

2015年全国统一高考数学试卷（文科）（新课标Ⅱ）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分

1. （5分）已知集合 $A=\{x|-1<x<2\}$ ， $B=\{x|0<x<3\}$ ，则 $A\cup B=$ （ ）
- A. $(-1, 3)$ B. $(-1, 0)$ C. $(0, 2)$ D. $(2, 3)$

【考点】1D：并集及其运算.

【专题】5J：集合.

【分析】根据集合的基本运算进行求解即可.

【解答】解： $\because A=\{x|-1<x<2\}$ ， $B=\{x|0<x<3\}$ ，

$\therefore A\cup B=\{x|-1<x<3\}$ ，

故选：A.

【点评】本题主要考查集合的基本运算，比较基础.

2. （5分）若为a实数，且 $\frac{2+ai}{1+i}=3+i$ ，则a=（ ）

A. -4 B. -3 C. 3 D. 4

【考点】A1：虚数单位i、复数.

【专题】5N：数系的扩充和复数.

【分析】根据复数相等的条件进行求解即可.

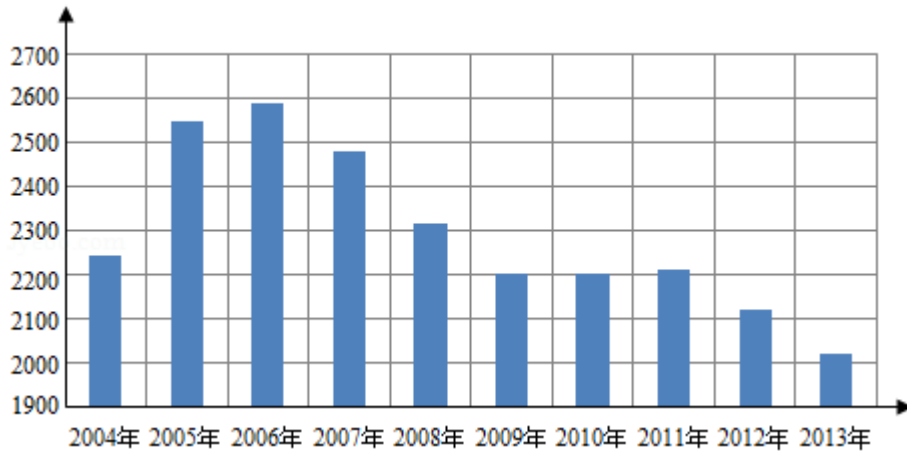
【解答】解：由 $\frac{2+ai}{1+i}=3+i$ ，得 $2+ai=(1+i)(3+i)=2+4i$ ，

则 $a=4$ ，

故选：D.

【点评】本题主要考查复数相等的应用，比较基础.

3. （5分）根据如图给出的2004年至2013年我国二氧化硫年排放量（单位：万吨）柱形图，以下结论中不正确的是（ ）



- A. 逐年比较，2008年减少二氧化硫排放量的效果最显著
- B. 2007年我国治理二氧化硫排放显现成效
- C. 2006年以来我国二氧化硫年排放量呈减少趋势
- D. 2006年以来我国二氧化硫年排放量与年份正相关

【考点】B8：频率分布直方图.

【专题】5I：概率与统计.

【分析】A从图中明显看出2008年二氧化硫排放量比2007年的二氧化硫排放量减少的最多，故A正确；

B从2007年开始二氧化硫排放量变少，故B正确；

C从图中看出，2006年以来我国二氧化硫年排放量越来越少，故C正确；

D2006年以来我国二氧化硫年排放量越来越少，与年份负相关，故D错误.

【解答】解：A从图中明显看出2008年二氧化硫排放量比2007年的二氧化硫排放量明显减少，且减少的最多，故A正确；

B2004 - 2006年二氧化硫排放量越来越多，从2007年开始二氧化硫排放量变少，故B正确；

C从图中看出，2006年以来我国二氧化硫年排放量越来越少，故C正确；

D2006年以来我国二氧化硫年排放量越来越少，而不是与年份正相关，故D错误

故选：D.

【点评】本题考查了学生识图的能力，能够从图中提取出所需要的信息，属于

基础题.

4. (5分) $\vec{a} = (1, -1)$, $\vec{b} = (-1, 2)$ 则 $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} =$ ()
- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

【考点】90: 平面向量数量积的性质及其运算.

【专题】5A: 平面向量及应用.

【分析】利用向量的加法和数量积的坐标运算解答本题.

【解答】解: 因为 $\vec{a} = (1, -1)$, $\vec{b} = (-1, 2)$ 则 $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = (1, 0) \cdot (1, -1) = 1$;

故选: C.

【点评】本题考查了向量的加法和数量积的坐标运算; 属于基础题目.

5. (5分) 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_1 + a_3 + a_5 = 3$, 则 $S_5 =$ ()
- A. 5 B. 7 C. 9 D. 11

【考点】85: 等差数列的前 n 项和.

【专题】35: 转化思想; 4A: 数学模型法; 54: 等差数列与等比数列.

【分析】由等差数列 $\{a_n\}$ 的性质, $a_1 + a_3 + a_5 = 3 = 3a_3$, 解得 a_3 . 再利用等差数列的前 n 项和公式即可得出.

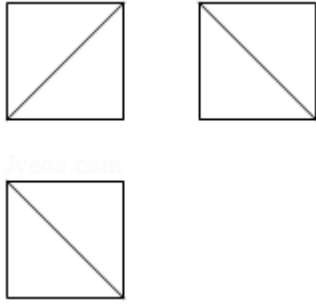
【解答】解: 由等差数列 $\{a_n\}$ 的性质, $a_1 + a_3 + a_5 = 3 = 3a_3$, 解得 $a_3 = 1$.

$$\text{则 } S_5 = \frac{5(a_1 + a_5)}{2} = 5a_3 = 5.$$

故选: A.

【点评】本题考查了等差数列的通项公式及其性质、前 n 项和公式, 考查了推理能力与计算能力, 属于中档题.

6. (5分) 一个正方体被一个平面截去一部分后, 剩余部分的三视图如图, 则截去部分体积与剩余部分体积的比值为 ()



A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{7}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{5}$

【考点】 L1: 由三视图求面积、体积.

【专题】 11: 计算题; 5F: 空间位置关系与距离.

【分析】 由三视图判断, 正方体被切掉的部分为三棱锥, 把相关数据代入棱锥的体积公式计算即可.

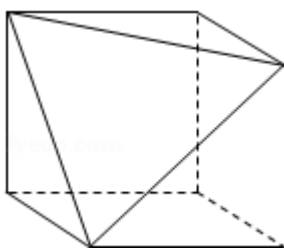
【解答】 解: 设正方体的棱长为1, 由三视图判断, 正方体被切掉的部分为三棱锥,

$$\therefore \text{正方体切掉部分的体积为 } \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{6},$$

$$\therefore \text{剩余部分体积为 } 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6},$$

$$\therefore \text{截去部分体积与剩余部分体积的比值为 } \frac{1}{5}.$$

故选: D.



【点评】 本题考查了由三视图判断几何体的形状, 求几何体的体积.

7. (5分) 已知三点A (1, 0), B (0, $\sqrt{3}$), C (2, $\sqrt{3}$) 则 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心到原点的距离为 ()

A. $\frac{5}{3}$

B. $\frac{\sqrt{21}}{3}$

C. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

D. $\frac{4}{3}$

【考点】J1: 圆的标准方程.

【专题】5B: 直线与圆.

【分析】利用外接圆的性质，求出圆心坐标，再根据圆心到原点的距离公式即可求出结论.

【解答】解：因为 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心在直线BC垂直平分线上，即直线 $x=1$ 上，可设圆心 $P(1, p)$ ，由 $PA=PB$ 得

$$|p| = \sqrt{1 + (p - \sqrt{3})^2},$$

$$\text{得 } p = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

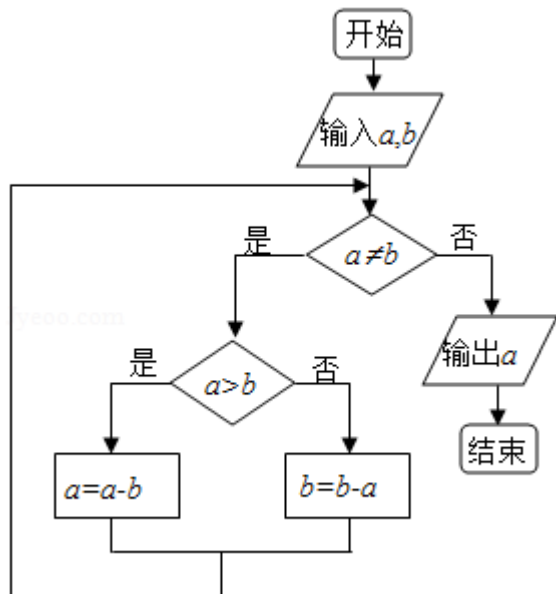
圆心坐标为 $P(1, \frac{2\sqrt{3}}{3})$,

$$\text{所以圆心到原点的距离 } |OP| = \sqrt{1 + (\frac{2\sqrt{3}}{3})^2} = \sqrt{1 + \frac{12}{9}} = \frac{\sqrt{21}}{3},$$

故选：B.

【点评】本题主要考查圆性质及 $\triangle ABC$ 外接圆的性质，了解性质并灵活运用是解决本题的关键.

8. (5分) 如图程序框图的算法思路源于我国古代数学名著《九章算术》中的“更相减损术”. 执行该程序框图，若输入 a, b 分别为14, 18, 则输出的 $a =$ ()



A. 0

B. 2

C. 4

D. 14

【考点】EF：程序框图.

【专题】27：图表型；5K：算法和程序框图.

【分析】模拟执行程序框图，依次写出每次循环得到的a，b的值，当a=b=2时不满足条件a≠b，输出a的值为2.

【解答】解：模拟执行程序框图，可得

a=14，b=18

满足条件a≠b，不满足条件a>b，b=4

满足条件a≠b，满足条件a>b，a=10

满足条件a≠b，满足条件a>b，a=6

满足条件a≠b，满足条件a>b，a=2

满足条件a≠b，不满足条件a>b，b=2

不满足条件a≠b，输出a的值为2.

故选：B.

【点评】本题主要考查了循环结构程序框图，属于基础题.

9. (5分) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{4}$ ， $a_3 a_5 = 4(a_4 - 1)$ ，则 $a_2 =$ ()

A. 2

B. 1

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{8}$

【考点】88：等比数列的通项公式.

【专题】54：等差数列与等比数列.

【分析】利用等比数列的通项公式即可得出.

【解答】解：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为q，

$$\because a_1 = \frac{1}{4}, a_3 a_5 = 4(a_4 - 1),$$

$$\therefore \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times q^6 = 4\left(\frac{1}{4}q^3 - 1\right),$$

化为 $q^3 = 8$ ，解得 $q = 2$

$$\text{则 } a_2 = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}.$$

故选：C.

【点评】 本题考查了等比数列的通项公式，属于基础题.

10. (5分) 已知A, B是球O的球面上两点, $\angle AOB=90^\circ$, C为该球面上的动点, 若三棱锥O - ABC体积的最大值为36, 则球O的表面积为 ()
- A. 36π B. 64π C. 144π D. 256π

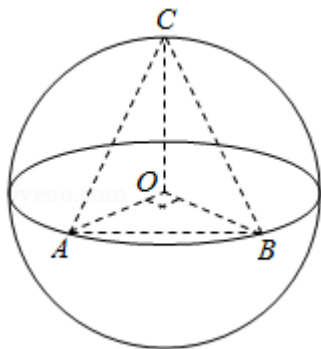
【考点】 LG: 球的体积和表面积.

【专题】 11: 计算题; 5F: 空间位置关系与距离.

【分析】 当点C位于垂直于面AOB的直径端点时, 三棱锥O - ABC的体积最大, 利用三棱锥O - ABC体积的最大值为36, 求出半径, 即可求出球O的表面积.

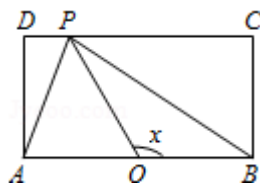
【解答】 解: 如图所示, 当点C位于垂直于面AOB的直径端点时, 三棱锥O - ABC的体积最大, 设球O的半径为R, 此时 $V_{O-ABC}=V_{C-AOB}=\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times R^2 \times R=\frac{1}{6}R^3=36$, 故 $R=6$, 则球O的表面积为 $4\pi R^2=144\pi$,

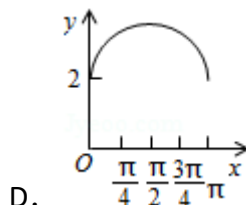
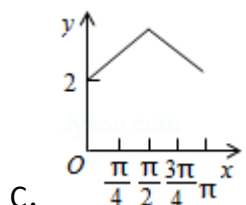
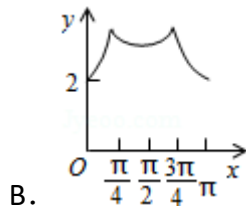
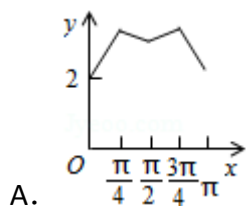
故选: C.



【点评】 本题考查球的半径与表面积, 考查体积的计算, 确定点C位于垂直于面AOB的直径端点时, 三棱锥O - ABC的体积最大是关键.

11. (5分) 如图, 长方形ABCD的边 $AB=2$, $BC=1$, O是AB的中点, 点P沿着边BC, CD与DA运动, 记 $\angle BOP=x$. 将动点P到A, B两点距离之和表示为x的函数 $f(x)$, 则 $y=f(x)$ 的图象大致为 ()



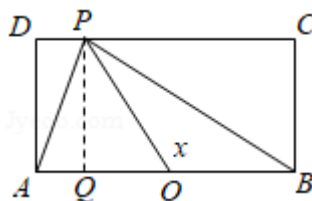


【考点】HC: 正切函数的图象.

【分析】根据函数图象关系, 利用排除法进行求解即可.

【解答】解: 当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 时, $BP = \tan x$, $AP = \sqrt{AB^2 + BP^2} = \sqrt{4 + \tan^2 x}$,

此时 $f(x) = \sqrt{4 + \tan^2 x} + \tan x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, 此时单调递增,



当P在CD边上运动时, $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ 且 $x \neq \frac{\pi}{2}$ 时,

如图所示, $\tan \angle POB = \tan(\pi - \angle POQ) = \tan x = -\tan \angle POQ = -\frac{PQ}{OQ} = -\frac{1}{OQ}$,

$$\therefore OQ = -\frac{1}{\tan x},$$

$$\therefore PD = AO - OQ = 1 + \frac{1}{\tan x}, \quad PC = BO + OQ = 1 - \frac{1}{\tan x},$$

$$\therefore PA + PB = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\tan x}\right)^2 + 1} + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\tan x}\right)^2 + 1},$$

$$\text{当 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } PA + PB = 2\sqrt{2},$$

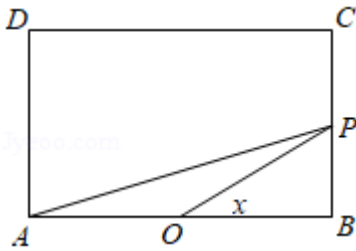
$$\text{当P在AD边上运动时, } \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi, \quad PA + PB = \sqrt{4 + \tan^2 x} - \tan x,$$

由对称性可知函数 $f(x)$ 关于 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称,

且 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) > f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, 且轨迹为非线型,

排除A, C, D,

故选：B.



【点评】 本题主要考查函数图象的识别和判断，根据条件先求出 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 时的解析式是解决本题的关键.

12. (5分) 设函数 $f(x) = \ln(1+|x|) - \frac{1}{1+x^2}$, 则使得 $f(x) > f(2x-1)$ 成立的 x 的取值范围是 ()
- A. $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$ B. $(\frac{1}{3}, 1)$
- C. $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ D. $(-\infty, -\frac{1}{3},) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$

【考点】 6B: 利用导数研究函数的单调性.

【专题】 33: 函数思想; 49: 综合法; 51: 函数的性质及应用.

【分析】 根据函数的奇偶性和单调性之间的关系, 将不等式进行转化即可得出结论.

【解答】 解: \because 函数 $f(x) = \ln(1+|x|) - \frac{1}{1+x^2}$ 为偶函数,

且在 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \ln(1+x) - \frac{1}{1+x^2}$,

导数为 $f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{(1+x^2)^2} > 0$,

即有函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增,

$\therefore f(x) > f(2x-1)$ 等价于 $f(|x|) > f(|2x-1|)$,

即 $|x| > |2x-1|$,

平方得 $3x^2 - 4x + 1 < 0$,

解得: $\frac{1}{3} < x < 1$,

所求x的取值范围是 $(\frac{1}{3}, 1)$.

故选：B.

【点评】 本题主要考查函数奇偶性和单调性的应用，综合考查函数性质的综合应用，运用偶函数的性质是解题的关键.

二、填空题

13. (3分) 已知函数 $f(x) = ax^3 - 2x$ 的图象过点 $(-1, 4)$ 则 $a = \underline{-2}$.

【考点】 36: 函数解析式的求解及常用方法.

【专题】 11: 计算题; 51: 函数的性质及应用.

【分析】 $f(x)$ 是图象过点 $(-1, 4)$ ，从而该点坐标满足函数 $f(x)$ 解析式，从而将点 $(-1, 4)$ 带入函数 $f(x)$ 解析式即可求出 a .

【解答】 解：根据条件得： $4 = -a + 2$;

$\therefore a = -2$.

故答案为： -2 .

【点评】 考查函数图象上的点的坐标和函数解析式的关系，考查学生的计算能力，比较基础.

14. (3分) 若 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} x+y-5 \leq 0 \\ 2x-y-1 \geq 0 \\ x-2y+1 \leq 0 \end{cases}$$
，则 $z=2x+y$ 的最大值为 $\underline{8}$.

【考点】 7C: 简单线性规划.

【专题】 59: 不等式的解法及应用.

【分析】 作出不等式组对应的平面区域，利用目标函数的几何意义，利用数形结合确定 z 的最大值.

【解答】 解：作出不等式组对应的平面区域如图：（阴影部分 ABC ）.

由 $z=2x+y$ 得 $y = -2x+z$,

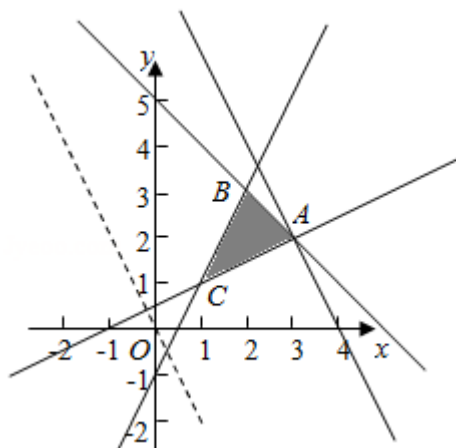
平移直线 $y = -2x+z$,

由图象可知当直线 $y = -2x + z$ 经过点A时，直线 $y = -2x + z$ 的截距最大，此时 z 最大。

$$\text{由} \begin{cases} x+y-5=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}, \text{即} A(3, 2)$$

将 $A(3, 2)$ 的坐标代入目标函数 $z = 2x + y$ ，得 $z = 2 \times 3 + 2 = 8$ 。即 $z = 2x + y$ 的最大值为8。

故答案为：8。



【点评】 本题主要考查线性规划的应用，结合目标函数的几何意义，利用数形结合的数学思想是解决此类问题的基本方法。

15. (3分) 已知双曲线过点 $(4, \sqrt{3})$ 且渐近线方程为 $y = \pm \frac{1}{2}x$ ，则该双曲线的标准方程是 $\frac{1}{4}x^2 - y^2 = 1$ 。

【考点】 KB: 双曲线的标准方程。

【专题】 11: 计算题; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程。

【分析】 设双曲线方程为 $y^2 - \frac{1}{4}x^2 = \lambda$ ，代入点 $(4, \sqrt{3})$ ，求出 λ ，即可求出双曲线的标准方程。

【解答】 解：设双曲线方程为 $y^2 - \frac{1}{4}x^2 = \lambda$ ，

代入点 $(4, \sqrt{3})$ ，可得 $3 - \frac{1}{4} \times 16 = \lambda$ ，

$\therefore \lambda = -1$ ，

\therefore 双曲线的标准方程是 $\frac{1}{4}x^2 - y^2 = 1$ 。

故答案为： $\frac{1}{4}x^2 - y^2 = 1$.

【点评】 本题考查双曲线的标准方程，考查学生的计算能力，正确设出双曲线的方程是关键.

16. (3分) 已知曲线 $y=x+\ln x$ 在点(1, 1)处的切线与曲线 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 相切，则 $a=$ 8.

【考点】 6H：利用导数研究曲线上某点切线方程.

【专题】 26：开放型；53：导数的综合应用.

【分析】 求出 $y=x+\ln x$ 的导数，求得切线的斜率，可得切线方程，再由于切线与曲线 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 相切，有且只有一切点，进而可联立切线与曲线方程，根据 $\Delta=0$ 得到 a 的值.

【解答】 解： $y=x+\ln x$ 的导数为 $y'=1+\frac{1}{x}$,

曲线 $y=x+\ln x$ 在 $x=1$ 处的切线斜率为 $k=2$,

则曲线 $y=x+\ln x$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-1=2x-2$ ，即 $y=2x-1$.

由于切线与曲线 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 相切，

故 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 可联立 $y=2x-1$ ，

得 $ax^2+ax+2=0$ ，

又 $a \neq 0$ ，两线相切有一切点，

所以有 $\Delta=a^2-8a=0$ ，

解得 $a=8$.

故答案为：8.

【点评】 本题考查导数的运用：求切线方程，主要考查导数的几何意义：函数在某点处的导数即为曲线在该点处的导数，设出切线方程运用两线相切的性质是解题的关键.

三. 解答题

17. $\triangle ABC$ 中， D 是 BC 上的点， AD 平分 $\angle BAC$ ， $BD=2DC$

(I) 求 $\frac{\sin \angle B}{\sin \angle C}$.

(II) 若 $\angle BAC = 60^\circ$, 求 $\angle B$.

【考点】 HP: 正弦定理.

【专题】 58: 解三角形.

【分析】 (I) 由题意画出图形, 再由正弦定理结合内角平分线定理得答案;

(II) 由 $\angle C = 180^\circ - (\angle BAC + \angle B)$, 两边取正弦后展开两角和的正弦, 再结合 (I) 中的结论得答案.

【解答】 解: (I) 如图,

由正弦定理得:

$$\frac{AD}{\sin \angle B} = \frac{BD}{\sin \angle BAD}, \quad \frac{AD}{\sin \angle C} = \frac{DC}{\sin \angle CAD},$$

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$, $BD = 2DC$,

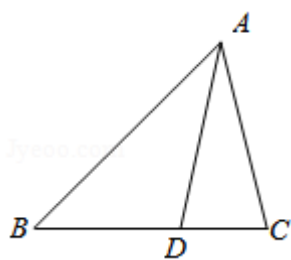
$$\therefore \frac{\sin \angle B}{\sin \angle C} = \frac{DC}{BD} = \frac{1}{2};$$

(II) $\because \angle C = 180^\circ - (\angle BAC + \angle B)$, $\angle BAC = 60^\circ$,

$$\therefore \sin \angle C = \sin(\angle BAC + \angle B) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \angle B + \frac{1}{2} \sin \angle B,$$

由 (I) 知 $2 \sin \angle B = \sin \angle C$,

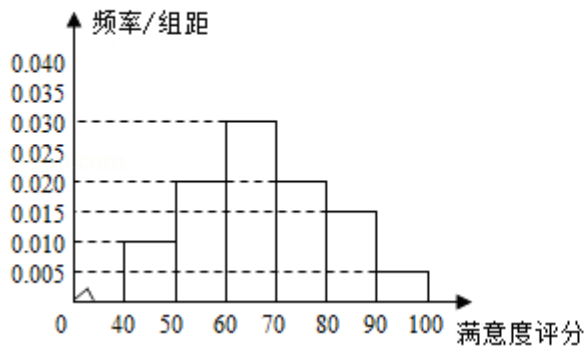
$$\therefore \tan \angle B = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{即 } \angle B = 30^\circ.$$



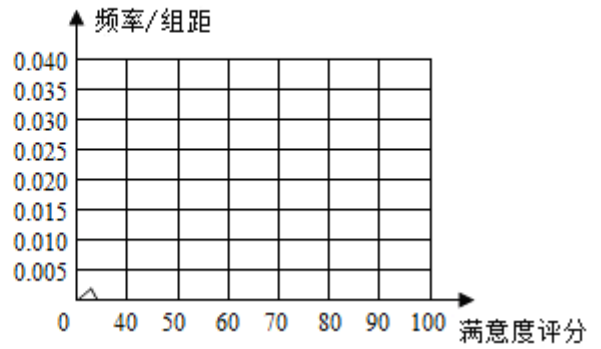
【点评】 本题考查了内角平分线的性质, 考查了正弦定理的应用, 是中档题.

18. 某公司为了了解用户对其产品的满意度, 从A, B两地区分别随机调查了40个用户, 根据用户对产品的满意度评分, 得到A地区用户满意度评分的频率分布直方图和B地区用户满意度评分的频数分布表

A地区用户满意度评分的频率分布直方图



B地区用户满意度评分的频率分布直方图



B地区用户满意度评分的频数分布表

满意度评分分组	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80)	[80, 90)	[90, 100)
频数	2	8	14	10	6

(I) 做出B地区用户满意度评分的频率分布直方图，并通过直方图比较两地区满意度评分的平均值及分散程度（不要求计算出具体值，给出结论即可）

(II) 根据用户满意度评分，将用户的满意度从低到高分为三个不等级：

满意度评分	低于70分	70分到89分	不低于90分
满意度等级	不满意	满意	非常满意

估计哪个地区用户的满意度等级为不满意的概率大？说明理由。

【考点】 B8：频率分布直方图；CB：古典概型及其概率计算公式。

【专题】 5I：概率与统计。

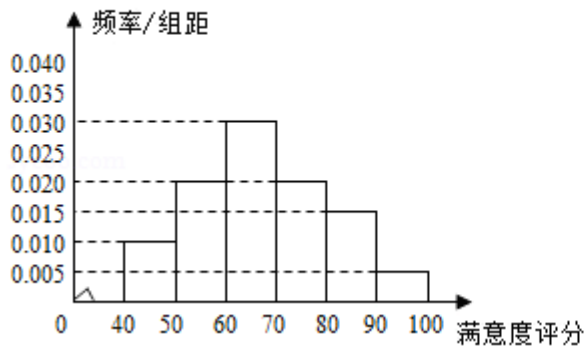
【分析】 (I) 根据分布表的数据，画出频率直方图，求解即可。

(II) 计算得出 C_A 表示事件：“A地区用户的满意度等级为不满意”， C_B 表示事件：“B地区用户的满意度等级为不满意”，

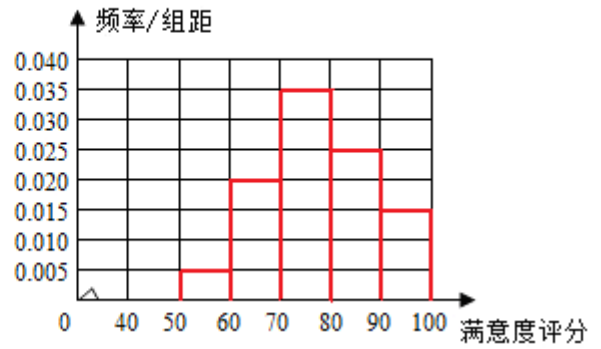
$P(C_A)$ ， $P(C_B)$ ，即可判断不满意的情况。

【解答】 解：(I)

A地区用户满意度评分的频率分布直方图



B地区用户满意度评分的频率分布直方图



通过两个地区用户满意度评分的频率分布直方图可以看出，B地区用户满意度评分的平均值高于A地区用户满意度评分的平均值，
B地区的用户满意度评分的比较集中，而A地区的用户满意度评分的比较分散。

(II) A地区用户的满意度等级为不满意的概率大。

记 C_A 表示事件：“A地区用户的满意度等级为不满意”， C_B 表示事件：“B地区用户的满意度等级为不满意”，

由直方图得 $P(C_A) = (0.01+0.02+0.03) \times 10 = 0.6$

得 $P(C_B) = (0.005+0.02) \times 10 = 0.25$

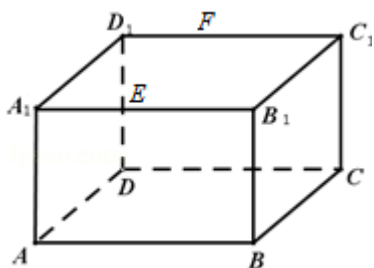
\therefore A地区用户的满意度等级为不满意的概率大。

【点评】 本题考查了频率直方图，频率表达运用，考查了阅读能力，属于中档题。

19. (12分) 如图，长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=16$ ， $BC=10$ ， $AA_1=8$ ，点E，F分别在 A_1B_1 ， D_1C_1 上， $A_1E=D_1F=4$ 。过E，F的平面 α 与此长方体的面相交，交线围成一个正方形

(I) 在图中画出这个正方形（不必说出画法和理由）

(II) 求平面 α 把该长方体分成的两部分体积的比值。



【考点】LF：棱柱、棱锥、棱台的体积；LJ：平面的基本性质及推论.

【专题】15：综合题；5F：空间位置关系与距离.

【分析】（I）利用平面与平面平行的性质，可在图中画出这个正方形；

（II）求出 $MH = \sqrt{EH^2 - EM^2} = 6$ ， $AH = 10$ ， $HB = 6$ ，即可求平面 α 把该长方体分成的两部分体积的比值.

【解答】解：（I）交线围成的正方形EFGH如图所示；

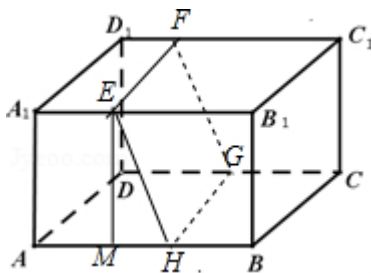
（II）作 $EM \perp AB$ ，垂足为M，则 $AM = A_1E = 4$ ， $EB_1 = 12$ ， $EM = AA_1 = 8$.

因为EFGH为正方形，所以 $EH = EF = BC = 10$ ，

于是 $MH = \sqrt{EH^2 - EM^2} = 6$ ， $AH = 10$ ， $HB = 6$.

因为长方体被平面 α 分成两个高为10的直棱柱，

所以其体积的比值为 $\frac{9}{7}$.



【点评】本题考查平面与平面平行的性质，考查学生的计算能力，比较基础.

20. 椭圆C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ($a > b > 0$) 的离心率 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 点 $(2, \sqrt{2})$ 在C上.

(1) 求椭圆C的方程;

(2) 直线l不过原点O且不平行于坐标轴, l与C有两个交点A, B, 线段AB的中点为M. 证明: 直线OM的斜率与l的斜率的乘积为定值.

【考点】K3：椭圆的标准方程；KH：直线与圆锥曲线的综合.

【专题】5D：圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】（1）利用椭圆的离心率，以及椭圆经过的点，求解椭圆的几何量，然后得到椭圆的方程.

（2）设直线l: $y = kx + b$, ($k \neq 0, b \neq 0$), $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $M(x_M, y_M)$

M)，联立直线方程与椭圆方程，通过韦达定理求解 K_{OM} ，然后推出直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值。

【解答】解：(1) 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，($a > b > 0$)的离心率 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，点 $(2, \sqrt{2})$

在 C 上，可得 $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\frac{4}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1$ ，解得 $a^2 = 8$ ， $b^2 = 4$ ，所求椭圆 C 方程

为： $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 。

(2) 设直线 $l: y = kx + b$ ，($k \neq 0, b \neq 0$)， $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ， $M(x_M, y_M)$ ，

把直线 $y = kx + b$ 代入 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 可得 $(2k^2 + 1)x^2 + 4kbx + 2b^2 - 8 = 0$ ，

故 $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2kb}{2k^2 + 1}$ ， $y_M = kx_M + b = \frac{b}{2k^2 + 1}$ ，

于是在 OM 的斜率为： $K_{OM} = \frac{y_M}{x_M} = -\frac{1}{2k}$ ，即 $K_{OM} \cdot k = -\frac{1}{2}$ 。

\therefore 直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值。

【点评】本题考查椭圆方程的综合应用，椭圆的方程的求法，考查分析问题解决问题的能力。

21. 设函数 $f(x) = \ln x + a(1 - x)$ 。

(I) 讨论： $f(x)$ 的单调性；

(II) 当 $f(x)$ 有最大值，且最大值大于 $2a - 2$ 时，求 a 的取值范围。

【考点】6B：利用导数研究函数的单调性；6E：利用导数研究函数的最值。

【专题】26：开放型；53：导数的综合应用。

【分析】(I) 先求导，再分类讨论，根据导数即可判断函数的单调性；

(2) 先求出函数的最大值，再构造函数 $g(a) = \ln a + a - 1$ ，根据函数的单调性即可求出 a 的范围。

【解答】解：（Ⅰ） $f(x) = \ln x + a(1-x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1-ax}{x},$$

若 $a \leq 0$ ，则 $f'(x) > 0$ ， \therefore 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

若 $a > 0$ ，则当 $x \in (0, \frac{1}{a})$ 时， $f'(x) > 0$ ，当 $x \in (\frac{1}{a}, +\infty)$ 时， $f'(x) < 0$ ，所

以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递增，在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减，

（Ⅱ），由（Ⅰ）知，当 $a \leq 0$ 时， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上无最大值；当 $a > 0$ 时， f

(x) 在 $x = \frac{1}{a}$ 取得最大值，最大值为 $f(\frac{1}{a}) = -\ln a + a - 1$ ，

$$\therefore f(\frac{1}{a}) > 2a - 2,$$

$$\therefore \ln a + a - 1 < 0,$$

$$\text{令 } g(a) = \ln a + a - 1,$$

$\therefore g(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增， $g(1) = 0$ ，

\therefore 当 $0 < a < 1$ 时， $g(a) < 0$ ，

当 $a > 1$ 时， $g(a) > 0$ ，

$\therefore a$ 的取值范围为 $(0, 1)$ 。

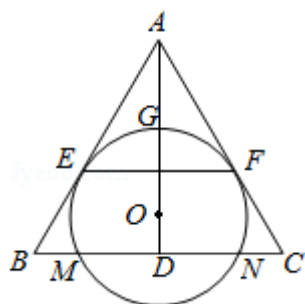
【点评】本题考查了导数与函数的单调性最值的关系，以及参数的取值范围，属于中档题。

四、选修4-1：几何证明选讲

22. （10分）如图， O 为等腰三角形 ABC 内一点， $\odot O$ 与 $\triangle ABC$ 的底边 BC 交于 M ， N 两点，与底边上的高 AD 交于点 G ，且与 AB ， AC 分别相切于 E ， F 两点。

（1）证明： $EF \parallel BC$ ；

（2）若 AG 等于 $\odot O$ 的半径，且 $AE = MN = 2\sqrt{3}$ ，求四边形 $EBCF$ 的面积。



【考点】N4：相似三角形的判定.

【专题】26：开放型；5F：空间位置关系与距离.

【分析】（1）通过AD是 $\angle CAB$ 的角平分线及圆O分别与AB、AC相切于点E、F，利用相似的性质即得结论；

（2）通过（1）知AD是EF的垂直平分线，连结OE、OM，则 $OE \perp AE$ ，利用 $S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AEF}$ 计算即可.

【解答】（1）证明： $\because \triangle ABC$ 为等腰三角形， $AD \perp BC$ ，

$\therefore AD$ 是 $\angle CAB$ 的角平分线，

又 \because 圆O分别与AB、AC相切于点E、F，

$\therefore AE=AF$ ， $\therefore AD \perp EF$ ，

$\therefore EF \parallel BC$ ；

（2）解：由（1）知 $AE=AF$ ， $AD \perp EF$ ， $\therefore AD$ 是EF的垂直平分线，

又 $\because EF$ 为圆O的弦， $\therefore O$ 在AD上，

连结OE、OM，则 $OE \perp AE$ ，

由AG等于圆O的半径可得 $AO=2OE$ ，

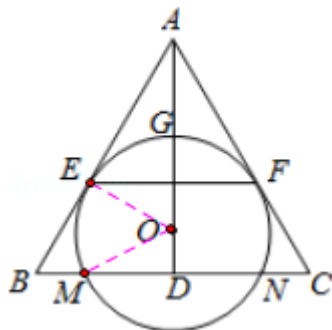
$\therefore \angle OAE=30^\circ$ ， $\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle AEF$ 都是等边三角形，

$\therefore AE=2\sqrt{3}$ ， $\therefore AO=4$ ， $OE=2$ ，

$\therefore OM=OE=2$ ， $DM=\frac{1}{2}MN=\sqrt{3}$ ， $\therefore OD=1$ ，

$\therefore AD=5$ ， $AB=\frac{10\sqrt{3}}{3}$ ，

\therefore 四边形EBCF的面积为 $\frac{1}{2} \times \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times (2\sqrt{3})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$.



【点评】本题考查空间中线与线之间的位置关系，考查四边形面积的计算，注意解题方法的积累，属于中档题.

五、选修4-4：坐标系与参数方程

23. (10分) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C_1: \begin{cases} x=t\cos\alpha \\ y=t\sin\alpha \end{cases}$ (t 为参数, $t\neq 0$), 其中 $0\leq\alpha\leq\pi$, 在以 O 为极点, x 轴正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线 $C_2: \rho=2\sin\theta$, $C_3: \rho=2\sqrt{3}\cos\theta$.

(1) 求 C_2 与 C_3 交点的直角坐标;

(2) 若 C_1 与 C_2 相交于点 A , C_1 与 C_3 相交于点 B , 求 $|AB|$ 的最大值.

【考点】 Q4: 简单曲线的极坐标方程; QH: 参数方程化成普通方程.

【专题】 5S: 坐标系和参数方程.

【分析】 (1) 由曲线 $C_2: \rho=2\sin\theta$, 化为 $\rho^2=2\rho\sin\theta$, 把 $\begin{cases} \rho^2=x^2+y^2 \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$ 代入可得直角坐标方程. 同理由 $C_3: \rho=2\sqrt{3}\cos\theta$. 可得直角坐标方程, 联立解出可得 C_2 与 C_3 交点的直角坐标.

(2) 由曲线 C_1 的参数方程, 消去参数 t , 化为普通方程: $y=x\tan\alpha$, 其中 $0\leq\alpha\leq\pi$, $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$; $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时, 为 $x=0$ ($y\neq 0$). 其极坐标方程为: $\theta=\alpha$ ($\rho\in\mathbb{R}, \rho\neq 0$), 利用 $|AB|=|2\sin\alpha-2\sqrt{3}\cos\alpha|$ 即可得出.

【解答】 解: (1) 由曲线 $C_2: \rho=2\sin\theta$, 化为 $\rho^2=2\rho\sin\theta$,

$$\therefore x^2+y^2=2y.$$

同理由 $C_3: \rho=2\sqrt{3}\cos\theta$. 可得直角坐标方程: $x^2+y^2=2\sqrt{3}x$,

$$\text{联立} \begin{cases} x^2+y^2-2y=0 \\ x^2+y^2-2\sqrt{3}x=0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases},$$

$\therefore C_2$ 与 C_3 交点的直角坐标为 $(0, 0)$, $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$.

(2) 曲线 $C_1: \begin{cases} x=t\cos\alpha \\ y=t\sin\alpha \end{cases}$ (t 为参数, $t\neq 0$), 化为普通方程: $y=x\tan\alpha$, 其中 $0\leq\alpha\leq\pi$, $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$; $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时, 为 $x=0$ ($y\neq 0$). 其极坐标方程为: $\theta=\alpha$ ($\rho\in\mathbb{R}, \rho\neq 0$)

∵A, B都在 C_1 上,

∴A $(2\sin\alpha, \alpha)$, B $(2\sqrt{3}\cos\alpha, \alpha)$.

∴ $|AB| = |2\sin\alpha - 2\sqrt{3}\cos\alpha| = 4|\sin(\alpha - \frac{\pi}{3})|$,

当 $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ 时, $|AB|$ 取得最大值4.

【点评】 本题考查了极坐标方程化为直角坐标方程、参数方程化为普通方程、曲线的交点、两点之间的距离公式、三角函数的单调性, 考查了推理能力与计算能力, 属于中档题.

六、选修4-5不等式选讲

24. (10分) 设a, b, c, d均为正数, 且 $a+b=c+d$, 证明:

(1) 若 $ab > cd$, 则 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$;

(2) $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$ 是 $|a - b| < |c - d|$ 的充要条件.

【考点】 29: 充分条件、必要条件、充要条件; R6: 不等式的证明.

【专题】 59: 不等式的解法及应用; 5L: 简易逻辑.

【分析】 (1) 运用不等式的性质, 结合条件a, b, c, d均为正数, 且 $a+b=c+d$, $ab > cd$, 即可得证;

(2) 从两方面证, ①若 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$, 证得 $|a - b| < |c - d|$, ②若 $|a - b| < |c - d|$, 证得 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$, 注意运用不等式的性质, 即可得证.

【解答】 证明: (1) 由于 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$,

$(\sqrt{c} + \sqrt{d})^2 = c + d + 2\sqrt{cd}$,

由a, b, c, d均为正数, 且 $a+b=c+d$, $ab > cd$,

则 $\sqrt{ab} > \sqrt{cd}$,

即有 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{c} + \sqrt{d})^2$,

则 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$;

(2) ①若 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$, 则 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{c} + \sqrt{d})^2$,

即为 $a + b + 2\sqrt{ab} > c + d + 2\sqrt{cd}$,

由 $a+b=c+d$, 则 $ab > cd$,

于是 $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$,

$$(c - d)^2 = (c + d)^2 - 4cd,$$

即有 $(a - b)^2 < (c - d)^2$, 即为 $|a - b| < |c - d|$;

②若 $|a - b| < |c - d|$, 则 $(a - b)^2 < (c - d)^2$,

即有 $(a + b)^2 - 4ab < (c + d)^2 - 4cd$,

由 $a + b = c + d$, 则 $ab > cd$,

则有 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{c} + \sqrt{d})^2$.

综上所述, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$ 是 $|a - b| < |c - d|$ 的充要条件.

【点评】 本题考查不等式的证明, 主要考查不等式的性质的运用, 同时考查充要条件的判断, 属于基础题.