

绝密★启用前

2003年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学试卷（理工农医类）

（满分150分，考试时间120分钟）

考生注意

1. 本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页。
2. 作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置。
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位。在试卷上作答一律不得分。
4. 用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题。

第I卷（共110分）

一、填空题（本大题满分48分）本大题共有12题，只要求直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分。

1. 函数 $y = \sin x \cos(x + \frac{\pi}{4}) + \cos x \sin(x + \frac{\pi}{4})$ 的最小正周期 $T =$ _____ .
2. 若 $x = \frac{\pi}{3}$ 是方程 $2 \cos(x + \alpha) = 1$ 的解, 其中 $\alpha \in (0, 2\pi)$, 则 $\alpha =$ _____ .
3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 = 3$, $a_6 = -2$, 则 $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} =$ _____ .
4. 在极坐标系中, 定点 $A(1, \frac{\pi}{2})$, 点B在直线 $\rho \cos \theta + \rho \sin \theta = 0$ 上运动, 当线段AB最短时, 点B的极坐标是 _____ .
5. 在正四棱锥P—ABCD中, 若侧面与底面所成二面角的大小为 60° , 则异面直线PA与BC所成角的大小等于 _____ . (结果用反三角函数值表示)
6. 设集合 $A = \{x \mid |x| < 4\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 > 0\}$, 则集合 $\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin A \cap B\} =$ _____ .
7. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 3 : 4$, 则 $\angle ABC =$ _____ . (结果用反三角函数值表示)
8. 若首项为 a_1 , 公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和总小于这个数列的各项和, 则首项 a_1 , 公比 q 的一组取值可以是 $(a_1, q) =$ _____ .
9. 某国际科研合作项目成员由11个美国人、4个法国人和5个中国人组成. 现从中随机选出两位作为成果发布人, 则此两人不属于同一个国家的概率为 _____ . (结果用分数表示)
10. 方程 $x^3 + \lg x = 18$ 的根 $x \approx$ _____ . (结果精确到0.1)
11. 已知点 $A(0, \frac{2}{n})$, $B(0, -\frac{2}{n})$, $C(4 + \frac{2}{n}, 0)$, 其中 n 的为正整数. 设 S_n 表示 $\triangle ABC$ 外接圆的面积, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$ _____ .

12. 给出问题： F_1 、 F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ 的焦点，点P在双曲线上. 若点P到焦点 F_1 的距离

等于9，求点P到焦点 F_2 的距离. 某学生的解答如下：双曲线的实轴长为8，由

$$||PF_1| - |PF_2|| = 8, \text{ 即 } |9 - |PF_2|| = 8, \text{ 得 } |PF_2| = 1 \text{ 或 } 17.$$

该学生的解答是否正确？若正确，请将他的解题依据填在下面空格内，若不正确，将正确的结果填在下面空格内.

二、选择题（本大题满分16分）本大题共4题，每题都给出代号为A、B、C、D的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得4分，不选、选错或者选出的代号超过一个（不论是否都写在圆括号内），一律得零分.

13. 下列函数中，既为偶函数又在 $(0, \pi)$ 上单调递增的是 ()

A. $y = \text{tg}|x|$.

B. $y = \cos(-x)$.

C. $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$.

D. $y = |\text{ctg} \frac{x}{2}|$.

14. 在下列条件中，可判断平面 α 与 β 平行的是 ()

A. α 、 β 都垂直于平面 r .

B. α 内存在不共线的三点到 β 的距离相等.

C. l, m 是 α 内两条直线，且 $l \parallel \beta, m \parallel \beta$.

D. l, m 是两条异面直线，且 $l \parallel \alpha, m \parallel \alpha, l \parallel \beta, m \parallel \beta$.

15. $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 均为非零实数，不等式 $a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0$ 和 $a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0$ 的解集分别

为集合M和N，那么“ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ”是“ $M=N$ ”的 ()

)

A. 充分非必要条件.

B. 必要非充分条件.

C. 充要条件

D. 既非充分又非必要条件.

16. $f(x)$ 是定义在区间 $[-c, c]$ 上的奇函数，其图象如图所示：令 $g(x) = af(x) + b$,

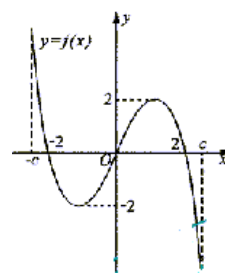
则下

列关于函数 $g(x)$ 的叙述正确的是

)

A. 若 $a < 0$, 则函数 $g(x)$ 的图象关于原点对称.

B. 若 $a = -1, -2 < b < 0$, 则方程 $g(x) = 0$ 有大于2的实根.



C. 若 $a \neq 0, b=2$, 则方程 $g(x)=0$ 有两个实根.

D. 若 $a \geq 1, b < 2$, 则方程 $g(x)=0$ 有三个实根.

三、解答题 (本大题满分86分) 本大题共有6题, 解答下列各题必须写出必要的步骤.

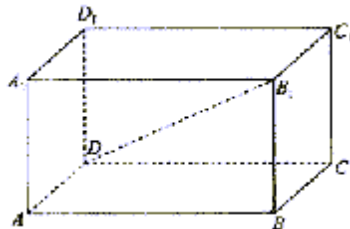
17. (本题满分12分)

已知复数 $z_1 = \cos\theta - i$, $z_2 = \sin\theta + i$, 求 $|z_1 \cdot z_2|$ 的最大值和最小值.

18. (本题满分12分)

已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,

$A_1A \perp$ 平面 $ABCD$, $AB=4$, $AD=2$. 若 $B_1D \perp BC$, 直线 B_1D 与平面 $ABCD$ 所成的角等于 30° , 求平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积.



19. (本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小题满分5分, 第2小题满分9分.

已知数列 $\{a_n\}$ (n 为正整数) 是首项是 a_1 , 公比为 q 的等比数列.

(1) 求和: $a_1C_2^0 - a_2C_2^1 + a_3C_2^2, a_1C_3^0 - a_2C_3^1 + a_3C_3^2 - a_4C_3^3$;

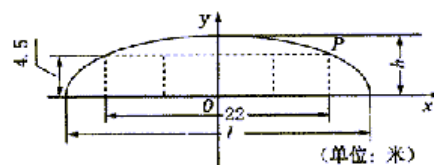
(2) 由(1)的结果归纳概括出关于正整数n的一个结论, 并加以证明.

20. (本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分8分.

如图, 某隧道设计为双向四车道, 车道总宽22米, 要求通行车辆限高4.5米, 隧道全长2.5千米, 隧道的拱线近似地看成半个椭圆形状.

(1) 若最大拱高h为6米, 则隧道设计的拱宽l是多少?

(2) 若最大拱高h不小于6米, 则应如何设



计拱高 h 和拱宽 l ，才能使半个椭圆形隧道的土方工程量最最小？

（半个椭圆的面积公式为 $S = \frac{\pi}{4}lh$ ，柱体体积为：底面积乘以高. 本题结果精确到0.1米）

21. （本题满分16分）本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分5分，第3小题满分7分.

在以0为原点的直角坐标系中，点A（4，-3）为 $\triangle OAB$ 的直角顶点. 已知 $|AB|=2|OA|$ ，且点B的纵坐标大于零.

（1）求向量 \overrightarrow{AB} 的坐标；

（2）求圆 $x^2 - 6x + y^2 + 2y = 0$ 关于直线OB对称的圆的方程；

(3) 是否存在实数 a , 使抛物线 $y = ax^2 - 1$ 上总有关于直线 OB 对称的两个点? 若不存在, 说明理由; 若存在, 求 a 的取值范围.

22. (本题满分18分) 本题共有3个小题, 第1小题满分5分, 第2小题满分6分, 第3小题满分7分.

已知集合 M 是满足下列性质的函数 $f(x)$ 的全体: 存在非零常数 T , 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 有 $f(x+T) = T f(x)$ 成立.

(1) 函数 $f(x) = x$ 是否属于集合 M ? 说明理由;

(2) 设函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象与 $y = x$ 的图象有公共点, 证明:

$$f(x) = a^x \in M;$$

(3) 若函数 $f(x) = \sin kx \in M$, 求实数 k 的取值范围.

