2016年天津市高考数学试卷（文科）

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的

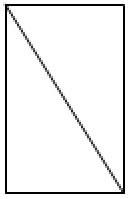
1．（5分）（2016•天津）已知集合$A=\{1，2，3\}$，$B=\{y|y=2x-1，x\in A\}$，则$A\cap B=$（　　）

A．$\{1，3\}$　B．$\{1，2\}$　C．$\{2，3\}$　D．$\{1，2，3\}$

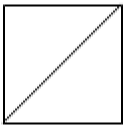
2．（5分）（2016•天津）甲、乙两人下棋，两人下成和棋的概率是$\frac{1}{2}$，甲获胜的概率是$\frac{1}{3}$，则甲不输的概率为（　　）

A．$\frac{5}{6}$　B．$\frac{2}{5}$　C．$\frac{1}{6}$　D．$\frac{1}{3}$

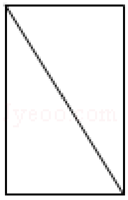
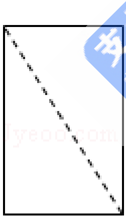
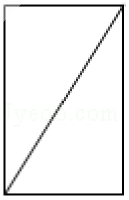
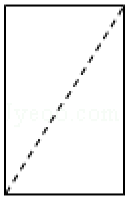
3．（5分）（2016•天津）将一个长方体沿相邻三个面的对角线截去一个棱锥，得到的几何体的正视图与俯视图如图所示，则该几何体的侧（左）视图为（　　）



正视图



俯视图

A．　B．　C．　D．

4．（5分）（2016•天津）已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的焦距为$2\sqrt{5}$，且双曲线的一条渐近线与直线$2x+y=0$垂直，则双曲线的方程为（　　）

A．$\frac{x^2}{4}-y^2=1$　B．$x^2-\frac{y^2}{4}=1$

C．$\frac{3x^2}{20}-\frac{3y^2}{5}=1$　D．$\frac{3x^2}{5}-\frac{3y^2}{20}=1$

5．（5分）（2016•天津）设$x>0$，$y\in R$，则"$x>y$"是"$x>|y|$"的（　　）

A．充要条件 B．充分不必要条件

C．必要而不充分条件 D．既不充分也不必要条件

6．（5分）（2016•天津）已知f（x）是定义在R上的偶函数，且在区间（﹣∞，0）上单调递增，若实数a满足f（$2^{|a-1|}$）＞f（$-\sqrt{2}$），则a的取值范围是（　　）

A．（﹣∞，$\frac{1}{2}$）　B．（﹣∞，$\frac{1}{2}$）∪（$\frac{3}{2}$，+∞）　C．（$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$）　D．（$\frac{3}{2}$，+∞）

7．（5分）（2016•天津）已知△ABC是边长为1的等边三角形，点D、E分别是边AB、BC的中点，连接DE并延长到点F，使得DE=2EF，则$\overrightarrow{AF}$•$\overrightarrow{BC}$的值为（　　）

A．$-\frac{5}{8}$ B．$\frac{1}{8}$　C．$\frac{1}{4}$　D．$\frac{11}{8}$

8．（5分）（2016•天津）已知函数f（x）=$\sin^2\frac{\omega x}{2}+\frac{1}{2}\sin\omega x-\frac{1}{2}$（ω＞0），x∈R，若f（x）在区间（π，2π）内没有零点，则ω的取值范围是（　　）

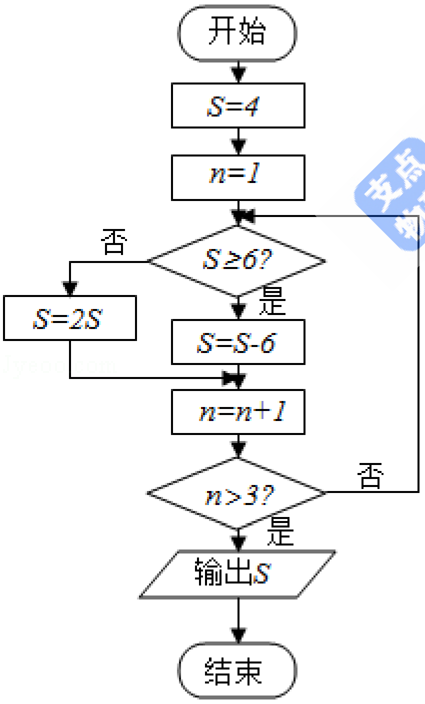
A．（0，$\frac{1}{8}$] B．（0，$\frac{1}{4}$]∪[$\frac{5}{8}$，1）　C．（0，$\frac{5}{8}$] D．（0，$\frac{1}{8}$]∪[$\frac{1}{4}$，$\frac{5}{8}$]

二、填空题本大题6小题，每题5分，共30分

9．（5分）（2016•天津）i是虚数单位，复数z满足（1+i）z=2，则z的实部为______．

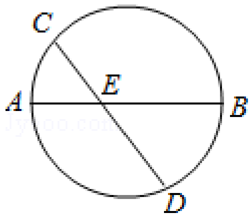
10．（5分）（2016•天津）已知函数f（x）=（2x+1）e^x，f′（x）为f（x）的导函数，则f′（0）的值为______．

11．（5分）（2016•天津）阅读如图所示的程序框图，运行相应的程序，则输出S的值为______．



12．（5分）（2016•天津）已知圆C的圆心在x轴正半轴上，点（0，$\sqrt{5}$）圆C上，且圆心到直线2x﹣y=0的距离为$\frac{4\sqrt{5}}{5}$，则圆C的方程为______．

13．（5分）（2016•天津）如图，AB是圆的直径，弦CD与AB相交于点E，BE=2AE=2，BD=ED，则线段CE的长为______．



14．（5分）（2016•天津）已知函数f（x）=$\begin{cases}x^2+(4a-3)x+3a, & x<0\\ \log_a(x+1)+1, & x\geqslant 0\end{cases}$（a>0，且a≠1）在R上单调递减，且关于x的方程|f（x）|=2 - $\frac{x}{3}$恰有两个不相等的实数解，则a的取值范围是______.

三、解答题：本大题共6小题，80分

15．（13分）（2016•天津）在△ABC中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，已知asin 2B=$\sqrt{3}$bsinA．

（1）求B；

（2）已知cosA=$\frac{1}{3}$，求sinC的值．

16．（13分）（2016•天津）某化工厂生产甲、乙两种混合肥料，需要A，B，C三种主要原料，生产1扯皮甲种肥料和生产1车皮乙种肥料所需三种原料的吨数如表所示：

原料 肥料	A	B	C
甲	4	8	3
乙	5	5	10

现有A种原料200吨，B种原料360吨，C种原料300吨，在此基础上生产甲、乙两种肥料．已知生产1车皮甲种肥料，产生的利润为2万元；生产1车品乙种肥料，产生的利润为3万元、分别用x，y表示计划生产甲、乙两种肥料的车皮数．

（1）用x，y列出满足生产条件的数学关系式，并画出相应的平面区域；

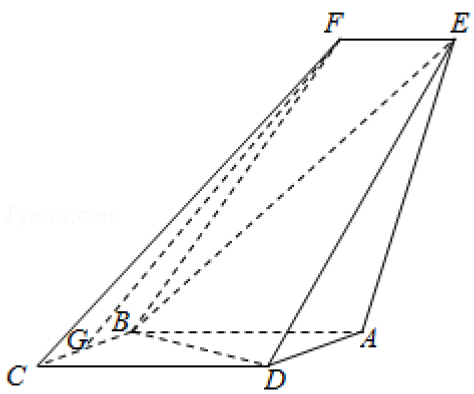
（2）问分别生产甲、乙两种肥料，求出此最大利润．

17．（13分）（2016•天津）如图，四边形ABCD是平行四边形，平面AED⊥平面ABCD，EF∥AB，AB=2，DE=3，BC=EF=1，AE=$\sqrt{6}$，∠BAD=60°，G为BC的中点．

（1）求证：FG∥平面BED；

（2）求证：平面BED⊥平面AED；

（3）求直线EF与平面BED所成角的正弦值．



18．（13分）（2016•天津）已知$\{a_n\}$是等比数列，前n项和为S_n（$n\in N^*$），且$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}=\frac{2}{a_3}$，$S_6=63$．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若对任意的$n\in N^*$，b_n是$\log_2a_n$和$\log_2a_{n+1}$的等差中项，求数列$\{(-1)^n b_n^2\}$的前2n项和．

19．（14分）（2016•天津）设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{3}=1$（$a>\sqrt{3}$）的右焦点为F，右顶点为A，已知$\frac{1}{|OF|}+\frac{1}{|OA|}=\frac{3e}{|FA|}$，其中O为原点，e为椭圆的离心率．

（1）求椭圆的方程；

（2）设过点A的直线l与椭圆交于B（B不在x轴上），垂直于l的直线与l交于点M，与y轴交于点H，若BF⊥HF，且∠MOA=∠MAO，求直线l的斜率．

20．（14分）（2016•天津）设函数$f(x)=x^3-ax-b$，$x\in R$，其中a，$b\in R$．

（1）求f（x）的单调区间；

（2）若f（x）存在极值点x_0，且$f(x_1)=f(x_0)$，其中$x_1\neq x_0$，求证：$x_1+2x_0=0$；

（3）设a＞0，函数$g(x)=|f(x)|$，求证：g（x）在区间$[-1,1]$上的最大值不小于$\frac{1}{4}$．

2016年天津市高考数学试卷（文科）

参考答案与试题解析

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的

1．（5分）（2016•天津）已知集合A={1，2，3}，B={y|y=2x－1，x∈A}，则A∩B=（　　）

A．{1，3}　B．{1，2}　C．{2，3}　D．{1，2，3}

【分析】根据题意，将集合B用列举法表示出来，可得B={1，3，5}，由交集的定义计算可得答案．

【解答】解：根据题意，集合A={1，2，3}，而B={y|y=2x－1，x∈A}，

则B={1，3，5}，

则A∩B={1，3}，

故选：A．

【点评】本题考查集合的运算，注意集合B的表示方法．

2．（5分）（2016•天津）甲、乙两人下棋，两人下成和棋的概率是$\frac{1}{2}$，甲获胜的概率是$\frac{1}{3}$，则甲不输的概率为（　　）

A．$\frac{5}{6}$　B．$\frac{2}{5}$　C．$\frac{1}{6}$　D．$\frac{1}{3}$

【分析】利用互斥事件的概率加法公式即可得出．

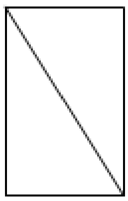
【解答】解：∵甲不输与甲、乙两人下成和棋是互斥事件．

∴根据互斥事件的概率计算公式可知：甲不输的概率P=$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$．

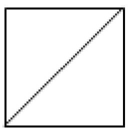
故选：A．

【点评】本题考查互斥事件与对立事件的概率公式，关键是判断出事件的关系，然后选择合适的概率公式，属于基础题．

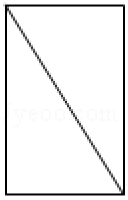
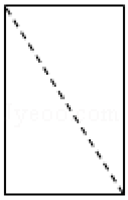
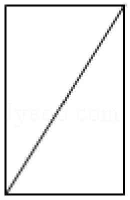
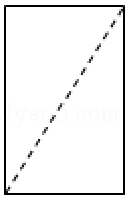
3．（5分）（2016•天津）将一个长方体沿相邻三个面的对角线截去一个棱锥，得到的几何体的正视图与俯视图如图所示，则该几何体的侧（左）视图为（　　）



正视图

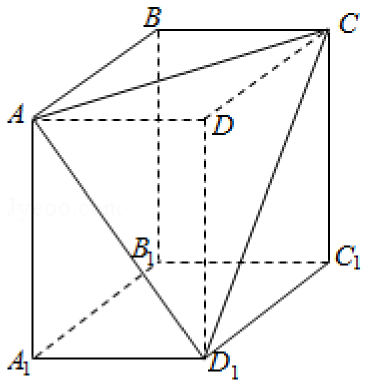


俯视图

A.  B.  C.  D. 

【分析】根据主视图和俯视图作出几何体的直观图，找出所切棱锥的位置，得出答案．

【解答】解：由主视图和俯视图可知切去的棱锥为$D-AD_1C$，



棱CD_1在左侧面的投影为BA_1，

故选B．

【点评】本题考查了棱锥，棱柱的结构特征，三视图，考查空间想象能力，属于基础题．

4．（5分）（2016•天津）已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的焦距为$2\sqrt{5}$，且双曲线的一条渐近线与直线2x+y=0垂直，则双曲线的方程为（　　）

A．$\frac{x^2}{4}-y^2=1$　　B．$x^2-\frac{y^2}{4}=1$

C．$\frac{3x^2}{20}-\frac{3y^2}{5}=1$　　D．$\frac{3x^2}{5}-\frac{3y^2}{20}=1$

【分析】利用双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的焦距为$2\sqrt{5}$，且双曲线的一条渐近线与直线2x+y=0垂直，求出几何量a，b，c，即可求出双曲线的方程．

【解答】解：∵双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的焦距为$2\sqrt{5}$，

∴$c=\sqrt{5}$，

∵双曲线的一条渐近线与直线2x+y=0垂直，

∴$\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$，

∴a=2b，

∵$c^2=a^2+b^2$，

∴a=2，b=1，

∴双曲线的方程为$\frac{x^2}{4}-y^2=1$.

故选：A.

【点评】本题考查双曲线的方程与性质，考查待定系数法的运用，确定双曲线的几何量是关键.

5．（5分）（2016•天津）设x＞0，y∈R，则"x＞y"是"x＞|y|"的（　　）

A．充要条件 B．充分不必要条件

C．必要而不充分条件 D．既不充分也不必要条件

【分析】直接根据必要性和充分判断即可.

【解答】解：设x＞0，y∈R，当x=0，y=﹣1时，满足x＞y但不满足x＞|y|，故由x＞0，y∈R，则"x＞y"推不出"x＞|y|"，

而"x＞|y|"⇒"x＞y"，

故"x＞y"是"x＞|y|"的必要不充分条件，

故选：C.

【点评】本题考查了不等式的性质、充要条件的判定，考查了推理能力与计算能力，属于基础题.

6．（5分）（2016•天津）已知f（x）是定义在R上的偶函数，且在区间（﹣∞，0）上单调递增，若实数a满足f（$2^{|a-1|}$）＞f（$-\sqrt{2}$），则a的取值范围是（　　）

A．（﹣∞，$\frac{1}{2}$） B．（﹣∞，$\frac{1}{2}$）∪（$\frac{3}{2}$，+∞） C．（$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$） D．（$\frac{3}{2}$，+∞）

【分析】根据函数的对称性可知f（x）在（0，+∞）递减，故只需令$2^{|a-1|}<\sqrt{2}$即可.

【解答】解：∵f（x）是定义在R上的偶函数，且在区间（﹣∞，0）上单调递增，

∴f（x）在（0，+∞）上单调递减.

∵$2^{|a-1|}>0$，f（$-\sqrt{2}$）=f（$\sqrt{2}$），

∴$2^{|a-1|}<\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$.

∴$|a-1|<\frac{1}{2}$，

解得$\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$.

故选：C.

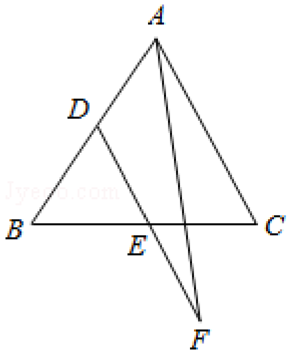
【点评】本题考查了函数的单调性，奇偶性的性质，属于中档题.

7．（5分）（2016•天津）已知△ABC是边长为1的等边三角形，点D、E分别是边AB、BC的中点，连接DE并延长到点F，使得DE=2EF，则$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}$的值为（　　）

A．$-\frac{5}{8}$ B．$\frac{1}{8}$ C．$\frac{1}{4}$ D．$\frac{11}{8}$

【分析】由题意画出图形，把$\overrightarrow{AF}$、$\overrightarrow{BC}$都用$\overrightarrow{BA}$、$\overrightarrow{BC}$表示，然后代入数量积公式得答案.

【解答】解：如图，



∵D、E分别是边AB、BC的中点，且DE=2EF，

$\therefore \overrightarrow{AF}\bullet\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF})\bullet\overrightarrow{BC}=(-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{DE})\bullet\overrightarrow{BC}$

$=(-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC})\bullet\overrightarrow{BC}=(-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{BA})\bullet\overrightarrow{BC}$

$=(-\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC})\bullet\overrightarrow{BC}=-\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}^2=-\frac{5}{4}|\overrightarrow{BA}|\bullet|\overrightarrow{BC}|\cos60°+\frac{3}{4}\times1^2$

$=-\frac{5}{4}\times1\times1\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{1}{8}$.

故选：B．

【点评】本题考查平面向量的数量积运算，考查向量加减法的三角形法则，是中档题．

8．（5分）（2016•天津）已知函数f（x）$=\sin^2\frac{\omega x}{2}+\frac{1}{2}\sin\omega x-\frac{1}{2}$（ω>0），x∈R，若f（x）在区间（π，2π）内没有零点，则ω的取值范围是（　　）

A．$(0,\frac{1}{8}]$ B．$(0,\frac{1}{4}]\cup[\frac{5}{8},1)$ C．$(0,\frac{5}{8}]$ D．$(0,\frac{1}{8}]\cup[\frac{1}{4},\frac{5}{8}]$

【分析】函数f（x）$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\omega x-\frac{\pi}{4})$，由f（x）=0，可得$\sin(\omega x-\frac{\pi}{4})=0$，解得$x=\frac{k\pi+\frac{\pi}{4}}{\omega}\notin(\pi,2\pi)$，因此$\omega\notin(\frac{1}{8},\frac{1}{4})\cup(\frac{5}{8},\frac{5}{4})\cup(\frac{9}{8},\frac{9}{4})\cup\ldots=(\frac{1}{8},\frac{1}{4})\cup(\frac{5}{8},+\infty)$，即可得出．

【解答】解：函数f（x）$=\sin^2\frac{\omega x}{2}+\frac{1}{2}\sin\omega x-\frac{1}{2}=\frac{1-\cos\omega x}{2}+\frac{1}{2}\sin\omega x-\frac{1}{2}=$
$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\omega x-\frac{\pi}{4})$，

由f（x）=0，可得$\sin(\omega x-\frac{\pi}{4})=0$，

解得$x=\frac{k\pi+\frac{\pi}{4}}{\omega}\notin(\pi,2\pi)$，

$\therefore\omega\notin(\frac{1}{8},\frac{1}{4})\cup(\frac{5}{8},\frac{5}{4})\cup(\frac{9}{8},\frac{9}{4})\cup\ldots=(\frac{1}{8},\frac{1}{4})\cup(\frac{5}{8},+\infty)$，

∵f（x）在区间（π，2π）内没有零点，

∴$\omega\in(0,\frac{1}{8}]\cup[\frac{1}{4},\frac{5}{8}]$.

故选：D.

【点评】本题考查了三角函数的图象与性质、不等式的解法，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

二、填空题本大题6小题，每题5分，共30分

9．（5分）（2016•天津）i是虚数单位，复数z满足（1+i）z=2，则z的实部为__1__.

【分析】把已知等式变形，然后利用复数代数形式的乘除运算化简得答案.

【解答】解：由（1+i）z=2，

得 $z=\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2(1-i)}{2}=1-i$，

∴z的实部为1.

故答案为：1.

【点评】本题考查复数代数形式的乘除运算，考查了复数的基本概念，是基础题.

10．（5分）（2016•天津）已知函数f（x）=（2x+1）e^x，f′（x）为f（x）的导函数，则f′（0）的值为__3__.

【分析】先求导，再带值计算.

【解答】解：∵f（x）=（2x+1）e^x，

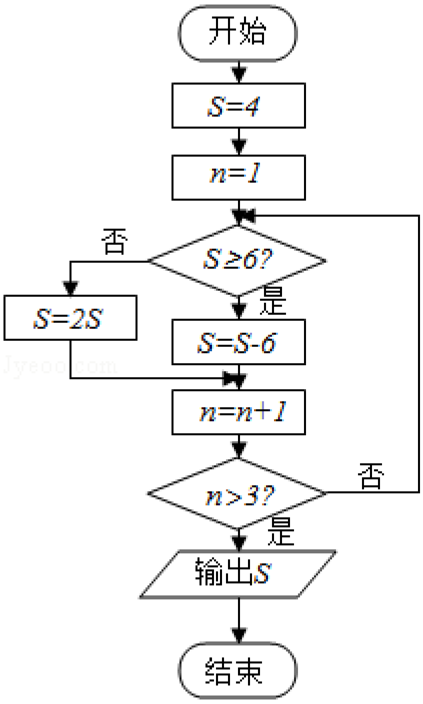
∴f′（x）=2e^x+（2x+1）e^x，

∴f′（0）=2e^0+（2×0+1）e^0=2+1=3.

故答案为：3.

【点评】本题考查了导数的运算法则，属于基础题.

11．（5分）（2016•天津）阅读如图所示的程序框图，运行相应的程序，则输出S的值为__4__.



【分析】根据循环结构，结合循环的条件，求出最后输出S的值．

【解答】解：第一次循环：S=8，n=2；

第二次循环：S=2，n=3；

第三次循环：S=4，n=4，

结束循环，输出S=4，

故答案为：4．

【点评】本题主要考查程序框图，循环结构，注意循环的条件，属于基础题．

12．（5分）（2016•天津）已知圆C的圆心在x轴正半轴上，点（0，$\sqrt{5}$）圆C上，且圆心到直线2x﹣y=0的距离为$\frac{4\sqrt{5}}{5}$，则圆C的方程为___（x﹣2）^{2}+y^2=9___．

【分析】由题意设出圆的方程，把点M的坐标代入圆的方程，结合圆心到直线的距离列式求解．

【解答】解：由题意设圆的方程为（x﹣a）^{2}+y^2=r^2（a＞0），

由点M（0，$\sqrt{5}$）在圆上，且圆心到直线2x﹣y=0的距离为$\frac{4\sqrt{5}}{5}$，

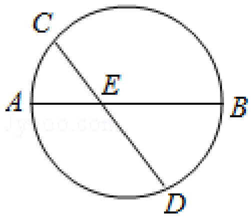
得$\begin{cases} a^2+5=r^2 \\ \frac{|2a|}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases}$，解得a=2，r=3．

∴圆C的方程为：（x﹣2）^{2}+y^2=9．

故答案为：（x﹣2）^{2}+y^2=9．

【点评】本题考查圆的标准方程，训练了点到直线的距离公式的应用，是中档题．

13．（5分）（2016•天津）如图，AB是圆的直径，弦CD与AB相交于点E，BE=2AE=2，BD=ED，则线段CE的长为__$\frac{2\sqrt{3}}{3}$__．



【分析】由BD=ED，可得△BDE为等腰三角形，过D作DH⊥AB于H，由相交弦定理求得DH，在Rt△DHE中求出DE，再由相交弦定理求得CE．

【解答】解：如图，

过D作DH⊥AB于H，

∵BE=2AE=2，BD=ED，

∴BH=HE=1，则AH=2，BH=1，

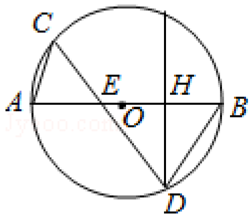
∴DH^2=AH•BH=2，则DH=$\sqrt{2}$，

在Rt△DHE中，则$DE=\sqrt{DH^2+HE^2}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$，

由相交弦定理可得：CE•DE=AE•EB，

$\therefore CE=\frac{AE\cdot EB}{DE}=\frac{1\times 2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$．

故答案为：$\frac{2\sqrt{3}}{3}$．



【点评】本题考查与圆有关的比例线段，考查相交弦定理的应用，是中档题．

14．（5分）（2016•天津）已知函数f（x）=$\begin{cases}x^2+(4a-3)x+3a, & x<0\\ \log_a(x+1)+1, & x\geq 0\end{cases}$（a>0，且a≠1）在R上单调递减，且关于x的方程|f（x）|=2－$\frac{x}{3}$恰有两个不相等的实数解，则a的取值范围是__$[\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$___．

【分析】由减函数可知f（x）在两段上均为减函数，且在第一段的最小值大于或等于第二段上的最大值，作出|f（x）|和y=2－$\frac{x}{3}$的图象，根据交点个数判断3a与2的大小关系，列出不等式组解出．

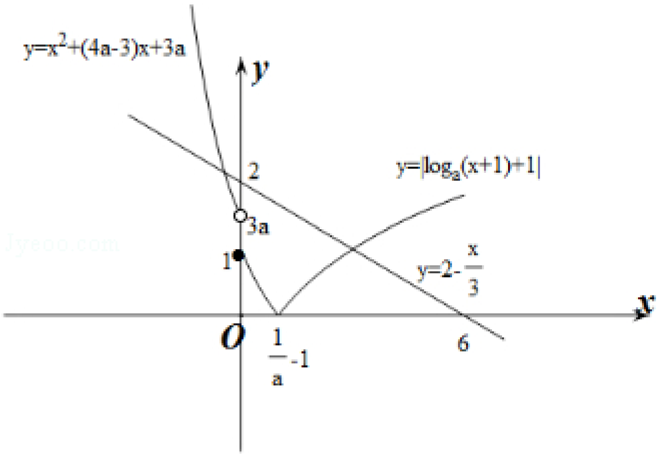
【解答】解：∵f（x）是R上的单调递减函数，

∴y=x^2+（4a－3）x+3a在（－∞．，0）上单调递减，y=$\log_a$（x+1）+1在（0，+∞）上单调递减，

且f（x）在（－∞，0）上的最小值大于或等于f（0）．

$\therefore\begin{cases}\dfrac{3-4a}{2}\geqslant 0\\ 0<a<1\\ 3a\geqslant 1\end{cases}$，解得$\frac{1}{3}\leq a\leq\frac{3}{4}$.

作出$y=|f(x)|$和$y=2-\frac{x}{3}$的函数草图如图所示：



$\because|f(x)|=2-\frac{x}{3}$恰有两个不相等的实数解，

$\therefore 3a<2$，即$a<\frac{2}{3}$.

综上，$\frac{1}{3}\leqslant a<\frac{2}{3}$.

故答案为$[\frac{1}{3}，\frac{2}{3})$．

【点评】本题考查了分段函数的单调性，函数零点的个数判断，结合函数函数图象判断端点值的大小是关键，属于中档题.

三、解答题：本大题共6小题，80分

15．（13分）（2016•天津）在△ABC中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，已知$a\sin 2B=\sqrt{3}b\sin A$.

（1）求B；

（2）已知$\cos A=\frac{1}{3}$，求sinC的值.

【分析】（1）利用正弦定理将边化角即可得出cosB；

（2）求出sinA，利用两角和的正弦函数公式计算.

【解答】解：（1）$\because a\sin 2B=\sqrt{3}b\sin A$，

$\therefore 2\sin A\sin B\cos B=\sqrt{3}\sin B\sin A$，

$\therefore\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore B=\frac{\pi}{6}$.

（2）$\because\cos A=\frac{1}{3}$，$\therefore\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

$\therefore \sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{6}+1}{6}$.

【点评】本题考查了正弦定理解三角形，两角和的正弦函数，属于基础题．

16．（13分）（2016•天津）某化工厂生产甲、乙两种混合肥料，需要A，B，C三种主要原料，生产1扯皮甲种肥料和生产1车皮乙种肥料所需三种原料的吨数如表所示：

原料 肥料	A	B	C
甲	4	8	3
乙	5	5	10

现有A种原料200吨，B种原料360吨，C种原料300吨，在此基础上生产甲、乙两种肥料．已知生产1车皮甲种肥料，产生的利润为2万元；生产1车品乙种肥料，产生的利润为3万元、分别用x，y表示计划生产甲、乙两种肥料的车皮数．

（1）用x，y列出满足生产条件的数学关系式，并画出相应的平面区域；

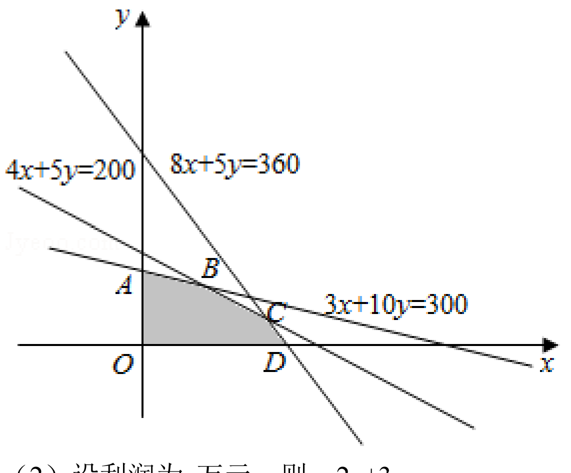
（2）问分别生产甲、乙两种肥料，求出此最大利润．

【分析】（1）根据原料的吨数列出不等式组，作出平面区域；

（2）令利润z=2x+3y，则$y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$，结合可行域找出最优解的位置，列方程组解出最优解．

【解答】解：（1）x，y满足的条件关系式为：$\begin{cases}4x+5y\leqslant 200\\8x+5y\leqslant 360\\3x+10y\leqslant 300\\x\geqslant 0\\y\geqslant 0\end{cases}$.

作出平面区域如图所示：



（2）设利润为z万元，则z=2x+3y．

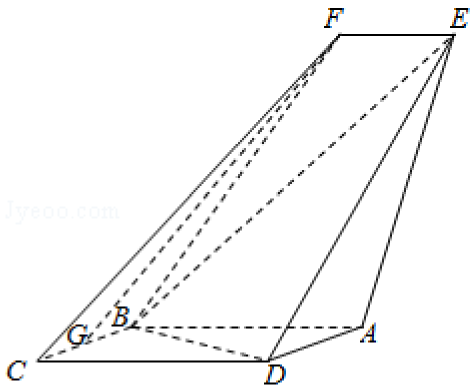
$\therefore y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$.

∴当直线$y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$经过点B时，截距$\frac{z}{3}$最大，即z最大．

解方程组$\begin{cases}4x+5y=200\\3x+10y=300\end{cases}$得B（20，24）．

∴z的最大值为2×20+3×24=112．
答：当生产甲种肥料20吨，乙种肥料24吨时，利润最大，最大利润为112万元．
【点评】本题考查了简单的线性规划的应用，抽象概括能力和计算求解能力，属于中档题．

17．（13分）（2016•天津）如图，四边形ABCD是平行四边形，平面AED⊥平面ABCD，EF∥AB，AB=2，DE=3，BC=EF=1，AE=$\sqrt{6}$，∠BAD=60°，G为BC的中点．
（1）求证：FG∥平面BED；
（2）求证：平面BED⊥平面AED；
（3）求直线EF与平面BED所成角的正弦值．



【分析】（1）利用中位线定理，和平行公理得到四边形OGEF是平行四边形，再根据线面平行的判定定理即可证明；
（2）根据余弦定理求出BD=$\sqrt{3}$，继而得到BD⊥AD，再根据面面垂直的判定定理即可证明；
（3）先判断出直线EF与平面BED所成的角即为直线AB与平面BED所形成的角，再根据余弦定理和解直角三角形即可求出答案．
【解答】证明：（1）BD的中点为O，连接OE，OG，在△BCD中，
∵G是BC的中点，
∴OG∥DC，且OG=$\frac{1}{2}$DC=1，
又∵EF∥AB，AB∥DC，
∴EF∥OG，且EF=0G，
即四边形OGEF是平行四边形，
∴FG∥OE，
∵FG⊄平面BED，OE⊂平面BED，
∴FG∥平面BED；
（2）证明：在△ABD中，AD=1，AB=2，∠BAD=60°，
由余弦定理可得BD=$\sqrt{3}$，仅而∠ADB=90°，
即BD⊥AD，
又∵平面AED⊥平面ABCD，
BD⊂平面ABCD，平面AED∩平面ABCD=AD，
∴BD⊥平面AED，
∵BD⊂平面BED，
∴平面BED⊥平面AED．

（Ⅲ）∵EF∥AB，

∴直线EF与平面BED所成的角即为直线AB与平面BED所形成的角，

过点A作AH⊥DE于点H，连接BH，

又平面BED∩平面AED=ED，

由（2）知AH⊥平面BED，

∴直线AB与平面BED所成的角为∠ABH，

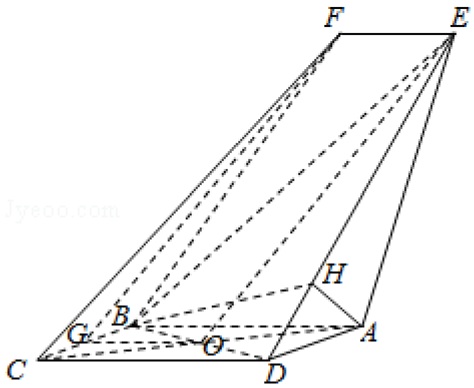
在△ADE，AD=1，DE=3，AE=$\sqrt{6}$，由余弦定理得cos∠ADE=$\frac{2}{3}$，

∴sin∠ADE=$\frac{\sqrt{5}}{3}$，

∴AH=AD•$\frac{\sqrt{5}}{3}$，

在Rt△AHB中，sin∠ABH=$\frac{AH}{AB}$=$\frac{\sqrt{5}}{6}$，

∴直线EF与平面BED所成角的正弦值$\frac{\sqrt{5}}{6}$



【点评】本题考查了直线与平面的平行和垂直，平面与平面的垂直，直线与平面所成的角，考查了空间想象能力，运算能力和推理论证能力，属于中档题．

18．（13分）（2016•天津）已知$\{a_n\}$是等比数列，前n项和为S_n（$n\in N^*$），且$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}=\frac{2}{a_3}$，$S_6=63$．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若对任意的$n\in N^*$，b_n是$\log_2a_n$和$\log_2a_{n+1}$的等差中项，求数列$\{(-1)^n b_n^2\}$的前2n项和．

【分析】（1）根据等比数列的通项公式列方程解出公比q，利用求和公式解出a_1，得出通项公式；

（2）利用对数的运算性质求出b_n，使用分项求和法和平方差公式计算．

【解答】解：（1）设$\{a_n\}$的公比为q，则$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1q}=\frac{2}{a_1q^2}$，即$1-\frac{1}{q}=\frac{2}{q^2}$，

解得q=2或q=－1．

若$q=-1$，则$S_6=0$，与$S_6=63$矛盾，不符合题意．$\therefore q=2$，

$\therefore S_6=\dfrac{a_1(1-2^6)}{1-2}=63$，$\therefore a_1=1$．

$\therefore a_n=2^{n-1}$．

（2）$\because b_n$是$\log_2a_n$和$\log_2a_{n+1}$的等差中项，

$\therefore b_n=\dfrac{1}{2}(\log_2a_n+\log_2a_{n+1})=\dfrac{1}{2}(\log_22^{n-1}+\log_22^n)=n-\dfrac{1}{2}$．

$\therefore b_{n+1}-b_n=1$．

$\therefore\{b_n\}$是以$\dfrac{1}{2}$为首项，以1为公差的等差数列．

设$\{(-1)^nb_n^2\}$的前n项和为T_n，则

$T_n=(-b_1^2+b_2^2)+(-b_3^2+b_4^2)+\ldots+(-b_{2n-1}^2+b_{2n}^2)$

$=b_1+b_2+b_3+b_4\ldots+b_{2n-1}+b_{2n}$

$=\dfrac{b_1+b_{2n}}{2}\cdot 2n=\dfrac{\frac{1}{2}+2n-\frac{1}{2}}{2}\cdot 2n$

$=2n^2$．

【点评】本题考查了等差数列，等比数列的性质，分项求和的应用，属于中档题．

19．（14分）（2016•天津）设椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{3}=1$（$a>\sqrt{3}$）的右焦点为F，右顶点为A，已知$\dfrac{1}{|OF|}+\dfrac{1}{|OA|}=\dfrac{3e}{|FA|}$，其中O为原点，e为椭圆的离心率．

（1）求椭圆的方程；

（2）设过点A的直线l与椭圆交于B（B不在x轴上），垂直于l的直线与l交于点M，与y轴交于点H，若BF⊥HF，且∠MOA=∠MAO，求直线l的斜率．

【分析】（1）由题意画出图形，把|OF|、|OA|、|FA|代入$\dfrac{1}{|OF|}+\dfrac{1}{|OA|}=\dfrac{3e}{|FA|}$，转化为关于a的方程，解方程求得a值，则椭圆方程可求；

（2）由已知设直线l的方程为$y=k(x-2)$，（$k\neq0$），联立直线方程和椭圆方程，化为关于x的一元二次方程，利用根与系数的关系求得B的坐标，再写出MH所在直线方程，求出H的坐标，由BF⊥HF，得$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{HF}=(1-x_1,\ -y_1)\cdot(1,\ -y_H)=0$，整理得到M的坐标与k的关系，由∠MOA=∠MAO，得到$x_0=1$，转化为关于k的等式求得k的值．

【解答】解：（1）由$\dfrac{1}{|OF|}+\dfrac{1}{|OA|}=\dfrac{3e}{|FA|}$，

得$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-3}}+\dfrac{1}{a}=\dfrac{3\cdot\frac{\sqrt{a^2-3}}{a}}{a-\sqrt{a^2-3}}$，

即$\frac{a+\sqrt{a^2-3}}{a\cdot\sqrt{a^2-3}}=\frac{3\sqrt{a^2-3}}{a(a-\sqrt{a^2-3})}$，

∴$a[a^2-(a^2-3)]=3a(a^2-3)$，解得$a=2$．

∴椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

（2）由已知设直线l的方程为$y=k(x-2)$，（$k\neq0$），

设$B(x_1, y_1)$，$M(x_0, k(x_0-2))$，

∵$\angle MOA=\angle MAO$，

∴$x_0=1$，

再设$H(0, y_H)$，

联立$\begin{cases} y=k(x-2) \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，得$(3+4k^2)x^2-16k^2x+16k^2-12=0$．

$\triangle=(-16k^2)^2-4(3+4k^2)(16k^2-12)=144>0$．

由根与系数的关系得$2x_1=\frac{16k^2-12}{3+4k^2}$，

∴$x_1=\frac{8k^2-6}{3+4k^2}$，$y_1=k(x_1-2)=\frac{-12k}{3+4k^2}$，

MH所在直线方程为$y-k(x_0-2)=-\frac{1}{k}(x-x_0)$，

令$x=0$，得$y_H=(k+\frac{1}{k})x_0-2k$，

∵$BF\perp HF$，

∴$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{HF}=(1-x_1, -y_1)\cdot(1, -y_H)=0$，

即$1-x_1+y_1y_H=1-\frac{8k^2-6}{3+4k^2}-\frac{12k}{3+4k^2}[(k+\frac{1}{k})x_0-2k]=0$，

整理得：$x_0=\frac{9+20k^2}{12(k^2+1)}=1$，即$8k^2=3$．

∴$k=-\frac{\sqrt{6}}{4}$或$k=\frac{\sqrt{6}}{4}$．

【点评】本题考查椭圆方程的求法，考查直线与椭圆位置关系的应用，体现了“整体运算”思想方法和“设而不求”的解题思想方法，考查运算能力，是难题．

20．（14分）（2016•天津）设函数$f(x)=x^3-ax-b$，$x\in R$，其中a，$b\in R$．

（1）求$f(x)$的单调区间；

（2）若$f(x)$存在极值点x_0，且$f(x_1)=f(x_0)$，其中$x_1\neq x_0$，求证：$x_1+2x_0=0$；

（3）设$a>0$，函数$g(x)=|f(x)|$，求证：$g(x)$在区间$[-1,1]$上的最大值不小于$\frac{1}{4}$

.

【分析】（1）求出$f(x)$的导数，讨论$a\le0$时$f'(x)\ge0$，$f(x)$在R上递增；当$a>0$时，由导数大于0，可得增区间；导数小于0，可得减区间；

（2）由条件判断出$a>0$，且$x_0\ne0$，由$f'(x_0)=0$求出x_0，分别代入解析式化简$f(x_0)$，$f(-2x_0)$，化简整理后可得证；

（3）设$g(x)$在区间$[-1,1]$上的最大值M，根据极值点与区间的关系对a分三种情况讨论，运用$f(x)$单调性和前两问的结论，求出$g(x)$在区间上的取值范围，利用a的范围化简整理后求出M，再利用不等式的性质证明结论成立.

【解答】解：（1）若$f(x)=x^3-ax-b$，则$f'(x)=3x^2-a$，

分两种情况讨论：

①、当$a\le0$时，有$f'(x)=3x^2-a\ge0$恒成立，

此时$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,+\infty)$，

②、当$a>0$时，令$f'(x)=3x^2-a=0$，解得$x=-\frac{\sqrt{3a}}{3}$或$x=\frac{\sqrt{3a}}{3}$，

当$x>\frac{\sqrt{3a}}{3}$或$x<-\frac{\sqrt{3a}}{3}$时，$f'(x)=3x^2-a>0$，$f(x)$为增函数，

当$-\frac{\sqrt{3a}}{3}<x<\frac{\sqrt{3a}}{3}$时，$f'(x)=3x^2-a<0$，$f(x)$为减函数，

故$f(x)$的增区间为$(-\infty,-\frac{\sqrt{3a}}{3})$，$(\frac{\sqrt{3a}}{3},+\infty)$，减区间为$(-\frac{\sqrt{3a}}{3},\frac{\sqrt{3a}}{3})$；

（2）若$f(x)$存在极值点x_0，则必有$a>0$，且$x_0\ne0$，

由题意可得，$f'(x)=3x^2-a$，则$x_0^2=\frac{a}{3}$，

进而$f(x_0)=x_0^3-ax_0-b=-\frac{2a}{3}x_0-b$，

又$f(-2x_0)=-8x_0^3+2ax_0-b=-\frac{8}{3}x_0+2ax_0-b=f(x_0)$，

由题意及（Ⅰ）可得：存在唯一的实数x_1，满足$f(x_1)=f(x_0)$，其中$x_1\ne x_0$，

则有$x_1=-2x_0$，故有$x_1+2x_0=0$；

（Ⅲ）设$g(x)$在区间$[-1,1]$上的最大值M，$\max\{x,y\}$表示x、y两个数的最大值，

下面分三种情况讨论：

①当$a\ge3$时，$-\frac{\sqrt{3a}}{3}\le-1<1\le\frac{\sqrt{3a}}{3}$，

由（I）知$f(x)$在区间$[-1,1]$上单调递减，

所以$f(x)$在区间$[-1,1]$上的取值范围是$[f(1),f(-1)]$，

因此$M=\max\{|f(1)|,|f(-1)|\}=\max\{|1-a-b|,|-1+a-b|\}$

$=\max\{|a-1+b|,|a-1-b|\}=\begin{cases}a-1+b, & b\geqslant0\\ a-1-b, & b<0\end{cases}$，

所以$M=a-1+|b|\ge2$

②当$\frac{3}{4}\leqslant a<3$时，$-\frac{2\sqrt{3a}}{3}\leqslant-1<-\frac{\sqrt{3a}}{3}<\frac{\sqrt{3a}}{3}<1\leqslant\frac{2\sqrt{3a}}{3}$，

由（Ⅰ）、（Ⅱ）知，$f(-1)\ge f(-\frac{2\sqrt{3a}}{3})=f(\frac{\sqrt{3a}}{3})$，$f(1)\le f(\frac{2\sqrt{3a}}{3})=$

$f(-\frac{\sqrt{3a}}{3})$，

所以f（x）在区间[﹣1，1]上的取值范围是$[f(\frac{\sqrt{3a}}{3}),f(-\frac{\sqrt{3a}}{3})]$，

因此$M=\max\{|f(\frac{\sqrt{3a}}{3})|,|f(-\frac{\sqrt{3a}}{3})|\}=\max\{|-\frac{2a}{9}\sqrt{3a}-b|,|\frac{2a}{9}\sqrt{3a}-b|\}$

$=\max\{|\frac{2a}{9}\sqrt{3a}+b|,|\frac{2a}{9}\sqrt{3a}-b|\}=\frac{2a}{9}\sqrt{3a}+|b|\geqslant\frac{2}{9}\times\frac{3}{4}\times\sqrt{3\times\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}$，

③当$0<a<\frac{3}{4}$时，$-1<-\frac{2\sqrt{3a}}{3}<\frac{2\sqrt{3a}}{3}<1$，

由（Ⅰ）、（Ⅱ）知，$f(-1)<f(-\frac{2\sqrt{3a}}{3})=f(\frac{\sqrt{3a}}{3})$，$f(1)>f(\frac{2\sqrt{3a}}{3})=$

$f(-\frac{\sqrt{3a}}{3})$，

所以f（x）在区间[﹣1，1]上的取值范围是[f（﹣1），f（1）]，

因此$M=\max\{|f(-1)|,|f(1)|\}=\max\{|-1+a-b|,|1-a-b|\}$

$=\max\{|1-a+b|,|1-a-b|\}=1-a+|b|>\frac{1}{4}$，

综上所述，当a＞0时，g（x）在区间[﹣1，1]上的最大值不小于$\frac{1}{4}$.

【点评】本题考查导数的运用：求单调区间和最值，不等式的证明，注意运用分类讨论的思想方法和转化思想，考查分析法在证明中的应用，以及化简整理、运算能力，属于难题.