

2022 年上海市普通高等学校春季招生统一文化考试

数学试卷

2022.01.08

考生注意：

1. 本场考试时 120 分钟，试卷共 4 页，满分 150 分，答题纸共 2 页；
2. 作答前，请在答题纸正面填写姓名、报名号，反面填写姓名，将核对好的条形码贴答题纸指定位置；
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试题号对应的区域，不得错位，在试卷上作答一律不得分；
4. 用 2B 细笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题。

一、填空题（本大题共有 12 题，满分 54 分，第 1~6 题每题 4 分，第 7~12 题每题 5 分）

考生应在答题纸的相应位置直接填写结果。

1. 已知 $z = 2 + i$ （其中 i 为虚数单位），则 z _____；

=

2. 已知集合 $A = (-1, 2)$ ，集合 $B = (1, 3)$ ，则 $A \cap B$ _____；

=

3. 不等式 $\frac{1}{x} < 0$ 的解集为 _____；

4. 若 $\tan \alpha = 3$ ，则 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ _____；

5. 设函数 $f(x) = x^3$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$ ，则 $f^{-1}(f(2)) =$ _____；

27

6. 在 $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^2$ 的展开式中，则含 $\frac{1}{x^4}$ 项的系数为 _____；

7. 若关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} x + my = 2 \\ mx + 16y = 8 \end{cases}$ 有无穷多解，则实数 m 的值为 _____；

8. 已知在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = \frac{\pi}{3}$ ， $AB = 2$ ， $AC = 3$ ，则 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 _____；

9. 用数字 1、2、3、4 组成没有重复数字的四位数，则这些四位数中比 2134 大的数字个数为 _____；（用数字作答）

10. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = AC = 2$ ，点 M 为边 AB 的中点，点 P 在边 BC 上，_____；

则 $MP \cdot CP$ 的最小值为 _____；

11. 已知 $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$ 两点均在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ ($a > 0$) 的右支上，若 $x_1 x_2 > y_1 y_2$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为 _____；

12. 已知函数 $y = f(x)$ 为定义域为 \mathbf{R} 的奇函数，其图像关于 $x = 1$ 对称，且当 $x \in (0, 1]$ 时

$f(x) = \ln x$ ，若将方程 $f(x) = x + 1$ 的正实数根从小到大依次记为 $x_2, x_3, x_n, \dots, x_n$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) =$ _____.

二、选择题（本大题共有 4 题，满分 20 分，每题 5 分）每题有且只有一个正确选项，考生应在答题纸的相应位置，将代表正确选项的小方格涂黑.

13. 下列函数定义域为 \mathbf{R} 的是 ()

- (A) $y = x^{-2}$ (B) $y = x^{-1}$ (C) $y = \frac{1}{x}$ (D) $y = \frac{1}{x^2}$

14. 若 $a > b > c > d$ ，则下列不等式恒成立的是 ()

- (A) $a + d > b + c$ (B) $a + c > b + d$
(C) $ac > bd$ (D) $ad > bc$

15. 上海海关大楼的顶部为逐级收拢的四面钟楼，如图，四个大钟分布在四棱柱的四个侧面，则每天 0 点至 12 点（包含 0 点，不含 12 点）相邻两钟

面上的时针相互垂直的次数为 ()



- (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 12

16. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，前 n 项积为 T_n ，则下列选项判断正确的是 ()

- (A) 若 $S_{2022} > S_{2021}$ ，则数列 $\{a_n\}$ 是递增数列
(B) 若 $T_{2022} > T_{2021}$ ，则数列 $\{a_n\}$ 是递增数列
(C) 若数列 $\{S_n\}$ 是递增数列，则 $a_{2022} \geq a_{2021}$
(D) 若数列 $\{T_n\}$ 是递增数列，则 $a_{2022} \geq a_{2021}$

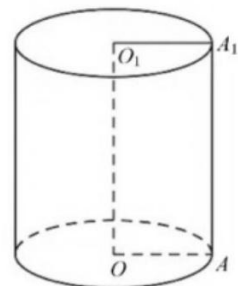
三、简答题（本大题共有 5 题，满分 76 分）解答下列各题必须在答题纸的相应位置写出必要的步骤.

17. (本题满分 14 分，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分)

如图，圆柱下底面与上底面的圆心分别为 O 、 O_1 ， AA_1 为圆柱的母线，底面半径长为 1.

(1) 若 $AA_1 = 4$ ， M 为 AA_1 的中点，求直线 MO 与上底面所成角的大小；（结果用反三角函数值表示）

(2) 若圆柱过 OO_1 的截面为正方形，求圆柱的体积与侧面积.



18. (本题满分 14 分, 第 1 小题满分 6 分, 第 2 小题满分 8 分)

已知在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 1$, 其前 n 项和为 S_n .

(1) 若 $\{a_n\}$ 是等比数列, $S_2 = 3$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$;

(2) 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, $S_n \geq n$, 求其公差 d 的取值范围.

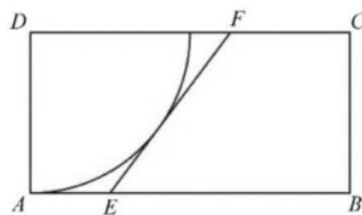
19. (本题满分 14 分, 第 1 小题满分 6 分, 第 2 小题满分 8 分)

为有效塑造城市景观、提升城市环境品质, 上海市正在努力推进新一轮架空线入地工程的建设. 如图是一处要架空线入地的矩形地块 $ABCD$, $AB = 30\text{m}$, $AD = 15\text{m}$. 为保护 D 处的一棵古树, 有关部门划定了以 D 为圆心、 DA 为半径的四分之一圆的地块为历史古迹封闭区. 若空线入线口为 AB 边上的点 E , 出线口为 CD 边上的点 F , 施工要求 EF 与封闭区边

界相切, EF 右侧的四边形地块 $BCFE$ 将作为绿地保护生态区. (计算长度精确到 0.1m , 计算面积精确到 0.01m^2)

(1) 若 $\angle ADE = 20^\circ$, 求 EF 的长;

(2) 当入线口 E 在 AB 上的什么位置时, 生态区的面积最大? 最大面积是多少?



20. (本题满分 16 分, 第 1 小题满分 4 分, 第 2 小题满分 6 分, 第 3 小题满分 6 分)

已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$, A 、 B 两点分别为 Γ 的左顶点、下顶点, C 、 D 两点均在直线 $l: x = a$ 上, 且 C 在第一象限.

(1) 设 F 是椭圆 Γ 的右焦点, 且 $\angle AFB = \frac{\pi}{6}$, 求 Γ 的标准方程;

(2) 若 C 、 D 两点纵坐标分别为 2、1, 请判断直线 AD 与直线 BC 的交点是否在椭圆 Γ 上, 并说明理由;

(3) 设直线 AD 、 BC 分别交椭圆 Γ 于点 P 、点 Q , 若 P 、 Q 关于原点对称, 求 CD 的最小值.

21. (本题满分 18 分, 第 1 小题满分 4 分, 第 2 小题满分 6 分, 第 3 小题满分 8 分)

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 现有两种对 $f(x)$ 变换的操作:

φ 变换: $f(x) - f(x-t)$; ω 变换: $f(x+t) - f(x)$, 其中 t 为大于 0 的常数.

(1) 设 $f(x) = 2^x$, $t = 1$, $g(x)$ 为 $f(x)$ 做 φ 变换后的结果, 解方程: $g(x) = 2$;

(2) 设 $f(x) = x^2$, $h(x)$ 为 $f(x)$ 做 ω 变换后的结果, 解不等式: $f(x) \geq h(x)$;

(3) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, $f(x)$ 先做 φ 变换后得到 $u(x)$, $u(x)$ 再做 ω 变换后得到 $h_1(x)$; $f(x)$ 先做 ω 变换后得到 $v(x)$, $v(x)$ 再做 φ 变换后得到 $h_2(x)$. 若 $h_1(x) = h_2(x)$ 恒成立, 证明: 函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增.