

2011年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学

(湖南卷)

参考公式 (1) 柱体体积公式 $V = Sh$, 其中 S 为底面面积, h 为高.

(2) 球的体积公式 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, 其中 R 为球的半径.

一、选择题: 本大题共8小题, 每小题5分, 共40分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 设全集 $U = M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $M \cap C_U N = \{2, 4\}$, 则 $N =$

- A. $\{1, 2, 3\}$ B. $\{1, 3, 5\}$ C. $\{1, 4, 5\}$ D. $\{2, 3, 4\}$

2. 若 $a, b \in R$, i 为虚数单位, 且 $(a+i)i = b+i$ 则

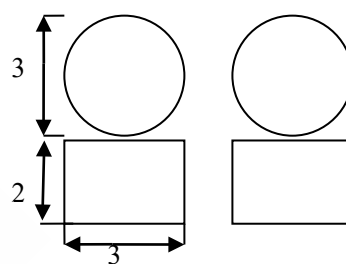
- A. $a=1, b=1$ B. $a=-1, b=1$
C. $a=1, b=-1$ D. $a=-1, b=-1$

3. “ $x > 1$ ”是“ $|x| > 1$ ”的

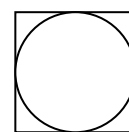
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分又不必要条件

4. 设图1是某几何体的三视图, 则该几何体的体积为

- A. $9\pi + 42$ B. $36\pi + 18$
C. $\frac{9}{2}\pi + 12$ D. $\frac{9}{2}\pi + 18$



正视图 侧视图



俯视图

5. 通过随机询问110名性别不同的大学生是否爱好某项运动, 得到如下列联表:

	男	女	总计
爱好	40	20	60
不爱好	20	30	50
总计	60	50	110

由 $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+d)(c+d)(a+c)(b+d)}$ 算得, $K^2 = \frac{110 \times (40 \times 30 - 20 \times 20)^2}{60 \times 50 \times 60 \times 50} \approx 7.8$

附表:

$p(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

参照附表, 得到的正确结论是

- A. 有99%以上的把握认为“爱好该项运动与性别有关”
B. 有99%以上的把握认为“爱好该项运动与性别无关”
C. 在犯错误的概率不超过0.1%的前提下, 认为“爱好该项运动与性别有关”
D. 在犯错误的概率不超过0.1%的前提下, 认为“爱好该项运动与性别无关”

6. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1 (a > 0)$ 的渐近线方程为 $3x \pm 2y = 0$, 则 a 的值为

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

7. 曲线 $y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} - \frac{1}{2}$ 在点 $M(\frac{\pi}{4}, 0)$ 处的切线的斜率为

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. 已知函数 $f(x) = e^x - 1, g(x) = -x^2 + 4x - 3$, 若有 $f(a) = g(b)$, 则 b 的取值范围为

- A. $[2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$ B. $[2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$ C. $[1, 3]$ D. $(1, 3)$

二、填空题: 本大题共8小题, 考生作答7小题, 每小题5分, 共35分, 把答案填在答题卡中对应题号后的横线上.

(一) 选做题 (请考生在9、10两题中任选一题作答, 如果全做, 则按前一题记分)

9. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 \cos \alpha, \\ y = \sqrt{3} \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数). 在极坐标系 (ρ, θ) 中, 曲线 C_2 的方程为 $\rho(\cos \theta - \sin \theta) + 1 = 0$, 则 C_1 与 C_2 的交点个数为_____

与直角坐标系 xOy 取相同的长度单位, 且以原点 O 为极点, 以 x 轴正半轴为极轴) 中, 曲线 C_2 的方程为 $\rho(\cos \theta - \sin \theta) + 1 = 0$, 则 C_1 与 C_2 的交点个数为_____

10. 已知某试验范围为 $[10, 90]$, 若用分数法进行4次优选试验, 则第二次试点可以是_____

(二) 必做题 (11~16题)

11. 若执行如图2所示的框图, 输入 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 8$ 则输出的数等于_____

12. 已知 $f(x)$ 为奇函数, $g(x) = f(x) + 9, g(-2) = 3$, 则 $f(2) =$ _____.

13. 设向量 a, b 满足 $|a| = 2\sqrt{5}, b = (2, 1)$, 且 a 与 b 的方向相反, 则 a 的坐标为_____.

14. 设 $m > 1$, 在约束条件 $\begin{cases} y \geq x \\ y \leq mx \\ x + y \leq 1 \end{cases}$ 下, 目标函数 $z = x + 5y$ 的最大值为4, 则 m 的值为_____.

15. 已知圆 $C: x^2 + y^2 = 12$, 直线 $l: 4x + 3y = 25$.

(1) 圆 C 的圆心到直线 l 的距离为_____.

(2) 圆 C 上任意一点 A 到直线 l 的距离小于2的概率为_____.

16. 给定 $k \in N^*$, 设函数 $f: N^* \rightarrow N^*$ 满足: 对于任意大于 k 的正整数 n , $f(n) = n - k$

(1) 设 $k = 1$, 则其中一个函数 f 在 $n = 1$ 处的函数值为_____;

(2) 设 $k = 4$, 且当 $n \leq 4$ 时, $2 \leq f(n) \leq 3$, 则不同的函数 f 的个数为_____.

三、解答题：本大题共6小题，共75分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分12分)

在 $\triangle ABC$ 中，角A,B,C所对的边分别为a, b, c, 且满足 $c \sin A = a \cos C$.

(I) 求角C的大小;

(II) 求 $\sqrt{3} \sin A - \cos(B + \frac{\pi}{4})$ 的最大值，并求取得最大值时角A、B的大小.

18. (本小题满分12分)

某河流上的一座水力发电站，每年六月份的发电量Y（单位：万千瓦时）与该河上游在六月份是我降雨量X（单位：毫米）有关，据统计，当 $X=70$ 时， $Y=460$ ；X每增加10，Y增加5. 已知近20年X的值为：140, 110, 160, 70, 200, 160, 140, 160, 220, 200, 110, 160, 160, 200, 140, 110, 160, 220, 140, 160.

(I) 完成如下的频率分布表

近20年六月份降雨量频率分布表

降雨量	70	110	140	160	200	220
频率	$\frac{1}{20}$		$\frac{4}{20}$			$\frac{2}{20}$

(II) 假定今年六月份的降雨量与近20年六月份降雨量的分布规律相同，并将频率是为概率，求今年六月份该水力发电站的发电量低于490（万千瓦时）或超过530（万千瓦时）的概率.

19. (本小题满分12分)

如图3，在圆锥 PO 中，已知 $PO = \sqrt{2}$, $\odot O$ 的直径

$AB = 2$, 点C在 \widehat{AB} 上，且 $\angle CAB = 30^\circ$, D为AC

的中点.

(I) 证明： $AC \perp$ 平面 POD ;

(II) 求直线 OC 和平面 PAC 所成角的正弦值.

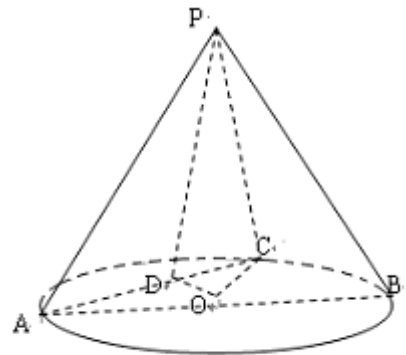


图 3

20. (本小题满分13分)

某企业第1年初购买一台价值为120万元的设备 M ， M 的价值在使用过程中逐年减少. 从第2年到第6年，每年初 M 的价值比上年初减少10万元；从第7年开始，每年初 M 的价值为上年初的75%.

(I) 求第 n 年初 M 的价值 a_n 的表达式；

(II) 设 $A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ ，若 A_n 大于80万元，则 M 继续使用，否则须在第 n 年初对 M 更新，证明：须在第9年初对 M 更新.

21. (本小题满分13分)

已知平面内一动点 P 到点 $F(1,0)$ 的距离与点 P 到 y 轴的距离的差等于1.

(I) 求动点 P 的轨迹 C 的方程；

(II) 过点 F 作两条斜率存在且互相垂直的直线 l_1, l_2 ，设 l_1 与轨迹 C 相交于点

A, B ， l_2 与轨迹 C 相交于点 D, E ，求 $\overline{AD}, \overline{EB}$ 的最小值.

22. (本小题满分13分)

设函数 $f(x) = x - \frac{1}{x} - a \ln x (a \in R)$.

(I) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

(II) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ，记过点 $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ 的直线斜率为 k . 问：是否存在 a ，使得 $k = 2 - a$ ？若存在，求出 a 的值；若不存在，请说明理由.

