2014年全国统一高考数学试卷（文科）（新课标Ⅰ）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1．（5分）已知集合M={x|﹣1<x<3}，N={x|﹣2<x<1}，则M∩N=（　　）

A．（﹣2，1）　B．（﹣1，1）　C．（1，3）　D．（﹣2，3）

【考点】1E：交集及其运算．

【专题】5J：集合．

【分析】根据集合的基本运算即可得到结论．

【解答】解：M={x|﹣1<x<3}，N={x|﹣2<x<1}，

则M∩N={x|﹣1<x<1}，

故选：B．

【点评】本题主要考查集合的基本运算，比较基础．

2．（5分）若tanα>0，则（　　）

A．sinα>0　B．cosα>0　C．sin2α>0　D．cos2α>0

【考点】GC：三角函数值的符号．

【专题】56：三角函数的求值．

【分析】化切为弦，然后利用二倍角的正弦得答案．

【解答】解：∵tanα>0，

∴$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}>0$，

则sin2α=2sinαcosα>0．

故选：C．

【点评】本题考查三角函数值的符号，考查了二倍角的正弦公式，是基础题．

3．（5分）设$z=\frac{1}{1+i}+i$，则$|z|=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．2

【考点】A5：复数的运算．

【专题】11：计算题；5N：数系的扩充和复数．

【分析】先求z，再利用求模的公式求出$|z|$．

【解答】解：$z=\frac{1}{1+i}+i=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}+i=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$．

故$|z|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

故选：B．

【点评】本题考查复数代数形式的运算，属于容易题．

4．（5分）已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3}=1$（$a>0$）的离心率为2，则实数$a=$（　　）

A．2　　B．$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D．1

【考点】KC：双曲线的性质．

【专题】11：计算题；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】由双曲线方程找出a，b，c，代入离心率，从而求出a．

【解答】解：由题意，

$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+3}}{a}=2$，

解得，$a=1$．

故选：D．

【点评】本题考查了双曲线的定义，属于基础题．

5．（5分）设函数f（x），g（x）的定义域都为R，且f（x）是奇函数，g（x）是偶函数，则下列结论正确的是（　　）

A．f（x）•g（x）是偶函数　　B．|f（x）|•g（x）是奇函数

C．f（x）•|g（x）|是奇函数　　　　D．|f（x）•g（x）|是奇函数

【考点】3K：函数奇偶性的性质与判断．

【专题】51：函数的性质及应用．

【分析】根据函数奇偶性的性质即可得到结论．

【解答】解：∵f（x）是奇函数，g（x）是偶函数，

∴f（﹣x）=﹣f（x），g（﹣x）=g（x），

f（﹣x）•g（﹣x）=﹣f（x）•g（x），故函数是奇函数，故A错误，

|f（﹣x）|•g（﹣x）=|f（x）|•g（x）为偶函数，故B错误，

f（﹣x）•|g（﹣x）|=﹣f（x）•|g（x）|是奇函数，故C正确．

|f（﹣x）•g（﹣x）|=|f（x）•g（x）|为偶函数，故D错误，

故选：C．

【点评】本题主要考查函数奇偶性的判断，根据函数奇偶性的定义是解决本题的关键．

6．（5分）设D，E，F分别为△ABC的三边BC，CA，AB的中点，则$\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}$=（　　）

A．$\overrightarrow{AD}$　　B．$\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$　　C．$\overrightarrow{BC}$　　D．$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

【考点】9S：数量积表示两个向量的夹角．

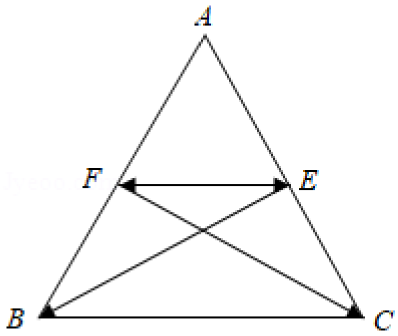
【专题】5A：平面向量及应用．

【分析】利用向量加法的三角形法则，将$\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{FC}$分解为$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB}$和$\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EC}$的形式，进而根据D，E，F分别为△ABC的三边BC，CA，AB的中点，结合数乘向量及向量加法的平行四边形法则得到答案．

【解答】解：∵D，E，F分别为△ABC的三边BC，CA，AB的中点，

∴$\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}$=（$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB}$）+（$\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EC}$）=$\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}$（$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$）=$\overrightarrow{AD}$，

故选：A．



【点评】本题考查的知识点是向量在几何中的应用，熟练掌握向量加法的三角形法则和平行四边形法则是解答的关键．

7．（5分）在函数①y=cos|2x|，②y=|cosx|，③y=cos（2x+$\frac{\pi}{6}$），④y=tan（2x﹣$\frac{\pi}{4}$）中，最小正周期为π的所有函数为（　　）

A．①②③　　B．①③④　　C．②④　　D．①③

【考点】H1：三角函数的周期性．

【专题】57：三角函数的图像与性质．

【分析】根据三角函数的周期性，求出各个函数的最小正周期，从而得出结论．

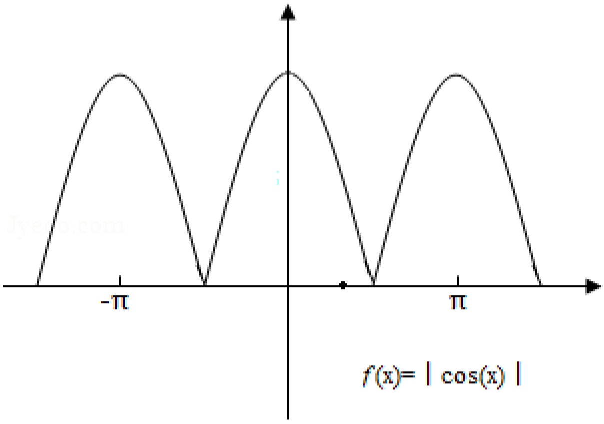
【解答】解：∵函数①y=cos丨2x丨=cos2x，它的最小正周期为$\frac{2\pi}{2}$=π，

②y=丨cosx丨的最小正周期为$\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{1}$=π，

③y=cos（2x+$\frac{\pi}{6}$）的最小正周期为$\frac{2\pi}{2}$=π，

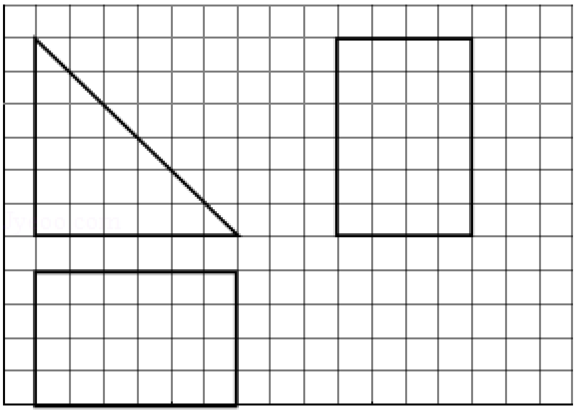
④y=tan（2x﹣$\frac{\pi}{4}$）的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$，

故选：A．



【点评】本题主要考查三角函数的周期性及求法，属于基础题．

8．（5分）如图，网格纸的各小格都是正方形，粗实线画出的是一个几何体的三视图，则这个几何体是（　　）



A．三棱锥　　B．三棱柱　　C．四棱锥　　D．四棱柱

【考点】L7：简单空间图形的三视图．

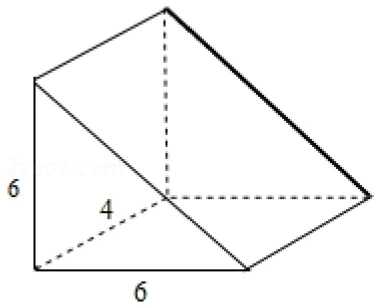
【专题】5F：空间位置关系与距离．

【分析】由题意画出几何体的图形即可得到选项．

【解答】解：根据网格纸的各小格都是正方形，粗实线画出的是一个几何体的三视图，

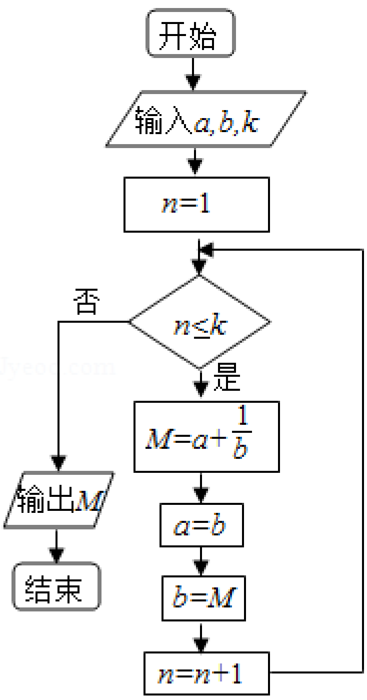
可知几何体如图：几何体是三棱柱．

故选：B．



【点评】本题考查三视图复原几何体的直观图的判断方法，考查空间想象能力．

9．（5分）执行如图的程序框图，若输入的a，b，k分别为1，2，3，则输出的M=（　　）



A．$\frac{20}{3}$　　B．$\frac{7}{2}$　　C．$\frac{16}{5}$　　D．$\frac{15}{8}$

【考点】EF：程序框图．

【专题】5I：概率与统计．

【分析】根据框图的流程模拟运行程序，直到不满足条件，计算输出M的值．

【解答】解：由程序框图知：第一次循环$M=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，$a=2$，$b=\frac{3}{2}$，$n=2$；

第二次循环$M=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$，$a=\frac{3}{2}$，$b=\frac{8}{3}$，$n=3$；

第三次循环$M=\frac{3}{2}+\frac{3}{8}=\frac{15}{8}$，$a=\frac{8}{3}$，$b=\frac{15}{8}$，n=4.

不满足条件$n\leq3$，跳出循环体，输出$M=\frac{15}{8}$.

故选：D.

【点评】本题考查了当型循环结构的程序框图，根据框图的流程模拟运行程序是解答此类问题的常用方法.

10．（5分）已知抛物线C：$y^2=x$的焦点为F，A（x_0，y_0）是C上一点，$AF=|\frac{5}{4}x_0|$，则x_0=（　　）

A．1　　B．2　　C．4　　D．8

【考点】K8：抛物线的性质.

【专题】5D：圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】利用抛物线的定义、焦点弦长公式即可得出.

【解答】解：抛物线C：$y^2=x$的焦点为F$(\frac{1}{4}, 0)$，

∵A（x_0，y_0）是C上一点，$AF=|\frac{5}{4}x_0|$，$x_0>0$.

$\therefore\frac{5}{4}x_0=x_0+\frac{1}{4}$，

解得$x_0=1$.

故选：A.

【点评】本题考查了抛物线的定义、焦点弦长公式，属于基础题.

11．（5分）设x，y满足约束条件$\begin{cases}x+y\geqslant a\\x-y\leqslant -1\end{cases}$且z=x+ay的最小值为7，则a=（　　）

A．﹣5　　B．3　　C．﹣5或3　　D．5或﹣3

【考点】7F：基本不等式及其应用.

【专题】5B：直线与圆.

【分析】如图所示，当$a\geq1$时，由$\begin{cases}x-y=-1\\x+y=a\end{cases}$，解得$A(\frac{a-1}{2}, \frac{a+1}{2})$．当直线z=x+ay

经过A点时取得最小值为7，同理对a＜1得出．

【解答】解：如图所示，

当a≥1时，由$\begin{cases}x-y=-1\\x+y=a\end{cases}$，

解得$x=\dfrac{a-1}{2}$，$y=\dfrac{a+1}{2}$．

$\therefore A(\dfrac{a-1}{2}，\dfrac{a+1}{2})$．

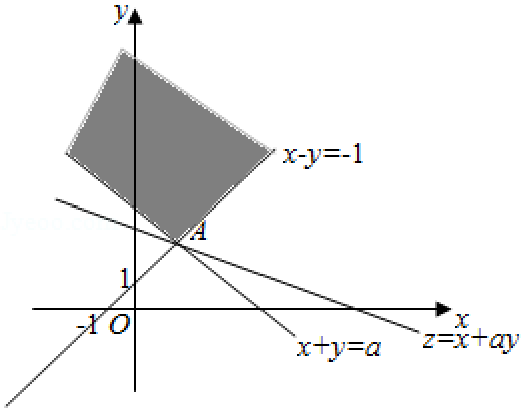
当直线z=x+ay经过A点时取得最小值为7，

$\therefore 7=\dfrac{a-1}{2}+\dfrac{a(a+1)}{2}$，化为$a^2+2a-15=0$，

解得a=3，a=﹣5舍去．

当a＜1时，不符合条件．

故选：B．



【点评】本题考查了线性规划的有关知识、直线的斜率与交点，考查了数形结合的思想方法，属于中档题．

12．（5分）已知函数f（x）=ax^3-3x^2+1，若f（x）存在唯一的零点x_0，且x_0＞0，则实数a的取值范围是（　　）

A．（1，+∞）　B．（2，+∞）　C．（﹣∞，﹣1）　D．（﹣∞，﹣2）

【考点】53：函数的零点与方程根的关系．

【专题】11：计算题；51：函数的性质及应用；53：导数的综合应用．

【分析】由题意可得f′（x）=$3ax^2-6x$=3x（ax﹣2），f（0）=1；分类讨论确定

函数的零点的个数及位置即可．

【解答】解：∵f（x）$=ax^3-3x^2+1$，

∴f′（x）$=3ax^2-6x=3x(ax-2)$，f（0）=1；

①当a=0时，f（x）$=-3x^2+1$有两个零点，不成立；

②当a＞0时，f（x）$=ax^3-3x^2+1$在（$-\infty$，0）上有零点，故不成立；

③当a＜0时，f（x）$=ax^3-3x^2+1$在（0，$+\infty$）上有且只有一个零点；

故f（x）$=ax^3-3x^2+1$在（$-\infty$，0）上没有零点；

而当$x=\frac{2}{a}$时，f（x）$=ax^3-3x^2+1$在（$-\infty$，0）上取得最小值；

故f（$\frac{2}{a}$）$=\frac{8}{a^2}-3\bullet\frac{4}{a^2}+1>0$；

故$a<-2$；

综上所述，

实数a的取值范围是（$-\infty$，-2）；

故选：D．

【点评】本题考查了导数的综合应用及分类讨论的思想应用，同时考查了函数的零点的判定的应用，属于基础题．

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分

13．（5分）将2本不同的数学书和1本语文书在书架上随机排成一行，则2本数学书相邻的概率为__$\frac{2}{3}$__．

【考点】CB：古典概型及其概率计算公式．

【专题】5I：概率与统计．

【分析】首先求出所有的基本事件的个数，再从中找到2本数学书相邻的个数，最后根据概率公式计算即可．

【解答】解：2本不同的数学书和1本语文书在书架上随机排成一行，所有的基本事件有共有$A_3^3=6$种结果，

其中2本数学书相邻的有（数学1，数学2，语文），（数学2，数学1，语文），（语文，数学1，数学2），（语文，数学2，数学1）共4个，故本数学书相

邻的概率P=$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

故答案为：$\frac{2}{3}$.

【点评】本题考查了古典概型的概率公式的应用，关键是不重不漏的列出满足条件的基本事件.

14．（5分）甲、乙、丙三位同学被问到是否去过A，B，C三个城市时，

甲说：我去过的城市比乙多，但没去过B城市；

乙说：我没去过C城市；

丙说：我们三人去过同一城市；

由此可判断乙去过的城市为__A__.

【考点】F4：进行简单的合情推理.

【专题】5M：推理和证明.

【分析】可先由乙推出，可能去过A城市或B城市，再由甲推出只能是A，B中的一个，再由丙即可推出结论.

【解答】解：由乙说：我没去过C城市，则乙可能去过A城市或B城市，

但甲说：我去过的城市比乙多，但没去过B城市，则乙只能是去过A，B中的任一个，

再由丙说：我们三人去过同一城市，

则由此可判断乙去过的城市为A.

故答案为：A.

【点评】本题主要考查简单的合情推理，要抓住关键，逐步推断，是一道基础题.

15．（5分）设函数f（x）=$\begin{cases} e^{x-1}, & x<1 \\ x^{\frac{1}{3}}, & x\geqslant 1 \end{cases}$，则使得f（x）≤2成立的x的取值范围是__x≤8__.

【考点】5B：分段函数的应用.

【专题】11：计算题；51：函数的性质及应用.

【分析】利用分段函数，结合f（x）≤2，解不等式，即可求出使得f（x）≤2成立的x的取值范围.

【解答】解：x＜1时，$e^{x-1}\le 2$，

∴x≤ln2+1，

∴x＜1；

x≥1时，$x^{\frac{1}{3}}\le 2$，

∴x≤8，

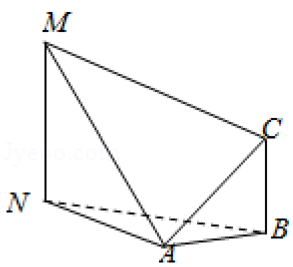
∴1≤x≤8，

综上，使得f（x）≤2成立的x的取值范围是x≤8.

故答案为：x≤8.

【点评】本题考查不等式的解法，考查分段函数，考查学生的计算能力，属于基础题.

16．（5分）如图，为测量山高MN，选择A和另一座的山顶C为测量观测点，从A点测得M点的仰角∠MAN=60°，C点的仰角∠CAB=45°以及∠MAC=75°；从C点测得∠MCA=60°，已知山高BC=100m，则山高MN=__150__m.



【考点】HU：解三角形.

【专题】12：应用题；58：解三角形.

【分析】△ABC中，由条件利用直角三角形中的边角关系求得AC；△AMC中，由条件利用正弦定理求得AM；Rt△AMN中，根据MN=AM•sin∠MAN，计算求得结果.

【解答】解：△ABC中，∵∠BAC=45°，∠ABC=90°，BC=100，

∴AC=$\frac{100}{\sin45^\circ}$=$100\sqrt{2}$.

△AMC中，∵∠MAC=75°，∠MCA=60°，

∴∠AMC=45°，由正弦定理可得$\frac{AM}{\sin60^\circ}$=$\frac{100\sqrt{2}}{\sin45^\circ}$，解得AM=$100\sqrt{3}$.

Rt△AMN中，MN=AM•sin∠MAN=$100\sqrt{3}$×sin60°=150（m），

故答案为：150.

【点评】本题主要考查正弦定理、直角三角形中的边角关系，属于中档题.

三、解答题：解答应写出文字说明．证明过程或演算步骤

17．（12分）已知$\{a_n\}$是递增的等差数列，a_2，a_4是方程$x^2-5x+6=0$的根.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{\frac{a_n}{2^n}\}$的前n项和.

【考点】84：等差数列的通项公式；8E：数列的求和.

【专题】15：综合题；54：等差数列与等比数列.

【分析】（1）解出方程的根，根据数列是递增的求出a_2，a_4的值，从而解出通项；

（2）将第一问中求得的通项代入，用错位相减法求和.

【解答】解：（1）方程$x^2-5x+6=0$的根为2，3．又$\{a_n\}$是递增的等差数列，

故$a_2=2$，$a_4=3$，可得2d=1，d=$\frac{1}{2}$，

故$a_n=2+(n-2)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n+1$，

（2）设数列$\{\frac{a_n}{2^n}\}$的前n项和为S_n，

$S_n=\frac{a_1}{2^1}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{a_n}{2^n}$，①

$\frac{1}{2}S_n=\frac{a_1}{2^2}+\frac{a_2}{2^3}+\frac{a_3}{2^4}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2^n}+\frac{a_n}{2^{n+1}}$，②

① - ②得$\frac{1}{2}S_n=\frac{a_1}{2}+d(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n})-\frac{a_n}{2^{n+1}}=\frac{\frac{3}{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{4}(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{1-\frac{1}{2}}-\frac{a_n}{2^{n+1}}$

，

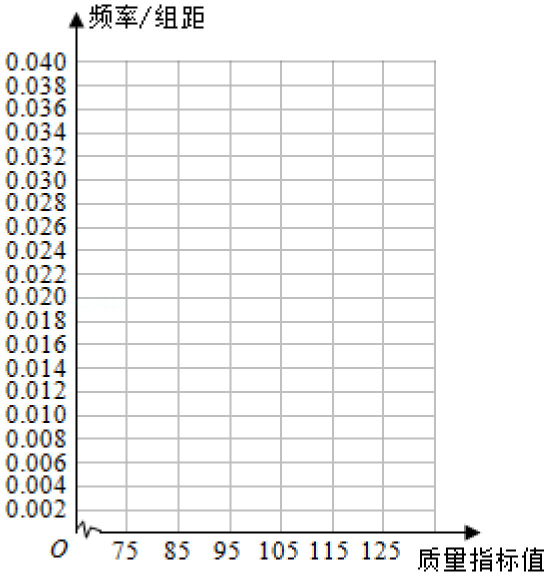
解得$S_n=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^{n-1}})-\frac{n+2}{2^{n+1}}=2-\frac{n+4}{2^{n+1}}$.

【点评】本题考查等的性质及错位相减法求和，是近几年高考对数列解答题考查的主要方式.

18. （12分）从某企业生产的产品中抽取100件，测量这些产品的一项质量指标值，由测量结果得如下频数分布表：

质量指标值分组	[75，85）	[85，95）	[95，105）	[105，115）	[115，125）
频数	6	26	38	22	8

（1）在表格中作出这些数据的频率分布直方图；



（2）估计这种产品质量指标的平均数及方差（同一组中的数据用该组区间的中点值作代表）；

（3）根据以上抽样调查数据，能否认为该企业生产的这种产品符合“质量指标值不低于95的产品至少要占全部产品80%”的规定？

【考点】B8：频率分布直方图；BC：极差、方差与标准差.

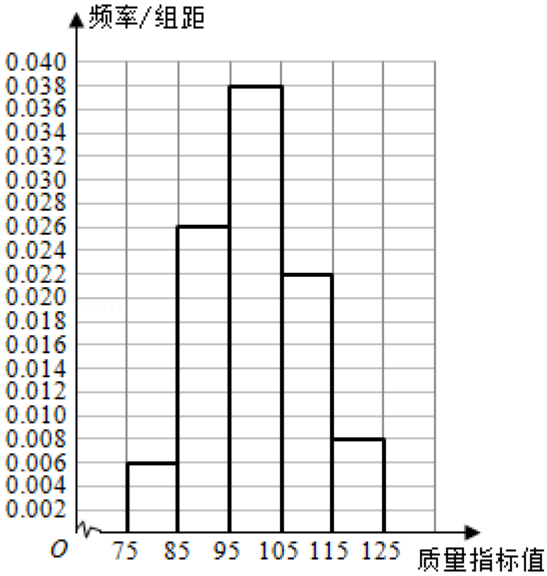
【专题】5I：概率与统计．

【分析】（1）根据频率分布直方图做法画出即可；

（2）用样本平均数和方差来估计总体的平均数和方差，代入公式计算即可．

（3）求出质量指标值不低于95的产品所占比例的估计值，再和0.8比较即可．

【解答】解：（1）频率分布直方图如图所示：



（2）质量指标的样本平均数为$\overline{x}=80\times0.06+90\times0.26+100\times0.38+110\times0.22+120\times0.08=100$，

质量指标的样本的方差为$S^2=(-20)^2\times0.06+(-10)^2\times0.26+0\times0.38+10^2\times0.22+20^2\times0.08=104$，

这种产品质量指标的平均数的估计值为100，方差的估计值为104．

（3）质量指标值不低于95的产品所占比例的估计值为0.38+0.22+0.08=0.68，

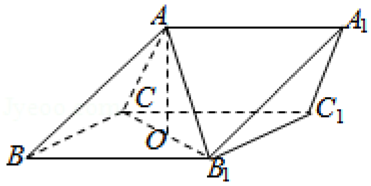
由于该估计值小于0.8，故不能认为该企业生产的这种产品符合“质量指标值不低于95的产品至少要占全部产品80%”的规定．

【点评】本题主要考查了频率分布直方图，样本平均数和方差，考查了学习的细心的绘图能力和精确的计算能力．

19．（12分）如图，三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，侧面BB_1C_1C为菱形，B_1C的中点为O，且$AO\perp$平面BB_1C_1C．

（1）证明：$B_1C\perp AB$；

（2）若$AC\perp AB_1$，$\angle CBB_1=60°$，$BC=1$，求三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的高．



【考点】LF：棱柱、棱锥、棱台的体积；LW：直线与平面垂直．

【专题】15：综合题；5F：空间位置关系与距离．

【分析】（1）连接BC_1，则O为B_1C与BC_1的交点，证明B_1C⊥平面ABO，可得B_1C⊥AB；

（2）作OD⊥BC，垂足为D，连接AD，作OH⊥AD，垂足为H，证明△CBB_1为等边三角形，求出B_1到平面ABC的距离，即可求三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的高．

【解答】（1）证明：连接BC_1，则O为B_1C与BC_1的交点，

∵侧面BB_1C_1C为菱形，

∴BC_1⊥B_1C，

∵AO⊥平面BB_1C_1C，

∴AO⊥B_1C，

∵AO∩BC_1=O，

∴B_1C⊥平面ABO，

∵AB⊂平面ABO，

∴B_1C⊥AB；

（2）解：作OD⊥BC，垂足为D，连接AD，作OH⊥AD，垂足为H，

∵BC⊥AO，BC⊥OD，AO∩OD=O，

∴BC⊥平面AOD，

∴OH⊥BC，

∵OH⊥AD，BC∩AD=D，

∴OH⊥平面ABC，

∵∠CBB_1=60°，

∴△CBB_1为等边三角形，

∵BC=1，∴OD=$\frac{\sqrt{3}}{4}$，

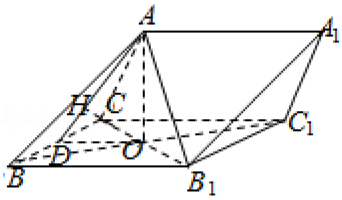
$\because AC\perp AB_1$，$\therefore OA=\frac{1}{2}B_1C=\frac{1}{2}$，

由OH•AD=OD•OA，可得$AD=\sqrt{OD^2+OA^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$，$\therefore OH=\frac{\sqrt{21}}{14}$，

∵O为B_1C的中点，

∴B_1到平面ABC的距离为$\frac{\sqrt{21}}{7}$，

∴三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的高$\frac{\sqrt{21}}{7}$.



【点评】本题考查线面垂直的判定与性质，考查点到平面距离的计算，考查学生分析解决问题的能力，属于中档题.

20．（12分）已知点P（2，2），圆C：$x^2+y^2-8y=0$，过点P的动直线l与圆C交于A，B两点，线段AB的中点为M，O为坐标原点.

（1）求M的轨迹方程；

（2）当|OP|=|OM|时，求l的方程及△POM的面积.

【考点】%H：三角形的面积公式；J3：轨迹方程.

【专题】5B：直线与圆.

【分析】（1）由圆C的方程求出圆心坐标和半径，设出M坐标，由$\overrightarrow{CM}$与$\overrightarrow{MP}$数量积等于0列式得M的轨迹方程；

（2）设M的轨迹的圆心为N，由|OP|=|OM|得到ON⊥PM．求出ON所在直线的斜率，由直线方程的点斜式得到PM所在直线方程，由点到直线的距离公式求出O到l的距离，再由弦心距、圆的半径及弦长间的关系求出PM的长度，代入三角形面积公式得答案.

【解答】解：（1）由圆C：$x^2+y^2-8y=0$，得$x^2+(y-4)^2=16$，

∴圆C的圆心坐标为（0，4），半径为4.

设M（x，y），则$\overrightarrow{CM}=(x,\ y-4)$，$\overrightarrow{MP}=(2-x,\ 2-y)$.

由题意可得：$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{MP}=0$.

即x（2﹣x）+（y﹣4）（2﹣y）=0.

整理得：（x﹣1）^{2}+（y﹣3）^{2}=2.

∴M的轨迹方程是（x﹣1）^{2}+（y﹣3）^{2}=2.

（2）由（1）知M的轨迹是以点N（1，3）为圆心，$\sqrt{2}$为半径的圆，

由于|OP|=|OM|，

故O在线段PM的垂直平分线上，

又P在圆N上，

从而ON⊥PM.

∵k_{ON}=3，

∴直线l的斜率为﹣$\frac{1}{3}$.

∴直线PM的方程为$y-2=-\frac{1}{3}(x-2)$，即x+3y﹣8=0.

则O到直线l的距离为$\frac{|-8|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$.

又N到l的距离为$\frac{|1\times1+3\times3-8|}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，

∴|PM|=$2\sqrt{2-(\frac{\sqrt{10}}{5})^2}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$.

∴$S_{\triangle POM}=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{10}}{5}\times\frac{4\sqrt{10}}{5}=\frac{16}{5}$.

【点评】本题考查圆的轨迹方程的求法，训练了利用向量数量积判断两个向量的垂直关系，训练了点到直线的距离公式的应用，是中档题.

21．（12分）设函数f（x）=alnx+$\frac{1-a}{2}$x^2﹣bx（a≠1），曲线y=f（x）在点（1，f（1））处的切线斜率为0，

（1）求b；

（2）若存在x_0≥1，使得f（x_0）$<\frac{a}{a-1}$，求a的取值范围.

【考点】6H：利用导数研究曲线上某点切线方程.

【专题】53：导数的综合应用.

【分析】（1）利用导数的几何意义即可得出；

（2）对a分类讨论：当$a\leqslant\frac{1}{2}$时，当$\frac{1}{2}<a<1$时，当$a>1$时，再利用导数研究函数的单调性极值与最值即可得出．

【解答】解：（1）$f'(x)=\frac{a}{x}+(1-a)x-b$（$x>0$），

∵曲线$y=f(x)$在点$(1, f(1))$处的切线斜率为0，

∴$f'(1)=a+(1-a)\times 1-b=0$，解得$b=1$．

（2）函数$f(x)$的定义域为$(0, +\infty)$，由（1）可知：$f(x)=a\ln x+\frac{1-a}{2}x^2-x$，

∴$f'(x)=\frac{a}{x}+(1-a)x-1=\frac{(1-a)}{x}(x-\frac{a}{1-a})(x-1)$．

①当$a\leqslant\frac{1}{2}$时，则$\frac{a}{1-a}\leqslant 1$，

则当$x>1$时，$f'(x)>0$，

∴函数$f(x)$在$(1, +\infty)$单调递增，

∴存在$x_0\geq 1$，使得$f(x_0)<\frac{a}{a-1}$的充要条件是$f(1)<\frac{a}{a-1}$，即$\frac{1-a}{2}-1<\frac{a}{a-1}$，

解得$-\sqrt{2}-1<a<\sqrt{2}-1$；

②当$\frac{1}{2}<a<1$时，则$\frac{a}{1-a}>1$，

则当$x\in(1, \frac{a}{1-a})$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$在$(1, \frac{a}{1-a})$上单调递减；

当$x\in(\frac{a}{1-a}, +\infty)$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$在$(\frac{a}{1-a}, +\infty)$上单调递增．

∴存在$x_0\geq 1$，使得$f(x_0)<\frac{a}{a-1}$的充要条件是$f(\frac{a}{1-a})<\frac{a}{a-1}$，

而$f(\frac{a}{1-a})=a\ln\frac{a}{1-a}+\frac{a^2}{2(1-a)}+\frac{a}{a-1}>\frac{a}{a-1}$，不符合题意，应舍去．

③若$a>1$时，$f(1)=\frac{1-a}{2}-1=\frac{-a-1}{2}<\frac{a}{a-1}$，成立．

综上可得：a的取值范围是$(-\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1)\cup(1, +\infty)$．

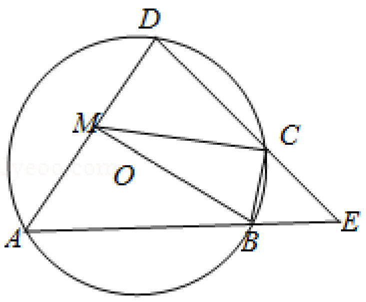
【点评】本题考查了导数的几何意义、利用导数研究函数的单调性极值与最值等基础知识与基本技能方法，考查了分类讨论的思想方法，考查了推理能力和计算能力，属于难题．

请考生在第22，23，24题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分。【选修4-1：几何证明选讲】

22．（10分）如图，四边形ABCD是⊙O的内接四边形，AB的延长线与DC的延长线交于点E，且CB=CE．

（Ⅰ）证明：∠D=∠E；

（Ⅱ）设AD不是⊙O的直径，AD的中点为M，且MB=MC，证明：△ADE为等边三角形．



【考点】NB：弦切角；NC：与圆有关的比例线段．

【专题】15：综合题；5M：推理和证明．

【分析】（Ⅰ）利用四边形ABCD是⊙O的内接四边形，可得∠D=∠CBE，由CB=CE，可得∠E=∠CBE，即可证明：∠D=∠E；

（Ⅱ）设BC的中点为N，连接MN，证明AD∥BC，可得∠A=∠CBE，进而可得∠A=∠E，即可证明△ADE为等边三角形．

【解答】证明：（Ⅰ）∵四边形ABCD是⊙O的内接四边形，

∴∠D=∠CBE，

∵CB=CE，

∴∠E=∠CBE，

∴∠D=∠E；

（Ⅱ）设BC的中点为N，连接MN，则由MB=MC知MN⊥BC，

∴O在直线MN上，

∵AD不是⊙O的直径，AD的中点为M，

∴OM⊥AD，

∴AD∥BC，

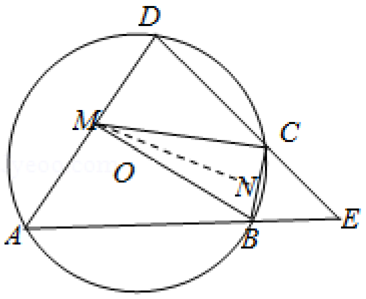
∴∠A=∠CBE，

∵∠CBE=∠E，

∴∠A=∠E，

由（Ⅰ）知，∠D=∠E，

∴△ADE为等边三角形．



【点评】本题考查圆的内接四边形性质，考查学生分析解决问题的能力，属于中档题．

【选修4-4：坐标系与参数方程】

23．已知曲线C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，直线l：$\begin{cases}x=2+t\\y=2-2t\end{cases}$（t为参数）

（Ⅰ）写出曲线C的参数方程，直线l的普通方程．

（Ⅱ）过曲线C上任意一点P作与l夹角为30°的直线，交l于点A，求|PA|的最大值与最小值．

【考点】KH：直线与圆锥曲线的综合；QH：参数方程化成普通方程．

【专题】5S：坐标系和参数方程．

【分析】（Ⅰ）联想三角函数的平方关系可取x=2cosθ、y=3sinθ得曲线C的参数方程，直接消掉参数t得直线l的普通方程；

（Ⅱ）设曲线C上任意一点P（2cosθ，3sinθ）．由点到直线的距离公式得到P到直线l的距离，除以

sin30°进一步得到|PA|，化积后由三角函数的范围求得|PA|的最大值与最小值．

【解答】解：（Ⅰ）对于曲线C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，可令x=2cosθ、y=3sinθ，

故曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=3\sin\theta\end{cases}$，（θ为参数）．

对于直线l：$\begin{cases}x=2+t & ①\\y=2-2t & ②\end{cases}$，

由①得：t=x﹣2，代入②并整理得：2x+y﹣6=0；

（Ⅱ）设曲线C上任意一点P（2cosθ，3sinθ）．

P到直线l的距离为$d=\frac{\sqrt{5}}{5}|4\cos\theta+3\sin\theta-6|$．

则$|PA|=\frac{d}{\sin30°}=\frac{2\sqrt{5}}{5}|5\sin(\theta+\alpha)-6|$，其中α为锐角．

当sin（θ+α）=﹣1时，|PA|取得最大值，最大值为$\frac{22\sqrt{5}}{5}$．

当sin（θ+α）=1时，|PA|取得最小值，最小值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$．

【点评】本题考查普通方程与参数方程的互化，训练了点到直线的距离公式，体现了数学转化思想方法，是中档题．

【选修4-5：不等式选讲】

24．若a＞0，b＞0，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{ab}$．

（Ⅰ）求a^3+b^3的最小值；

（Ⅱ）是否存在a，b，使得2a+3b=6？并说明理由．

【考点】RI：平均值不等式．

【专题】59：不等式的解法及应用．

【分析】（Ⅰ）由条件利用基本不等式求得ab≥2，再利用基本不等式求得a^3+b^3的最小值．

（Ⅱ）根据ab≥2及基本不等式求的2a+3b＞8，从而可得不存在a，b，使得2a+3b=6．

【解答】解：（Ⅰ）∵a＞0，b＞0，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{ab}$，

∴$\sqrt{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq2\sqrt{\frac{1}{ab}}$，∴ab≥2，

当且仅当$a=b=\sqrt{2}$时取等号.

$\because a^3+b^3\geq 2\sqrt{(ab)^3}\geq 2\sqrt{2^3}=4\sqrt{2}$，当且仅当$a=b=\sqrt{2}$时取等号，

$\therefore a^3+b^3$的最小值为$4\sqrt{2}$.

（Ⅱ）$\because 2a+3b\geq 2\sqrt{2a\cdot 3b}=2\sqrt{6ab}$，当且仅当$2a=3b$时，取等号.

而由（1）可知，$2\sqrt{6ab}\geq 2\sqrt{12}=4\sqrt{3}>6$，

故不存在a，b，使得$2a+3b=6$成立.

【点评】本题主要考查基本不等式在最值中的应用，要注意检验等号成立条件是否具备，属于基础题.