

# 2011年浙江省高考数学试卷（文科）

参考答案与试题解析

## 一、选择题（共10小题，每小题5分，满分50分）

1. （5分）（2011•浙江）若 $P=\{x|x<1\}$ ， $Q=\{x|x>1\}$ ，则（ ）

A.  $P\subseteq Q$  B.  $Q\subseteq P$  C.  $C_{\mathbb{R}}P\subseteq Q$  D.  $Q\subseteq C_{\mathbb{R}}P$

【考点】集合的包含关系判断及应用.

【专题】集合.

【分析】利用集合的补集的定义求出P的补集；利用子集的定义判断出 $Q\subseteq C_{\mathbb{R}}P$ .

【解答】解： $\because P=\{x|x<1\}$ ，

$\therefore C_{\mathbb{R}}P=\{x|x\geq 1\}$ ，

$\because Q=\{x|x>1\}$ ，

$\therefore Q\subseteq C_{\mathbb{R}}P$ ，

故选D.

【点评】本题考查利用集合的交集、补集、并集定义求交集、补集、并集；利用集合包含关系的定义判断集合的包含关系.

2. （5分）（2011•浙江）若复数 $z=1+i$ ， $i$ 为虚数单位，则 $(1+z)\cdot z=$ （ ）

A.  $1+3i$  B.  $3+3i$  C.  $3-i$  D. 3

【考点】复数代数形式的乘除运算.

【专题】数系的扩充和复数.

【分析】利用两个复数代数形式的乘法法则，把 $(1+z)\cdot z$ 化简到最简形式.

【解答】解： $\because$ 复数 $z=1+i$ ， $i$ 为虚数单位，则 $(1+z)\cdot z=(2+i)(1+i)=1+3i$

故选A.

【点评】本题考查两个复数代数形式的乘法，以及虚数单位的幂运算性质.

3. （5分）（2011•浙江）若实数 $x$ ， $y$ 满足不等式组
$$\begin{cases} x+2y-5\geq 0 \\ 2x+y-7\geq 0 \\ x\geq 0, y\geq 0 \end{cases}$$
，则 $3x+4y$ 的最小值是

（ ）

A. 13 B. 15 C. 20 D. 28

【考点】简单线性规划.

【专题】不等式的解法及应用.

【分析】我画出满足不等式组
$$\begin{cases} x+2y-5\geq 0 \\ 2x+y-7\geq 0 \\ x\geq 0, y\geq 0 \end{cases}$$
的平面区域，求出平面区域中各角点的坐标

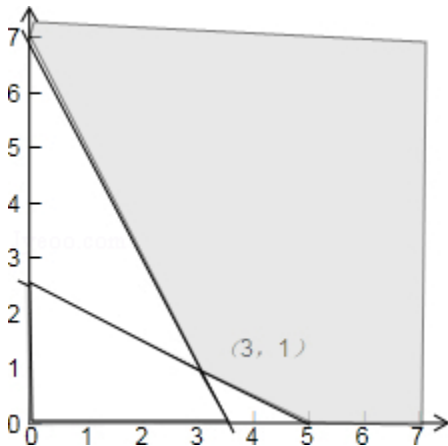
，然后利用角点法，将各个点的坐标逐一代入目标函数，比较后即可得到 $3x+4y$ 的最小值

【解答】解：满足约束条件
$$\begin{cases} x+2y-5\geq 0 \\ 2x+y-7\geq 0 \\ x\geq 0, y\geq 0 \end{cases}$$
的平面区域如下图所示：

由图可知，当 $x=3$ ， $y=1$ 时

$3x+4y$ 取最小值13

故选A



**【点评】**用图解法解决线性规划问题时，分析题目的已知条件，找出约束条件和目标函数是关键，可先将题目中的量分类、列出表格，理清头绪，然后列出不等式组（方程组）寻求约束条件，并就题目所述找出目标函数．然后将可行域各角点的值一一代入，最后比较，即可得到目标函数的最优解．

4. （5分）（2011•浙江）若直线 $l$ 不平行于平面 $\alpha$ ，且 $l \not\subset \alpha$ ，则（ ）

- A.  $\alpha$ 内存在直线与 $l$ 异面 B.  $\alpha$ 内存在与 $l$ 平行的直线  
C.  $\alpha$ 内存在唯一的直线与 $l$ 平行 D.  $\alpha$ 内的直线与 $l$ 都相交

**【考点】**直线与平面平行的性质；平面的基本性质及推论．

**【专题】**空间位置关系与距离．

**【分析】**根据线面关系的定义，我们根据已知中直线 $l$ 不平行于平面 $\alpha$ ，且 $l \not\subset \alpha$ ，判断出直线 $l$ 与 $\alpha$ 的关系，利用直线与平面相交的定义，我们逐一分析四个答案，即可得到结论．

**【解答】**解：直线 $l$ 不平行于平面 $\alpha$ ，且 $l \not\subset \alpha$ ，

则 $l$ 与 $\alpha$ 相交

$l$ 与 $\alpha$ 内的直线可能相交，也可能异面，但不可能平行

故B，C，D错误

故选A

**【点评】**本题考查线线、线面位置关系的判定，考查逻辑推理能力和空间想象能力．其中利用已知判断出直线 $l$ 与 $\alpha$ 的关系是解答本题的关键．

5. （5分）（2011•浙江）在 $\triangle ABC$ 中，角A，B，C，所对的边分别为a，b，c．若 $a\cos A=b\sin B$ ，则 $\sin A\cos A+\cos^2 B=$ （ ）

- A.  $-\frac{1}{2}$  B.  $\frac{1}{2}$  C. -1 D. 1

**【考点】**余弦定理；正弦定理．

**【专题】**解三角形．

**【分析】**利用三角形中的正弦定理，将已知等式中的边用三角形的角的正弦表示，代入要求的式子，利用三角函数的平方关系求出值．

**【解答】**解： $\because a\cos A=b\sin B$

由正弦定理得 $\sin A\cos A=\sin B\sin B$

$$\therefore \sin A \cos A + \cos^2 B = \sin^2 B + \cos^2 B = 1$$

故选D

**【点评】** 本题考查三角形中的正弦定理、余弦定理、三角函数的平方关系.

6. (5分) (2011•浙江) 若a, b为实数, 则“ $0 < ab < 1$ ”是“ $b < \frac{1}{a}$ ”的 ( )

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件  
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

**【考点】** 必要条件、充分条件与充要条件的判断; 不等式的基本性质.

**【专题】** 简易逻辑.

**【分析】** 根据不等式的性质, 我们先判断“ $0 < ab < 1 \Rightarrow b < \frac{1}{a}$ ”与“ $b < \frac{1}{a} \Rightarrow 0 < ab < 1$ ”的真假, 然后结合充要条件的定义即可得到答案.

**【解答】** 解: 若“ $0 < ab < 1$ ”

当a, b均小于0时,  $b > \frac{1}{a}$

即“ $0 < ab < 1 \Rightarrow b < \frac{1}{a}$ ”为假命题

若“ $b < \frac{1}{a}$ ”

当a < 0时,  $ab > 1$

即“ $b < \frac{1}{a} \Rightarrow 0 < ab < 1$ ”为假命题

综上“ $0 < ab < 1$ ”是“ $b < \frac{1}{a}$ ”的既不充分也不必要条件

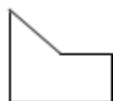
故选D.

**【点评】** 本题考查的知识点是必要条件, 充分条件与充要条件的判断, 及不等式的性质, 其中根据不等式的性质判断“ $0 < ab < 1 \Rightarrow b < \frac{1}{a}$ ”与“ $b < \frac{1}{a} \Rightarrow 0 < ab < 1$ ”的真假, 是解答本题的关键.

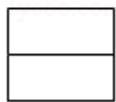
7. (5分) (2011•浙江) 几何体的三视图如图所示, 则这个几何体的直观图可以是 ( )



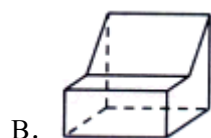
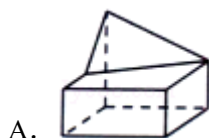
正视图



侧视图



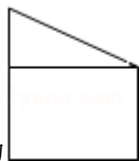
俯视图



【考点】空间几何体的直观图；简单空间图形的三视图.

【专题】立体几何.

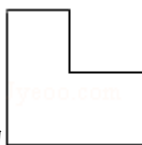
【分析】A、C选项中正视图不符合，D答案中侧视图不符合，由排除法即可选出答案.



【解答】解：A、C选项中正视图不符合，A的正视图为



C的正视图为



D答案中侧视图不符合. D答案中侧视图为

故选B

【点评】本题考查空间几何体的三视图，考查空间想象能力.

8. (5分) (2011•浙江) 从已有3个红球、2个白球的袋中任取3个球，则所取的3个球中至少有1个白球的概率是 ( )

- A.  $\frac{1}{10}$  B.  $\frac{3}{10}$  C.  $\frac{3}{5}$  D.  $\frac{9}{10}$

【考点】古典概型及其概率计算公式.

【专题】概率与统计.

【分析】用间接法，首先分析从5个球中任取3个球的情况数目，再求出所取的3个球中没有白球即全部红球的情况数目，计算可得没有白球的概率，而“没有白球”与“3个球中至少有1个白球”为对立事件，由对立事件的概率公式，计算可得答案.

【解答】解：根据题意，首先分析从5个球中任取3个球，共 $C_5^3=10$ 种取法，所取的3个球中没有白球即全部红球的情况有 $C_3^3=1$ 种，

则没有白球的概率为 $\frac{1}{10}$ ;

则所取的3个球中至少有1个白球的概率是 $\frac{9}{10}$ .

故选D.

【点评】本题考查古典概型的计算，注意至多、至少一类的问题，可以选用间接法，即借助对立事件的概率的性质，先求其对立事件的概率，进而求出其本身的概率.

9. (5分) (2011•浙江) 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 与双曲线 $C_2: x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 有

公共的焦点， $C_2$ 的一条渐近线与以 $C_1$ 的长轴为直径的圆相交于A、B两点. 若 $C_1$ 恰好将线段AB三等分，则 ( )

A.  $a^2 = \frac{13}{2}$  B.  $a^2 = 3$  C.  $b^2 = \frac{1}{2}$  D.  $b^2 = 2$

【考点】椭圆的简单性质；圆锥曲线的综合.

【专题】圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】先由双曲线方程确定一条渐近线方程为 $y=2x$ ，根据对称性易知 $AB$ 为圆的直径且 $AB=2a$ ，利用椭圆与双曲线有公共的焦点，得方程 $a^2 - b^2=5$ ；设 $C_1$ 与 $y=2x$ 在第一象限的交点的坐标为 $(x, 2x)$ ，代入 $C_1$ 的方程得：

$$x^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 + 4a^2};$$

对称性知直线 $y=2x$ 被 $C_1$ 截得的弦

长 $=2\sqrt{5}x$ ，根据 $C_1$ 恰好将线段 $AB$ 三等分得： $2\sqrt{5}x = \frac{2a}{3}$ ，从而可解出 $a^2, b^2$ 的值，故可得结论.

【解答】解：由题意， $C_2$ 的焦点为 $(\pm\sqrt{5}, 0)$ ，一条渐近线方程为 $y=2x$ ，根据对称性易知 $AB$ 为圆的直径且 $AB=2a$

$\therefore C_1$ 的半焦距 $c = \sqrt{5}$ ，于是得 $a^2 - b^2 = 5$  ①

设 $C_1$ 与 $y=2x$ 在第一象限的交点的坐标为 $(x, 2x)$ ，代入 $C_1$ 的方程得： $x^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 + 4a^2}$  ②，

由对称性知直线 $y=2x$ 被 $C_1$ 截得的弦长 $=2\sqrt{5}x$ ，

由题得： $2\sqrt{5}x = \frac{2a}{3}$ ，所以  $x = \frac{a}{3\sqrt{5}}$  ③

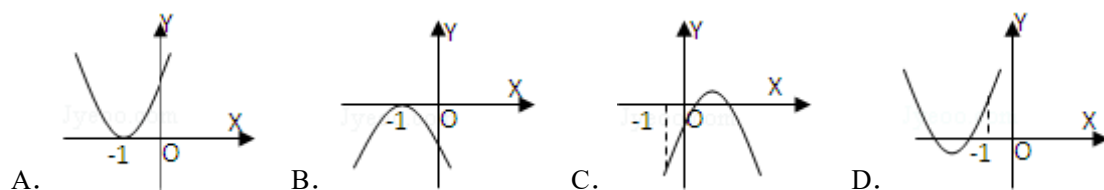
由②③得 $a^2 = 11b^2$  ④

由①④得 $a^2 = 5.5, b^2 = 0.5$

故选C

【点评】本题以椭圆，双曲线为载体，考查直线与圆锥曲线的位置关系，解题思路清晰，但计算有点烦琐，需要小心谨慎.

10. (5分) (2011•浙江) 设函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ )，若 $x = -1$ 为函数 $y = f(x)e^x$ 的一个极值点，则下列图象不可能为 $y = f(x)$ 的图象是 ( )



【考点】利用导数研究函数的单调性；函数的图象与图象变化.

【专题】函数的性质及应用；导数的概念及应用.

【分析】先求出函数 $f(x)e^x$ 的导函数，利用 $x = -1$ 为函数 $f(x)e^x$ 的一个极值点可得 $a, b, c$ 之间的关系，再代入函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，对答案分别代入验证，看哪个答案不成立即可.

【解答】解：由 $y = f(x)e^x = e^x(ax^2 + bx + c) \Rightarrow y' = f'(x)e^x + e^x f(x) = e^x[ax^2 + (b+2a)x + b+c]$

由 $x = -1$ 为函数 $f(x)e^x$ 的一个极值点可得， $-1$ 是方程 $ax^2 + (b+2a)x + b+c = 0$ 的一个根，所以有 $a - (b+2a) + b+c = 0 \Rightarrow c = a$ .

法一：所以函数  $f(x) = ax^2 + bx + a$ ，对称轴为  $x = -\frac{b}{2a}$ ，且  $f(-1) = 2a - b$ ， $f(0) = a$ 。

对于A，由图得  $a > 0$ ， $f(0) > 0$ ， $f(-1) = 0$ ，不矛盾，

对于B，由图得  $a < 0$ ， $f(0) < 0$ ， $f(-1) = 0$ ，不矛盾，

对于C，由图得  $a < 0$ ， $f(0) < 0$ ， $x = -\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow b > 0 \Rightarrow f(-1) < 0$ ，不矛盾，

对于D，由图得  $a > 0$ ， $f(0) > 0$ ， $x = -\frac{b}{2a} < -1 \Rightarrow b > 2a \Rightarrow f(-1) < 0$  与原图中  $f(-1) > 0$  矛盾，D不对。

法二：所以函数  $f(x) = ax^2 + bx + a$ ，由此得函数相应方程的两根之积为1，对照四个选项发现，D不成立。

故选：D。

**【点评】** 本题考查极值点与导函数之间的关系。一般在知道一个函数的极值点时，直接把极值点代入导数令其等0即可。可导函数的极值点一定是导数为0的点，但导数为0的点不一定是极值点。

## 二、填空题（共7小题，每小题4分，满分28分）

11. （4分）（2011•浙江）设函数  $f(x) = \frac{4}{1-x}$ ，若  $f(a) = 2$ ，则实数  $a = \underline{-1}$ 。

**【考点】** 函数的值。

**【专题】** 函数的性质及应用。

**【分析】** 将  $x=a$  代入到  $f(x)$ ，得到  $\frac{4}{1-a} = 2$ 。再解方程即可得。

**【解答】** 解：由题意， $f(a) = \frac{4}{1-a} = 2$ ，

解得， $a = -1$ 。

故  $a = -1$ 。

**【点评】** 本题是对函数值的考查，属于简单题。对这样问题的解答，旨在让学生体会函数，函数值的意义，从而更好的把握函数概念，进一步研究函数的其他性质。

12. （4分）（2011•浙江）若直线与直线  $x - 2y + 5 = 0$  与直线  $2x + my - 6 = 0$  互相垂直，则实数  $m = \underline{1}$ 。

**【考点】** 直线的一般式方程与直线的垂直关系。

**【专题】** 直线与圆。

**【分析】** 求出两条直线的斜率；利用两直线垂直斜率之积为  $-1$ ，列出方程求出  $m$  的值。

**【解答】** 解：直线  $x - 2y + 5 = 0$  的斜率为  $\frac{1}{2}$

直线  $2x + my - 6 = 0$  的斜率为  $-\frac{2}{m}$

∵ 两直线垂直

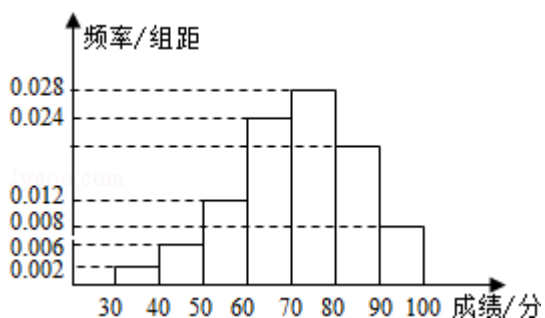
$$\therefore \frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{m}\right) = -1$$

解得  $m = 1$

故答案为：1

【点评】 本题考查由直线方程的一般式求直线的斜率、考查两直线垂直斜率之积为 - 1.

13. (4分) (2011•浙江) 某小学为了解学生数学课程的学习情况, 在3000名学生中随机抽取200名, 并统计这200名学生的某次数学考试成绩, 得到了样本的频率分布直方图(如图). 根据频率分布直方图3000名学生在该次数学考试中成绩小于60分的学生数是 600



【考点】 频率分布直方图.

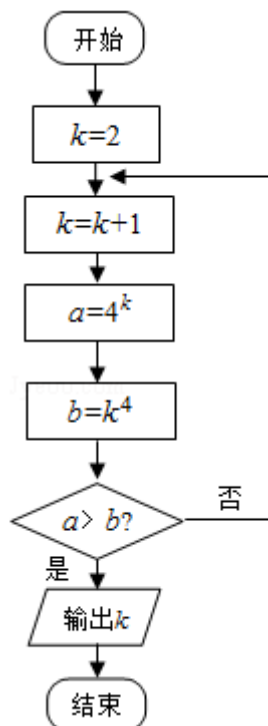
【专题】 概率与统计.

【分析】 首先计算成绩小于60 的三个小矩形的面积之和, 即成绩小于60 的学生的频率, 再乘以3000即可.

【解答】 解: 由频率分布直方图成绩小于60 的学生的频率为  $10(0.002+0.006+0.012)=0.2$ , 所以成绩小于60分的学生数是  $3000 \times 0.2=600$  故答案为: 600

【点评】 本题考查频率分布直方图和由频率分布直方图估计总体的分布, 考查识图能力.

14. (4分) (2011•浙江) 某程序框图如图所示, 则该程序运行后输出的k的值是 5.



【考点】 程序框图.

【专题】算法和程序框图.

【分析】分析程序中各变量、各语句的作用，再根据流程图所示的顺序，可知：该程序的作用是利用循环计算并输出k值. 模拟程序的运行过程，用表格对程序运行过程中各变量的值进行分析，不难得到最终的输出结果.

【解答】解：程序在运行过程中各变量的值如下表示：

第一圈  $k=3$   $a=4^3$   $b=3^4$

第二圈  $k=4$   $a=4^4$   $b=4^4$

第三圈  $k=5$   $a=4^5$   $b=54$

此时 $a>b$ ，退出循环，k值为5

故答案为：5.

【点评】对于流程图处理方法是：①分析流程图（或伪代码），从流程图（或伪代码）中既要分析出计算的类型，又要分析出参与计算的数据（如果参与运算的数据比较多，也可使用表格对数据进行分析管理） $\Rightarrow$ ②建立数学模型，根据第一步分析的结果，选择恰当的数学模型 $\Rightarrow$ ③解模.

15. （4分）（2011•浙江）若平面向量 $\alpha$ ， $\beta$ 满足 $|\alpha|=1$ ， $|\beta|\leq 1$ ，且以向量 $\alpha$ ， $\beta$ 为邻边的平行四边形的面积为 $\frac{1}{2}$ ，则 $\alpha$ 和 $\beta$ 的夹角 $\theta$ 的范围是  $[30^\circ, 150^\circ]$ .

【考点】数量积表示两个向量的夹角.

【专题】平面向量及应用.

【分析】根据平行四边形的面积，得到对角线分成的两个三角形的面积，利用正弦定理写出三角形面积的表示式，表示出要求角的正弦值，根据角的范围写出符合条件的角.

【解答】解： $\because \frac{1}{2} |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \sin\theta = \frac{1}{4}$

$$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2 |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|},$$

$$\because |\vec{\alpha}|=1, |\vec{\beta}|\leq 1,$$

$$\therefore \sin\theta \geq \frac{1}{2},$$

$$\because \theta \in [0, \pi]$$

$$\therefore \theta \in [30^\circ, 150^\circ],$$

故答案为： $[30^\circ, 150^\circ]$ ，或 $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ ，

【点评】本题考查两个向量的夹角，考查利用正弦定理表示三角形的面积，考查不等式的变化，是一个比较简单的综合题目.

16. （4分）（2011•浙江）若实数x，y满足 $x^2+y^2+xy=1$ ，则x+y的最大值是  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

【考点】基本不等式.

【专题】不等式的解法及应用.

**【分析】**利用基本不等式，根据 $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$ 把题设等式整理成关于 $x+y$ 的不等式，求得

其范围，则 $x+y$ 的最大值可得.

**【解答】**解： $\because x^2+y^2+xy=1$

$$\therefore (x+y)^2 = 1+xy$$

$$\because xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$$

$$\therefore (x+y)^2 - 1 \leq \frac{(x+y)^2}{4}, \text{ 整理求得 } -\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq x+y \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore x+y \text{ 的最大值是 } \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{故答案为: } \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

**【点评】**本题主要考查了基本不等式. 应熟练掌握如均值不等式, 柯西不等式等性质.

17. (4分) (2011•浙江) 若数列  $\{n(n+4) \left(\frac{2}{3}\right)^n\}$  中的最大项是第 $k$ 项, 则 $k=$  4

**【考点】**数列的函数特性.

**【专题】**点列、递归数列与数学归纳法.

**【分析】**求数列的最大值, 可通过做差或做商比较法判断数列的单调性处理.

**【解答】**解: 令  $a_n = n(n+4) \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ,

$$\text{假设 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)(n+5) \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{n(n+4) \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2(n+1)(n+5)}{3n(n+4)} \geq 1,$$

则  $2(n+1)(n+5) \geq 3n(n+4)$ , 即  $n^2 \leq 10$ , 所以  $n < 4$ ,

又 $n$ 是整数, 即 $n \leq 3$ 时,  $a_{n+1} > a_n$ ,

当 $n \geq 4$ 时,  $a_{n+1} < a_n$ ,

所以 $a_4$ 最大.

故答案为: 4.

**【点评】**本题考查数列的最值问题, 利用做差或做商比较法判断数列的单调性是求数列最值的常用方式.

### 三、解答题 (共5小题, 满分72分)

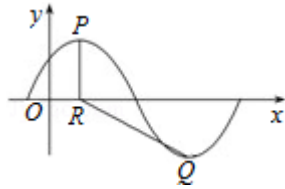
18. (14分) (2011•浙江) 已知函数  $f(x) = A \sin\left(\frac{\pi}{3}x + \phi\right)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $A > 0$ ,

$0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ .  $y = f(x)$  的部分图象, 如图所示, P、Q 分别为该图象的最高点和最低点,

点P的坐标为  $(1, A)$ .

(I) 求  $f(x)$  的最小正周期及  $\phi$  的值;

(II) 若点R的坐标为  $(1, 0)$ ,  $\angle PRQ = \frac{2\pi}{3}$ , 求A的值.



**【考点】** 函数  $y = A \sin(\omega x + \phi)$  的图象变换; 三角函数的周期性及其求法.

**【专题】** 三角函数的图像与性质.

**【分析】** (I) 由已知函数  $f(x) = A \sin\left(\frac{\pi}{3}x + \phi\right)$ , 我们易求出函数的最小正周期, 又由P的坐标为  $(1, A)$ , 我们易构造出一个关于  $\phi$  的三角方程, 结合  $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$  解三角方程即可求出  $\phi$  值.

(II) 根据 (I) 的结论及R的坐标, 和  $\angle PRQ = \frac{2\pi}{3}$ , 利用余弦定理我们易构造出一个关于A的方程, 解方程即可得到A的值.

**【解答】** 解: (I) 由题意得,  $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$

$\because P(1, A)$  在函数  $f(x) = A \sin\left(\frac{\pi}{3}x + \phi\right)$  的图象上

$$\therefore \sin\left(\frac{\pi}{3} + \phi\right) = 1$$

$$\text{又} \because 0 < \phi < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \phi = \frac{\pi}{6}$$

(II) 由P、Q分别为该图象的最高点和最低点, 点P的坐标为  $(1, A)$ , 结合 (I) 可知点Q的坐标为  $(4, -A)$

连接PQ, 在  $\triangle PRQ$  中,  $\angle PRQ = \frac{2\pi}{3}$

可得,  $\angle QRX = \frac{\pi}{6}$ , 作  $QM \perp X$  轴于M, 则  $QM = A$ ,  $RM = 3$ ,

$$\text{所以有 } \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{QM}{RM} = \frac{A}{3}$$

$$\therefore A = \sqrt{3}$$

**【点评】** 本题考查的知识点是函数  $y = A \sin(\omega x + \phi)$  的图象变换，三角函数的周期性及其求法，其中根据已知条件构造关于参数  $A$ ， $\phi$  是解答本题的关键。

19. (14分) (2011•浙江) 已知公差不为0的等差数列  $\{a_n\}$  的首项  $a_1$  ( $a_1 \in \mathbb{R}$ )，且  $\frac{1}{a_1}$ ， $\frac{1}{a_2}$ ， $\frac{1}{a_4}$  成等比数列。

(I) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式；

(II) 对  $n \in \mathbb{N}^*$ ，试比较  $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_2^3} + \dots + \frac{1}{a_2^n}$  与  $\frac{1}{a_1}$  的大小。

**【考点】** 数列与不等式的综合；数列的求和；等比数列的性质。

**【专题】** 等差数列与等比数列。

**【分析】** (I) 由  $\frac{1}{a_1}$ ， $\frac{1}{a_2}$ ， $\frac{1}{a_4}$  成等比数列，利用等比数列的性质及等差数列的通项公式

列出关于首项和公差的方程，根据公差  $d$  不为0，解得公差  $d$  与首项相等，然后根据首项和公差写出数列的通项公式即可；

(II) 设  $T_n = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_2^3} + \dots + \frac{1}{a_2^n}$  与根据 (I) 中求得的通项公式表示出  $a_2^n$ ，然后

利用等比数列的前  $n$  项和的公式求出  $T_n$ ，即可比较出两者的大小关系。

**【解答】** 解：(I) 设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ ，由题意可知  $(\frac{1}{a_2})^2 = \frac{1}{a_1} \times \frac{1}{a_4}$ ，

即  $(a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 3d)$ ，从而  $a_1 d = d^2$ ，

因为  $d \neq 0$ ，所以  $d = a_1$ ，

故  $a_n = nd = na_1$ ；

(II) 记  $T_n = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_2^n}$ ，由  $a_n = na_1$ ，得  $a_2^n = 2^n a_1$ ，

$$\text{则 } T_n = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_2^n} = \frac{1}{a_1} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$$

$$= \frac{1}{a_1} \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right),$$

$$\therefore T_n - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_1} \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right) - \frac{1}{a_1} = -\frac{1}{a_1} \left( \frac{1}{2^n} \right),$$

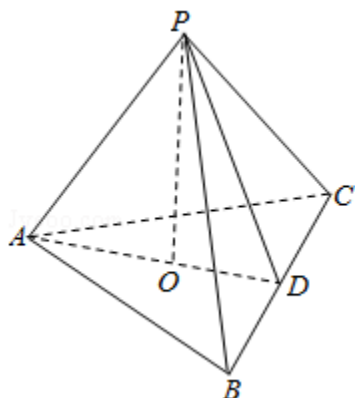
从而，当  $a_1 > 0$  时， $T_n < \frac{1}{a_1}$ ；当  $a_1 < 0$  时， $T_n > \frac{1}{a_1}$ 。

**【点评】** 此题考查学生掌握等比数列的性质，利用运用等比数列的通项公式及前  $n$  项和的公式化简求值，是一道中档题。

20. (14分) (2011•浙江) 如图，在三棱锥  $P - ABC$  中， $AB = AC$ ， $D$  为  $BC$  的中点， $PO \perp$  平面  $ABC$ ，垂足  $O$  落在线段  $AD$  上。

(I) 证明:  $AP \perp BC$ ;

(II) 已知  $BC=8$ ,  $PO=4$ ,  $AO=3$ ,  $OD=2$ . 求二面角  $B-AP-C$  的大小.



**【考点】**与二面角有关的立体几何综合题; 空间中直线与直线之间的位置关系; 二面角的平面角及求法.

**【专题】**空间位置关系与距离; 空间角; 立体几何.

**【分析】**(I) 由题意, 因为  $PO \perp$  平面  $ABC$ , 垂足  $O$  落在线段  $AD$  上所以  $BC \perp PO$ . 有  $AB=AC$ ,  $D$  为  $BC$  的中点, 得到  $BC \perp AD$ , 进而得到线面垂直, 即可得到所证;

(II) 有 (I) 利用面面垂直的判定得到  $PA \perp$  平面  $BMC$ , 再利用二面角的定义得到二面角的平面角, 然后求出即可.

**【解答】**解: (I) 由题意画出图如下:

由  $AB=AC$ ,  $D$  为  $BC$  的中点, 得  $AD \perp BC$ ,

又  $PO \perp$  平面  $ABC$ , 垂足  $O$  落在线段  $AD$  上, 得到  $PO \perp BC$ ,

$\therefore PO \cap AD = O \therefore BC \perp$  平面  $PAD$ , 故  $BC \perp PA$ .

(II) 如图, 在平面  $PAB$  中作  $BM \perp PA$  于  $M$ , 连接  $CM$ ,

$\therefore BC \perp PA$ ,  $\therefore PA \perp$  平面  $BMC$ ,  $\therefore AP \perp CM$ , 故  $\angle BMC$  为二面角  $B-AP-C$  的平面角,

在直角三角形  $ADB$  中,  $AB^2 = AD^2 + BD^2 = 41$  得:  $AB = \sqrt{41}$ ;

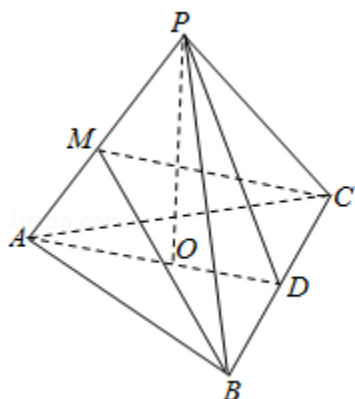
在直角三角形  $POD$  中,  $PD^2 = PO^2 + OD^2$ , 在直角三角形  $PDB$  中,  $PB^2 = PD^2 + BD^2$ ,  $\therefore PB^2 = PO^2 + OD^2 + BD^2 = 36$ , 得  $PB = 6$ ,

在直角三角形  $POA$  中,  $PA^2 = AO^2 + OP^2 = 25$ , 得  $PA = 5$ ,

$$\text{又 } \cos \angle BPA = \frac{PA^2 + PB^2 - AB^2}{2PA \cdot PB} = \frac{1}{3}, \text{ 从而 } \sin \angle BPA = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

故  $BM = PB \sin \angle BPA = 4\sqrt{2}$ . 同理:  $CM = 4\sqrt{2}$ ,

$\therefore BM^2 + MC^2 = BC^2$ ,  $\therefore$  二面角  $B-AP-C$  的大小为  $90^\circ$ .



**【点评】** (I) 此问考查了线面垂直的判定定理，还考查了线面垂直的性质定理；  
 (II) 此问考查了面面垂直的判定定理，二面角的平面角的定义，还考查了在三角形中求解。

21. (15分) (2011•浙江) 设函数  $f(x) = a^2 \ln x - x^2 + ax$ ,  $a > 0$ , 且  $f(1) \geq e - 1$ .

(I) 求  $f(x)$  的单调区间

(II) 求所有的实数  $a$ , 使  $e - 1 \leq f(x) \leq e^2$  对  $x \in [1, e]$  恒成立. 注:  $e$  为自然对数的底数.

**【考点】** 利用导数研究函数的单调性; 利用导数求闭区间上函数的最值.

**【专题】** 导数的综合应用.

**【分析】** (I) 直接利用导函数的正负与原函数的单调性之间的关系, 即当导函数大于0时原函数单调递增, 当导函数小于0时原函数单调递减来求  $f(x)$  的单调区间即可.

(II) 先利用 (I) 的结论求出  $f(x)$  在  $[1, e]$  上的最值, 把原不等式转化为比较  $f(x)$  在  $[1, e]$  上的最值与两端点值之间的关系即可求所有的实数  $a$ .

**【解答】** 解: (I) 因为  $f(x) = a^2 \ln x - x^2 + ax$ , 其中  $x > 0$ .

$$\text{所以 } f'(x) = \frac{a^2}{x} - 2x + a = -\frac{(x-a)(2x+a)}{x}$$

由于  $a > 0$ , 所以  $f(x)$  的增区间为  $(0, a)$ ,  $f(x)$  的减区间为  $(a, +\infty)$ .

(II) 证明: 由题得,  $f(1) = a - 1 \geq e - 1$ , 即  $a \geq e$ ,

由 (I) 知  $f(x)$  在  $[1, e]$  内单调递增  
 要使  $e - 1 \leq f(x) \leq e^2$  对  $x \in [1, e]$  恒成立,

$$\text{只要 } \begin{cases} f(1) = a - 1 \geq e - 1 \\ f(e) = a^2 - e^2 + ae \leq e^2 \end{cases}$$

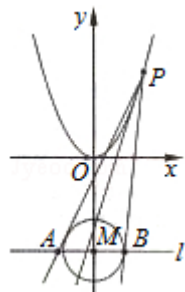
解得  $a = e$ .

**【点评】** 本题主要考查导函数的正负与原函数的单调性之间的关系, 即当导函数大于0时原函数单调递增, 当导函数小于0时原函数单调递减.

22. (15分) (2011•浙江) 如图, 设  $P$  是抛物线  $C_1: x^2 = y$  上的动点. 过点  $P$  做圆  $C_2: x^2 + (y+3)^2 = 1$  的两条切线, 交直线  $l: y = -3$  于  $A, B$  两点.

(I) 求  $C_2$  的圆心  $M$  到抛物线  $C_1$  准线的距离.

(II) 是否存在点  $P$ , 使线段  $AB$  被抛物线  $C_1$  在点  $P$  处的切线平分? 若存在, 求出点  $P$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.



**【考点】** 圆锥曲线的综合; 抽象函数及其应用; 直线与圆锥曲线的综合问题.

**【专题】** 圆锥曲线的定义、性质与方程.

**【分析】** (I) 先求出抛物线

$C_1$  准线的方程, 再利用点到直线距离的求法求出  $C_2$  的圆心  $M$  到抛物线  $C_1$  准线的距离即可.

(II) 先设抛物线

$C_1$ 在点P处的切线交直线 $l$ 于点D, 线段AB被抛物线 $C_1$ 在点P处的切线平分即为 $x_A+x_B=2x_D$ . 设出过点P做圆 $C_2: x^2+(y+3)^2=1$ 的两条切线PA, PB, 与直线 $y=-3$ 联立, 分别求出A, B, D三点的横坐标, 代入 $x_A+x_B=2x_D$ . 看是否能解出点P, 即可判断出是否存在点P, 使线段AB被抛物线 $C_1$ 在点P处的切线平分.

【解答】解: (I) 因为抛物线 $C_1$ 准线的方程为:  $y=-\frac{1}{4}$ ,

所以圆心M到抛物线 $C_1$ 准线的距离为:  $|\frac{1}{4}-(-3)|=\frac{11}{4}$ .

(II) 设点P的坐标为 $(x_0, x_0^2)$ , 抛物线 $C_1$ 在点P处的切线交直线 $l$ 于点D,

因为:  $y=x^2$ , 所以:  $y'=2x$ ;

再设A, B, D的横坐标分别为 $x_A, x_B, x_D$ ,

∴过点P $(x_0, x_0^2)$ 的抛物线 $C_1$ 的切线的斜率 $k=2x_0$ .

过点P $(x_0, x_0^2)$ 的抛物线 $C_1$ 的切线方程为:  $y-x_0^2=2x_0(x-x_0)$  ①

当 $x_0=1$ 时, 过点P $(1, 1)$ 且与圆 $C_2$ 相切的切线PA方程为:  $y-1=\frac{15}{8}(x-1)$ . 可得 $x_A=-$

$\frac{17}{15}$ ,  $x_B=1, x_D=-1, x_A+x_B \neq 2x_D$ .

当 $x_0=-1$ 时, 过点P $(-1, 1)$ 且与圆 $C_2$ 的相切的切线PB的方程为:  $y-1=-\frac{15}{8}(x+1)$ .

可得 $x_A=-1, x_B=\frac{17}{15}, x_D=1, x_A+x_B \neq 2x_D$ .

所以 $x_0^2-1 \neq 0$ . 设切线PA, PB的斜率为 $k_1, k_2$ ,

则: PA:  $y-x_0^2=k_1(x-x_0)$  ②

PB:  $y-x_0^2=k_2(x-x_0)$ . ③

将 $y=-3$ 分别代入①, ②, ③得  $x_D=\frac{x_0^2-3}{2x_0}$  ( $x_0 \neq 0$ );  $x_A=x_0-\frac{x_0^2+3}{k_1}$ ;

$x_B=x_0-\frac{x_0^2+3}{k_2}$  ( $k_1, k_2 \neq 0$ )

从而  $x_A+x_B=2x_0-\frac{x_0^2+3}{k_1}-\frac{x_0^2+3}{k_2}$ .

又  $\frac{|-x_0k_1+x_0^2+3|}{\sqrt{k_1^2+1}}=1$ ,

即  $(x_0^2-1)k_1^2-2(x_0^2+3)x_0k_1+(x_0^2+3)^2-1=0$ ,

同理  $(x_0^2-1)k_2^2-2(x_0^2+3)x_0k_2+(x_0^2+3)^2-1=0$ ,

所以 $k_1, k_2$ 是方程  $(x_0^2-1)k^2-2(x_0^2+3)x_0k+(x_0^2+3)^2-1=0$ 的两个不等的根,

从而  $k_1+k_2=\frac{2(3+x_0^2)x_0}{x_0^2-1}$ ,  $k_1 \cdot k_2=\frac{(3+x_0^2)^2-1}{x_0^2-1}$ ,

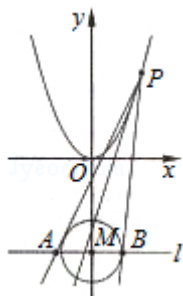
因为 $x_A+x_B=2x_D$ .

$$\text{所以 } 2x_0 - (3+x_0^2) \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) = \frac{x_0^2 - 3}{x_0}, \text{ 即 } \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{x_0}.$$

$$\text{从而 } \frac{2(3+x_0^2)x_0}{(x_0^2+3)^2-1} = \frac{1}{x_0},$$

$$\text{进而得 } x_0^4 = 8, \quad x_0 = \pm \sqrt[4]{8}.$$

综上所述，存在点P满足题意，点P的坐标为  $(\pm \sqrt[4]{8}, 2\sqrt{2})$  .



**【点评】** 本题是对椭圆与抛物线，以及直线与椭圆和抛物线位置关系的综合考查. 在圆锥曲线的三种常见曲线中，抛物线是最容易的，而双曲线是最复杂的，所以一般出大题时，要么是单独的椭圆与直线，要么是椭圆与抛物线，直线相结合. 这一类型题目，是大题中比较有难度的题.