

2016年普通高等学校招生全国统一考试
上海 数学试卷（理工农医类）

考生注意：

1. 本试卷共4页，23道试题，满分150分. 考试时间120分钟.
2. 本考试分设试卷和答题纸. 试卷包括试题与答题要求. 作答必须涂（选择题）或写（非选择题）在答题纸上，在试卷上作答一律不得分.
3. 答卷前，务必用钢笔或圆珠笔在答题纸正面清楚地填写姓名、准考证号，并将核对后的条形码贴在指定位置上，在答题纸反面清楚地填写姓名.

一、填空题（本大题共有14题，满分56分）考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分.

1. 设 $x \in R$, 则不等式 $|x-3| < 1$ 的解集为_____.

【答案】(2,4)

【解析】试题分析：

由题意得： $-1 < x-3 < 1$ ，解得 $2 < x < 4$.

考点：绝对值不等式的基本解法.

2. 设 $z = \frac{3+2i}{i}$ ，其中 i 为虚数单位，则 $\text{Im } z =$ _____.

【答案】-3

【解析】

试题分析：

$$z = \frac{3+2i}{i} = 2-3i, \text{Im } z = -3.$$

考点：1.复数的运算；2.复数的概念.

3. 已知平行直线 $l_1: 2x+y-1=0, l_2: 2x+y+1=0$ ，则 l_1 与 l_2 的距离是_____.

【答案】 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【解析】试题分析：

利用两平行线间的距离公式得 $d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-1-1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

考点：两平行线间距离公式.

4. 某次体检，6位同学的身高（单位：米）分别为1.72，1.78，1.75，1.80，1.69，1.77，则这组数据的中位数是_____（米）.

【答案】1.76

【解析】试题分析：

将这6位同学的身高按照从低到高排列为：1.69,1.72,1.75, 1.77,1.78, 1.80，这六个数的中位数是1.75与1.77的平均数，显然为1.76. 学.科.网

考点：中位数的概念.

5. 已知点(3,9)在函数 $f(x)=1+a^x$ 的图像上，则 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$ _____.

【答案】 $\log_2(x-1)$

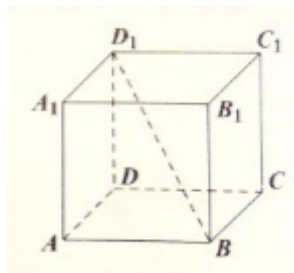
【解析】试题分析：

将点(3,9)代入函数 $f(x)=1+a^x$ 中得 $a=2$ ，所以 $f(x)=1+2^x$ ，用 y 表示 x 得

$x=\log_2(y-1)$ ，所以 $f^{-1}(x)=\log_2(x-1)$.

考点：反函数的概念以及指、对数式的转化.

6. 如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 的边长为3， BD_1 与底面所成的角的大小为 $\arctan \frac{2}{3}$ ，则该正四棱柱的高等于_____.



【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】试题分析：

连结 BD ，则由题意得 $\tan \angle DBD_1 = \frac{DD_1}{BD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{DD_1}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow DD_1 = 2\sqrt{2}$.

考点：线面角

7. 方程 $3\sin x = 1 + \cos 2x$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的解为_____.

【答案】 $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

【解析】 试题分析:

化简 $3\sin x = 1 + \cos 2x$ 得: $3\sin x = 2 - 2\sin^2 x$, 所以 $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$, 解得

$\sin x = \frac{1}{2}$ 或 $\sin x = -2$ (舍去), 又 $x \in [0, 2\pi]$, 所以 $x = \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$.

考点: 二倍角公式及三角函数求值.

8. 在 $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x}\right)^n$ 的二项展开式中, 所有项的二项式系数之和为256, 则常数项等于_____

_____.

【答案】 112

【解析】 试题分析:

由二项式定理得: 所有项的二项式系数之和为 2^n , 即 $2^n = 256$, 所以 $n = 8$, 又二项展开

式的通项为 $T_{r+1} = C_8^r (\sqrt[3]{x})^{8-r} \left(-\frac{2}{x}\right)^r = (-2)^r C_8^r x^{\frac{8-4}{3}r}$, 令 $\frac{8}{3} - \frac{4}{3}r = 0$, 所以 $r = 2$, 所以

$T_3 = 112$, 即常数项为112.

考点: 二项式定理.

9. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为3,5,7, 则该三角形的外接圆半径等于_____.

【答案】 $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

【解析】 试题分析:

利用余弦定理可求得最大边7所对应角的余弦值为 $\frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 3 \times 5} = -\frac{1}{2}$, 所以此角的正弦值

为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 由正弦定理得 $2R = \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$, 所以 $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

考点: 正弦、余弦定理.

10. 设 $a > 0, b > 0$. 若关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + by = 1 \end{cases}$, 无解, 则 $a + b$ 的取值范围是_____

_____.

【答案】 $(2, +\infty)$

【解析】 试题分析：

将方程组中上面的式子化简得 $y = 1 - ax$ ，代入下面的式子整理得 $(1 - ab)x = 1 - b$ ，方程组无解应该满足 $1 - ab = 0$ 且 $1 - b \neq 0$ ，所以 $ab = 1$ 且 $b \neq 1$ ，所以由基本不等式得 $a + b > 2\sqrt{ab} = 2$ ，即 $a + b$ 的取值范围是 $(2, +\infty)$ 。

考点：方程组的思想以及基本不等式的应用。

11. 无穷数列 $\{a_n\}$ 由 k 个不同的数组成， S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ ， $S_n \in \{2, 3\}$ ，则 k 的最大值为_____.

【答案】 4

【解析】 试题分析：

当 $n = 1$ 时， $a_1 = 2$ 或 $a_1 = 3$ ；当 $n \geq 2$ 时，若 $S_n = 2$ ， $S_{n-1} = 2$ ，于是 $a_n = 0$ ，若 $S_n = 3$ ， $S_{n-1} = 3$ ，于是 $a_n = 0$ ，从而存在 $k \in \mathbb{N}^*$ ，当 $n \geq k$ 时， $a_n = 0$ 。所以要涉及最多的不同的项数列 $\{a_n\}$ 可以为：2, 1, -1, 0, 0, ...，从而可看出 $k_{\max} = 4$ 。学科.网

考点：数列的项与和。

12. 在平面直角坐标系中，已知 $A(1, 0)$ ， $B(0, -$

$1)$ ， P 是曲线 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 上一个动点，则 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BA}$ 的取值范围是_____.

【答案】 $[0, 1 + \sqrt{2}]$

【解析】 试题分析：

由题意设 $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$ ， $\alpha \in [0, \pi]$ ，则 $\overrightarrow{BP} = (\cos \alpha, 1 + \sin \alpha)$ ，又 $\overrightarrow{BA} = (1, 1)$ ，所以 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BA} = \cos \alpha + \sin \alpha + 1 = \sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) + 1 \in [0, 1 + \sqrt{2}]$ 。

考点：1. 数量积的运算；2. 数形结合的思想。

13. 设 $a, b \in \mathbb{R}, c \in [0, 2\pi)$. 若对任意实数 x 都有 $2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = a \sin(bx + c)$ ，则满足条件的有序实数组 (a, b, c) 的组数为_____.

【答案】 4

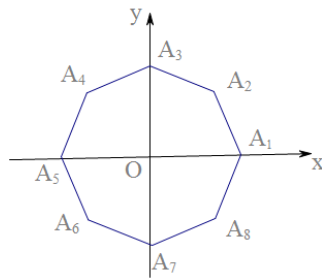
【解析】试题分析：

当 $a = 2$ 时， $\sin(3x - \frac{\pi}{3}) = \sin(3x - \frac{\pi}{3} + 2\pi) = \sin(3x + \frac{5\pi}{3})$ ， $(b, c) = (3, \frac{5\pi}{3})$ ，又
 $\sin(3x - \frac{\pi}{3}) = \sin[\pi - (3x - \frac{\pi}{3})] = \sin(-3x + \frac{4\pi}{3})$ ， $(b, c) = (-3, \frac{4\pi}{3})$ ，注意到 $c \in [0, 2\pi)$
，所以只有2组： $(2, 3, \frac{5\pi}{3})$ ， $(2, -3, \frac{4\pi}{3})$ 满足题意；当 $a = -2$ 时，同理可得出满足题意的
 (a, b, c) 也有2组，故共有4组.

考点：三角函数

14.如图，在平面直角坐标系 xOy 中， O 为正八边形 $A_1A_2 \cdots A_8$ 的中心， $A_1(1,0)$.任取不同的
两点 A_i, A_j ，点 P 满足 $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j} = \vec{0}$ ，则点 P 落在第一象限的概率是_____

—



【答案】 $\frac{5}{28}$

【解析】试题分析：

共有 $C_8^2 = 28$ 种基本事件，其中使点 P 落在第一象限的情况有 $C_3^2 + 2 = 5$ 种，故所求概率为

$\frac{5}{28}$.

考点：古典概型

二、选择题（本大题共有4题，满分20分）每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的
相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得五分，否则一律得零分.

15. 设 $a \in R$ ，则“ $a > 1$ ”是“ $a^2 > 1$ ”的（ ）.

- (A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件
(C) 充要条件 (D) 既非充分也非必要条件

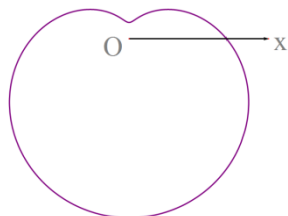
【答案】A

【解析】试题分析：

$a > 1 \Rightarrow a^2 > 1, a^2 > 1 \Rightarrow a > 1$ 或 $a < -1$ ，所以“ $a > 1$ ”是“ $a^2 > 1$ ”的充分非必要条件，选A.

考点：充要条件

16. 下列极坐标方程中，对应的曲线为如图的是（ ）.



- (A) $\rho = 6 + 5\cos\theta$ (B) $\rho = 6 + 5\sin\theta$
 (C) $\rho = 6 - 5\cos\theta$ (D) $\rho = 6 - 5\sin\theta$

【答案】D

【解析】试题分析：

依次取 $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ ，结合图形可知只有 $\rho = 6 - 5\sin\theta$ 满足，选D.

考点：极坐标方程

17. 已知无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，前 n 项和为 S_n ，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. 下列条件中，使得

$2S_n < S (n \in \mathbb{N}^*)$ 恒成立的是（ ）.

- (A) $a_1 > 0, 0.6 < q < 0.7$ (B) $a_1 < 0, -0.7 < q < -0.6$
 (C) $a_1 > 0, 0.7 < q < 0.8$ (D) $a_1 < 0, -0.8 < q < -0.7$

【答案】B

【解析】试题分析：

由题意得： $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ ，所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = S (0 < |q| < 1)$ ，所以 $2a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} < a_1 \cdot \frac{1}{1-q} (0 < |q| < 1)$ 对一切正

整数恒成立，当 $a_1 > 0$ 时， $q^n > \frac{1}{2}$ 不恒成立，舍去；当 $a_1 < 0$ 时， $q^n < \frac{1}{2} \Rightarrow q^2 < \frac{1}{2}$ ，因此选B. 学.科网

考点：1. 数列的极限；2. 等比数列求和.

18. 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ 是定义域为 \mathbb{R} 的三个函数，对于命题：①若 $f(x) + g(x)$ 、 $f(x) + h(x)$ 、 $g(x) + h(x)$ 均是增函数，则 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ 中至少有一个增函数；②若 $f(x) + g(x)$ 、 $f(x) + h(x)$ 、 $g(x) + h(x)$ 均是以 T 为周期的函数，则 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、

【答案】 (1) $\frac{\sqrt{3}}{12}$; (2) $\frac{\pi}{4}$.

【解析】

试题分析: (1) 由题意可知, 圆柱的高 $h=1$, 底面半径 $r=1$, $\angle A_1O_1B_1 = \frac{\pi}{3}$, 再由三角形面积公式计算 $S_{\Delta O_1A_1B_1}$ 后即得.

(2) 设过点 B_1 的母线与下底面交于点 B , 根据 $BB_1 \parallel AA_1$, 知 $\angle CB_1B$ 或其补角为直线 B_1C 与 AA_1 所成的角, 再结合题设条件确定 $\angle COB = \frac{\pi}{3}$, $CB=1$. 得出 $\angle CB_1B = \frac{\pi}{4}$ 即可.

试题解析: (1) 由题意可知, 圆柱的高 $h=1$, 底面半径 $r=1$.

由 $\widehat{A_1B_1}$ 的长为 $\frac{\pi}{3}$, 可知 $\angle A_1O_1B_1 = \frac{\pi}{3}$.

$$S_{\Delta O_1A_1B_1} = \frac{1}{2} O_1A_1 \cdot O_1B_1 \cdot \sin \angle A_1O_1B_1 = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$V_{C-O_1A_1B_1} = \frac{1}{3} S_{\Delta O_1A_1B_1} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

(2) 设过点 B_1 的母线与下底面交于点 B , 则 $BB_1 \parallel AA_1$,

所以 $\angle CB_1B$ 或其补角为直线 B_1C 与 AA_1 所成的角.

由 \widehat{AC} 长为 $\frac{2\pi}{3}$, 可知 $\angle AOC = \frac{2\pi}{3}$,

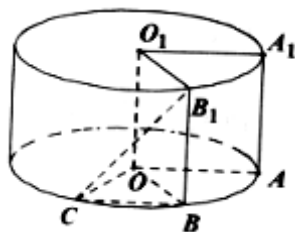
又 $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1 = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\angle COB = \frac{\pi}{3}$,

从而 ΔCOB 为等边三角形, 得 $CB=1$.

因为 $B_1B \perp$ 平面 AOC , 所以 $B_1B \perp CB$. 学科&网

在 ΔCB_1B 中, 因为 $\angle B_1BC = \frac{\pi}{2}$, $CB=1$, $B_1B=1$, 所以 $\angle CB_1B = \frac{\pi}{4}$,

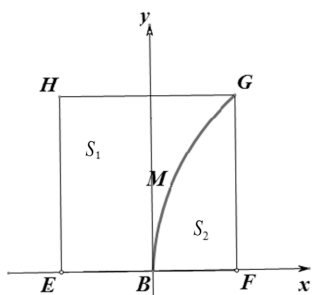
从而直线 B_1C 与 AA_1 所成的角的大小为 $\frac{\pi}{4}$.



考点：1.几何体的体积；2.空间角.

20. (本题满分14) 本题共有2个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分8分.

有一块正方形菜地 $EFGH$, EH 所在直线是一条小河. 收获的蔬菜可送到 F 点或河边运走. 于是, 菜地分为两个区域 S_1 和 S_2 , 其中 S_1 中的蔬菜运到河边较近, S_2 中的蔬菜运到 F 点较近, 而菜地内 S_1 和 S_2 的分界线 C 上的点到河边与到 F 点的距离相等, 现建立平面直角坐标系, 其中原点 O 为 EF 的中点, 点 F 的坐标为 $(1,0)$, 如图.



(1) 求菜地内的分界线 C 的方程;

(2) 菜农从蔬菜运量估计出 S_1 面积是 S_2 面积的两倍, 由此得到 S_1 面积的“经验值”为 $\frac{8}{3}$. 设 M 是 C 上纵坐标为1的点, 请计算以 EH 为一边、另有一边过点 M 的矩形的面积, 及五边形 $EOMGH$ 的面积, 并判断哪一个更接近于 S_1 面积的经验值.

【答案】 (1) $y^2 = 4x$ ($0 < y < 2$); (2) 矩形面积为 $\frac{5}{2}$, 五边形面积为 $\frac{11}{4}$, 五边形面积更接近于 S_1 面积的“经验值”.

【解析】

试题分析: (1) 由 C 上的点到直线 EH 与到点 F 的距离相等, 知 C 是以 F 为焦点、以 EH 为准线的抛物线在正方形 $EFGH$ 内的部分.

(2) 通过计算矩形面积, 五边形面积, 以及计算矩形面积与“经验值”之差的绝对值, 五边形面积与“经验值”之差的绝对值, 比较二者大小即可.

试题解析：（1）因为C上的点到直线EH与到点F的距离相等，所以C是以F为焦点、以

EH为准线的抛物线在正方形EFGH内的部分，其方程为 $y^2 = 4x$ ($0 < y < 2$)。

（2）依题意，点M的坐标为 $(\frac{1}{4}, 1)$ 。

所求的矩形面积为 $\frac{5}{2}$ ，而所求的五边形面积为 $\frac{11}{4}$ 。

矩形面积与“经验值”之差的绝对值为 $|\frac{5}{2} - \frac{8}{3}| = \frac{1}{6}$ ，而五边形面积与“经验值”之差

的绝对值为 $|\frac{11}{4} - \frac{8}{3}| = \frac{1}{12}$ ，所以五边形面积更接近于 S_1 面积的“经验值”。

考点：1.抛物线的定义及其标准方程；2.面积计算。

21.（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分。

双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，直线 l 过 F_2 且与双曲线交于

A, B 两点。

（1）若 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$ ， ΔF_1AB 是等边三角形，求双曲线的渐近线方程；

（2）设 $b = \sqrt{3}$ ，若 l 的斜率存在，且 $(\overrightarrow{F_1A} + \overrightarrow{F_1B}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ ，求 l 的斜率。

【答案】（1） $y = \pm\sqrt{2}x$ ；（2） $\pm\frac{\sqrt{15}}{5}$ 。

【解析】

试题分析：（1）设 $A(x_A, y_A)$ ，根据题设条件得到 $4(1+b^2) = 3b^4$ ，从而解得 b^2 的值。

（2）设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，直线 $l: y = k(x-2)$ 与双曲线方程联立，得到一元二次方程，根据 l 与双曲线交于两点，可得 $k^2 - 3 \neq 0$ ，且 $\Delta = 36(1+k^2) > 0$ 。再设AB的中点为 $M(x_M, y_M)$ ，由 $(\overrightarrow{F_1A} + \overrightarrow{F_1B}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ 即 $\overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ ，从而得到 $k_{F_1M} \cdot k = -1$ ，进而构建关于 k 的方程求解即可。

试题解析：（1）设 $A(x_A, y_A)$ 。

由题意, $F_2(c, 0)$, $c = \sqrt{1+b^2}$, $y_A^2 = b^2(c^2 - 1) = b^4$,

因为 $\triangle F_1AB$ 是等边三角形, 所以 $2c = \sqrt{3}|y_A|$,

即 $4(1+b^2) = 3b^4$, 解得 $b^2 = 2$.

故双曲线的渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{2}x$.

(2) 由已知, $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$.

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 直线 $l: y = k(x-2)$. 显然 $k \neq 0$.

$$\text{由} \begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = k(x-2) \end{cases}, \text{得} (k^2 - 3)x^2 - 4k^2x + 4k^2 + 3 = 0.$$

因为 l 与双曲线交于两点, 所以 $k^2 - 3 \neq 0$, 且 $\Delta = 36(1+k^2) > 0$.

设 AB 的中点为 $M(x_M, y_M)$.

由 $(\overrightarrow{F_1A} + \overrightarrow{F_1B}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ 即 $\overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, 知 $F_1M \perp AB$, 故 $k_{F_1M} \cdot k = -1$.

$$\text{而 } x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2k^2}{k^2 - 3}, \quad y_M = k(x_M - 2) = \frac{6k}{k^2 - 3}, \quad k_{F_1M} = \frac{3k}{2k^2 - 3},$$

所以 $\frac{3k}{2k^2 - 3} \cdot k = -1$, 得 $k^2 = \frac{3}{5}$, 故 l 的斜率为 $\pm \frac{\sqrt{15}}{5}$.

考点: 1. 双曲线的几何性质; 2. 直线与双曲线的位置关系; 3. 平面向量的数量积.

22. (本题满分16分) 本题共有3个小题, 第1小题满分4分, 第2小题满分6分, 第3小题满分6分.

已知 $a \in R$, 函数 $f(x) = \log_2\left(\frac{1}{x} + a\right)$.

(1) 当 $a = 5$ 时, 解不等式 $f(x) > 0$;

(2) 若关于 x 的方程 $f(x) - \log_2[(a-4)x + 2a - 5] = 0$ 的解集中恰好有一个元素, 求 a 的取值范围;

(3) 设 $a > 0$, 若对任意 $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上的最大值与最小值的差不

超过1, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup (0, +\infty)$; (2) $(1, 2] \cup \{3, 4\}$; (3) $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

【解析】

试题分析: (1) 由 $\log_2\left(\frac{1}{x}+5\right) > 0$, 得 $\frac{1}{x}+5 > 1$, 从而得解.

(2) 将其转化为 $(a-4)x^2 + (a-5)x - 1 = 0$, 讨论当 $a=4$ 、 $a=3$ 时, 以及 $a \neq 3$ 且 $a \neq 4$ 时的情况即可.

(3) 讨论 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性, 再确定函数 $f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上的最大值与最小值之差, 从而得到 $at^2 + (a+1)t - 1 \geq 0$, 对任意 $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 成立.

试题解析: (1) 由 $\log_2\left(\frac{1}{x}+5\right) > 0$, 得 $\frac{1}{x}+5 > 1$,

解得 $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup (0, +\infty)$.

(2) $\frac{1}{x} + a = (a-4)x + 2a - 5$, $(a-4)x^2 + (a-5)x - 1 = 0$,

当 $a=4$ 时, $x=-1$, 经检验, 满足题意.

当 $a=3$ 时, $x_1 = x_2 = -1$, 经检验, 满足题意.

当 $a \neq 3$ 且 $a \neq 4$ 时, $x_1 = \frac{1}{a-4}$, $x_2 = -1$, $x_1 \neq x_2$.

x_1 是原方程的解当且仅当 $\frac{1}{x_1} + a > 0$, 即 $a > 2$;

x_2 是原方程的解当且仅当 $\frac{1}{x_2} + a > 0$, 即 $a > 1$.

于是满足题意的 $a \in (1, 2]$.

综上, a 的取值范围为 $(1, 2] \cup \{3, 4\}$.

(3) 当 $0 < x_1 < x_2$ 时, $\frac{1}{x_1} + a > \frac{1}{x_2} + a$, $\log_2\left(\frac{1}{x_1} + a\right) > \log_2\left(\frac{1}{x_2} + a\right)$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

函数 $f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上的最大值与最小值分别为 $f(t)$, $f(t+1)$.

$$f(t) - f(t+1) = \log_2\left(\frac{1}{t} + a\right) - \log_2\left(\frac{1}{t+1} + a\right) \leq 1 \text{ 即 } at^2 + (a+1)t - 1 \geq 0, \text{ 对任意}$$

$t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 成立. 学科.网

因为 $a > 0$, 所以函数 $y = at^2 + (a+1)t - 1$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上单调递增, $t = \frac{1}{2}$ 时, y

有最小值 $\frac{3}{4}a - \frac{1}{2}$, 由 $\frac{3}{4}a - \frac{1}{2} \geq 0$, 得 $a \geq \frac{2}{3}$.

故 a 的取值范围为 $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

考点: 1.对数函数的性质; 2.函数与方程; 3.二次函数的性质.

23. (本题满分18分) 本题共有3个小题, 第1小题满分4分, 第2小题满分6分, 第3小题满分8分.

若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足: 只要 $a_p = a_q (p, q \in \mathbb{N}^*)$, 必有 $a_{p+1} = a_{q+1}$, 则称 $\{a_n\}$ 具有性质 P.

(1) 若 $\{a_n\}$ 具有性质 P, 且 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_4 = 3, a_5 = 2, a_6 + a_7 + a_8 = 21$, 求 a_3 ;

(2) 若无穷数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 无穷数列 $\{c_n\}$ 是公比为正数的等比数列, $b_1 = c_5 = 1, b_5 = c_1 = 81, a_n = b_n + c_n$, 判断 $\{a_n\}$ 是否具有性质 P, 并说明理由;

(3) 设 $\{b_n\}$ 是无穷数列, 已知 $a_{n+1} = b_n + \sin a_n (n \in \mathbb{N}^*)$. 求证: “对任意 $a_1, \{a_n\}$ 都具有性质 P”的充要条件为“ $\{b_n\}$ 是常数列”.

【答案】 (1) 16; (2) $\{a_n\}$ 不具有性质 P, 理由见解析; (3) 见解析.

【解析】

试题分析：（1）根据已知条件，得到 $a_6 + a_7 + a_8 = a_3 + 3 + 2$ ，结合 $a_6 + a_7 + a_8 = 21$ 求解即可。

（2）根据 $\{b_n\}$ 的公差为 20， $\{c_n\}$ 的公比为 $\frac{1}{3}$ ，写出通项公式，从而可得

$$a_n = b_n + c_n = 20n - 19 + 3^{5-n}.$$

通过计算 $a_1 = a_5 = 82$ ， $a_2 = 48$ ， $a_6 = \frac{304}{3}$ ， $a_2 \neq a_6$ ，即知 $\{a_n\}$ 不具有性质 P.

（3）从充分性、必要性两方面加以证明，其中必要性用反证法证明。

试题解析：（1）因为 $a_5 = a_2$ ，所以 $a_6 = a_3$ ， $a_7 = a_4 = 3$ ， $a_8 = a_5 = 2$ 。

于是 $a_6 + a_7 + a_8 = a_3 + 3 + 2$ ，又因为 $a_6 + a_7 + a_8 = 21$ ，解得 $a_3 = 16$ 。

（2） $\{b_n\}$ 的公差为 20， $\{c_n\}$ 的公比为 $\frac{1}{3}$ ，

所以 $b_n = 1 + 20(n-1) = 20n - 19$ ， $c_n = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 3^{5-n}$ 。

$$a_n = b_n + c_n = 20n - 19 + 3^{5-n}.$$

$a_1 = a_5 = 82$ ，但 $a_2 = 48$ ， $a_6 = \frac{304}{3}$ ， $a_2 \neq a_6$ ，

所以 $\{a_n\}$ 不具有性质 P.

[证]（3）充分性：

当 $\{b_n\}$ 为常数列时， $a_{n+1} = b_1 + \sin a_n$ 。

对任意给定的 a_1 ，只要 $a_p = a_q$ ，则由 $b_1 + \sin a_p = b_1 + \sin a_q$ ，必有 $a_{p+1} = a_{q+1}$ 。

充分性得证。

必要性：

用反证法证明。假设 $\{b_n\}$ 不是常数列，则存在 $k \in \mathbb{N}^*$ ，

使得 $b_1 = b_2 = \dots = b_k = b$ ，而 $b_{k+1} \neq b$ 。

下面证明存在满足 $a_{n+1} = b_n + \sin a_n$ 的 $\{a_n\}$ ，使得 $a_1 = a_2 = \dots = a_{k+1}$ ，但 $a_{k+2} \neq a_{k+1}$ 。

设 $f(x) = x - \sin x - b$ ，取 $m \in \mathbb{N}^*$ ，使得 $m\pi > |b|$ ，则

$f(m\pi) = m\pi - b > 0$, $f(-m\pi) = -m\pi - b < 0$, 故存在 c 使得 $f(c) = 0$.

取 $a_1 = c$, 因为 $a_{n+1} = b + \sin a_n$ ($1 \leq n \leq k$), 所以 $a_2 = b + \sin c = c = a_1$,

依此类推, 得 $a_1 = a_2 = \dots = a_{k+1} = c$.

但 $a_{k+2} = b_{k+1} + \sin a_{k+1} = b_{k+1} + \sin c \neq b + \sin c$, 即 $a_{k+2} \neq a_{k+1}$.

所以 $\{a_n\}$ 不具有性质 P, 矛盾.

必要性得证. 学.科网

综上, “对任意 a_1 , $\{a_n\}$ 都具有性质 P” 的充要条件为 “ $\{b_n\}$ 是常数列”.

考点: 1.等差数列、等比数列的通项公式; 2.充要条件的证明; 3.反证法.