

2023 年普通高等学校招生全国统一考试

新课标 I 卷数学

本试卷共 4 页，22 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

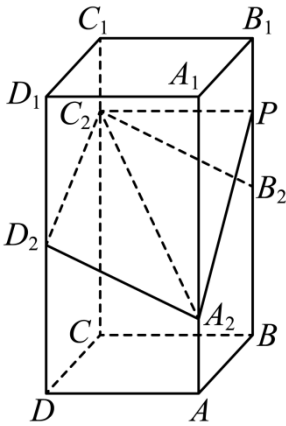
一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $N = \{x | x^2 - x - 6 \geq 0\}$, 则 $M \cap N = (\quad)$
A. $\{-2, -1, 0, 1\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{-2\}$ D. 2
2. 已知 $z = \frac{1-i}{2+2i}$, 则 $z - \bar{z} = (\quad)$
A. $-i$ B. i C. 0 D. 1
3. 已知向量 $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (1, -1)$, 若 $(\vec{a} + \lambda\vec{b}) \perp (\vec{a} + \mu\vec{b})$, 则 (\quad)
A. $\lambda + \mu = 1$ B. $\lambda + \mu = -1$
C. $\lambda\mu = 1$ D. $\lambda\mu = -1$
4. 设函数 $f(x) = 2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减, 则 a 的取值范围是 (\quad)

(1) 求 $\sin A$;

(2) 设 $AB = 5$, 求 AB 边上的高.

18. 如图, 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 2, AA_1 = 4$. 点 A_2, B_2, C_2, D_2 分别在棱 AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 上, $AA_2 = 1, BB_2 = DD_2 = 2, CC_2 = 3$.



(1) 证明: $B_2C_2 \parallel A_2D_2$;

(2) 点 P 在棱 BB_1 上, 当二面角 $P - A_2C_2 - D_2$ 为 150° 时, 求 B_2P .

19. 已知函数 $f(x) = a(e^x + a) - x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 当 $a > 0$ 时, $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$.

20. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 且 $d > 1$. 令 $b_n = \frac{n^2 + n}{a_n}$, 记 S_n, T_n 分别为数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和.

(1) 若 $3a_2 = 3a_1 + a_3, S_3 + T_3 = 21$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $\{b_n\}$ 为等差数列, 且 $S_{99} - T_{99} = 99$, 求 d .

21. 甲、乙两人投篮, 每次由其中一人投篮, 规则如下: 若命中则此人继续投篮, 若未命中则换为对方投篮. 无论之前投篮情况如何, 甲每次投篮的命中率均为 0.6 , 乙每次投篮的命中率均为 0.8 . 由抽签确定第 1 次投篮的人选, 第 1 次投篮的人是甲、乙的概率各为 0.5 .

(1) 求第 2 次投篮的人是乙的概率;

(2) 求第 i 次投篮的人是甲的概率;

(3) 已知: 若随机变量 X_i 服从两点分布, 且 $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = q_i, i = 1, 2, \dots, n$, 则

$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n q_i$. 记前 n 次（即从第 1 次到第 n 次投篮）中甲投篮的次数为 Y ，求 $E(Y)$.

22. 在直角坐标系 xOy 中，点 P 到 x 轴的距离等于点 P 到点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 的距离，记动点 P 的轨迹为 W .

(1) 求 W 的方程；

(2) 已知矩形 $ABCD$ 有三个顶点在 W 上，证明：矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.

