \geq 1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调递减函数。……………12 分

(21) 本小题主要考查由函数图象建立函数关系式和求函数最大值的问题，考查运用所学知识解决实际问题的能力，满分 12 分。

解：(I) 由图一可得市场售价与时间的函数关系为

$$f(t) = \begin{cases} 300 - t, & 0 \leq t \leq 200 \\ 2t - 300, & 200 < t \leq 300 \end{cases} \quad \text{……………2 分}$$

由图二可得种植成本与时间的函数关系为

$$g(t) = \frac{1}{200}(t - 150)^2 + 100, \quad 0 \leq t \leq 300 \quad \text{……………4 分}$$

(II) 设 t 时刻的纯收益为 $h(t)$ ，则由题意得

$$h(t) = f(t) - g(t)$$

$$\text{即 } h(t) = \begin{cases} -\frac{1}{200}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{175}{2}, & 0 \leq t \leq 200 \\ -\frac{1}{200}t^2 + \frac{2}{7}t - \frac{1025}{2}, & 200 < t \leq 300 \end{cases} \quad \text{……………6 分}$$

当 $0 \leq t \leq 200$ 时，配方整理得

$$h(t) = -\frac{1}{200}(t - 50)^2 + 100$$

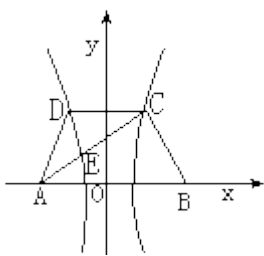
所以，当 $t=50$ 时， $h(t)$ 取得区间 $[0, 200]$ 上的最大值 100；

当 $200 < t \leq 300$ 时，配方整理得

$$h(t) = -\frac{1}{200}(t - 350)^2 + 100$$

所以，当 $t=300$ 时， $h(t)$ 取得区间 $[200, 300]$ 上的最大值 87.5。……………10 分

综上，由 $100 > 87.5$ 可知， $h(t)$ 在区间 $[0, 300]$ 上可以取得最大值 100，此时 $t=50$ ，即从二月一日开始的第 50 天时，上市的西红柿纯收益最大。……………12 分



(22) 本小题主要考查坐标法、定比分点坐标公式、双曲线的概念和性质，推理、运算能力和综合应用数学知识解决问题的能力，满分 14 分。

解：如图，以 AB 的垂直平分线为 y 轴，直线 AB 为 x 轴，建立直角坐标系 xOy，则 $CD \perp y$ 轴。

因为双曲线经过点 C、D，且以 A、B 为焦点，由双曲线的对称性知 C、D 关于 x 轴对称。

.....2 分

依题意，记 $A(-c, 0)$ ， $C(\frac{c}{2}, h)$ ， $B(c, 0)$ ，其中 c 为双曲线的半焦距， $c = \frac{1}{2} |AB|$ ， h 是梯形的高。

由定比分点坐标公式，得点 E 的坐标为

$$x_E = \frac{-c + \frac{8}{11} \times \frac{c}{2}}{1 + \frac{8}{11}} = -\frac{7}{19}c$$

$$y_E = \frac{0 + \frac{8}{11} \times h}{1 + \frac{8}{11}} = \frac{8}{19}h$$

设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，则离心率 $e = \frac{c}{a}$ 。

由点 C、E 在双曲线上，得

$$\begin{cases} \frac{1}{4} \cdot \frac{c^2}{a^2} - \frac{h^2}{b^2} = 1 & \text{①} \\ \frac{49}{361} \cdot \frac{c^2}{a^2} - \frac{64}{361} \cdot \frac{h^2}{b^2} = 1 & \text{②} \end{cases}$$

.....10

分

由①式得 $\frac{h^2}{b^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{c^2}{a^2} - 1$ 代入②式得 $\frac{c^2}{a^2} = 9$

所以，离心率 $e = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = 3$

.....14 分

