绝密★启用前

2021年普通高等学校招生全国统一考试（甲卷）

理科数学

注意事项:

1．答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．

2．回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号．回答非选择题时,将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．

3．考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回．

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

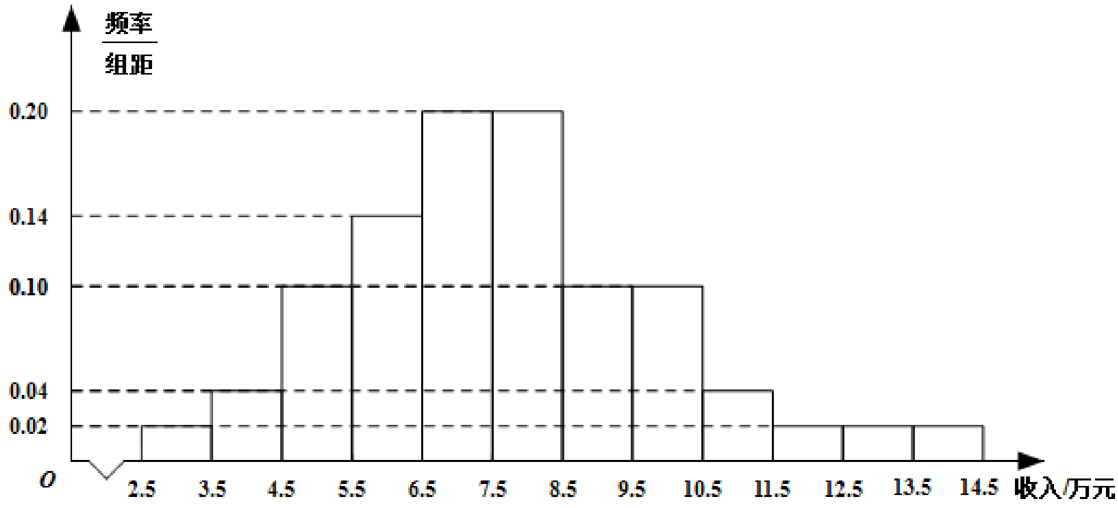
1. 设集合 $M=\left\{x\middle|0<x<4\right\}, N=\left\{x\middle|\frac{1}{3}\le x\le 5\right\}$，则 $M\cap N=$（　）

A. $\left\{x\middle|0<x\le\frac{1}{3}\right\}$　　B. $\left\{x\middle|\frac{1}{3}\le x<4\right\}$

C. $\left\{x\middle|4\le x<5\right\}$　　D. $\left\{x\middle|0<x\le 5\right\}$

2.

为了解某地农村经济情况，对该地农户家庭年收入进行抽样调查，将农户家庭年收入的调查数据整理得到如下频率分布直方图：



根据此频率分布直方图，下面结论中不正确的是（　）

A. 该地农户家庭年收入低于4.5万元的农户比率估计为6%

B. 该地农户家庭年收入不低于10.5万元的农户比率估计为10%

C. 估计该地农户家庭年收入的平均值不超过6.5万元

D. 估计该地有一半以上的农户，其家庭年收入介于4.5万元至8.5万元之间

3. 已知 $(1-i)^2z=3+2i$，则 $z=$（　）

A. $-1-\frac{3}{2}i$　　B. $-1+\frac{3}{2}i$　　C. $-\frac{3}{2}+i$　　D. $-\frac{3}{2}-i$

4.

青少年视力是社会普遍关注的问题，视力情况可借助视力表测量．通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据，五分记录法的数据L和小数记录表的数据V的满足 $L=5+\lg V$．已知某同学视力的五分记录法的数据为4.9，则其视力的小数记录法的数据为（　）（$\sqrt[10]{10}\approx1.259$）

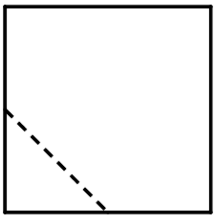
A. 1.5　　B. 1.2　　C. 0.8　　D. 0.6

5. 已知 F_1,F_2 是双曲线C的两个焦点，P为C上一点，且 $\angle F_1PF_2=60^\circ,|PF_1|=3|PF_2|$，则$C$的离心率为（
）

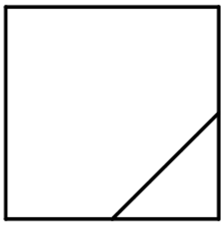
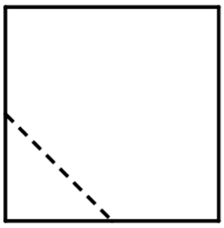
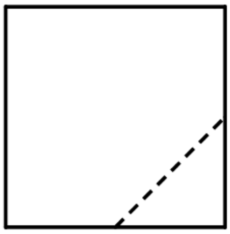
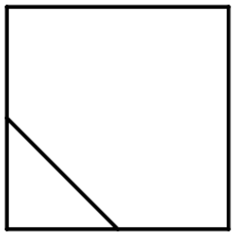
A. $\frac{\sqrt{7}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{13}}{2}$　　C. $\sqrt{7}$　　D. $\sqrt{13}$

6.

在一个正方体中，过顶点A的三条棱的中点分别为E，F，G．该正方体截去三棱锥$A-EFG$后，所得多面体的三视图中，正视图如图所示，则相应的侧视图是（ ）



正视图

A.  B.  C.  D. 

7. 等比数列$\left\{a_n\right\}$的公比为q，前n项和为S_n，设甲：$q>0$，乙：$\left\{S_n\right\}$是递增数列，则（　）

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

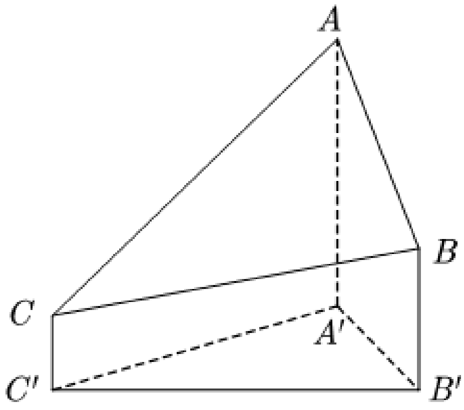
B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

8.

2020年12月8日，中国和尼泊尔联合公布珠穆朗玛峰最新高程为8848.86（单位：m），三角高程测量法是珠峰高程测量方法之一．如图是三角高程测量法的一个示意图，现有A，B，C三点，且A，B，C在同一水平面上的投影A',B',C'满足$\angle A'C'B'=45°$，$\angle A'B'C'=60°$．由C点测得B点的仰角为$15°$，BB'与CC'的差为100；由B点测得A点的仰角为$45°$，则A，C两点到水平面$A'B'C'$的高度差$AA'-CC'$约为（$\sqrt{3}\approx 1.732$）（　）



A. 346　　B. 373　　C. 446　　D. 473

9. 若$\alpha \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right),\tan 2\alpha = \frac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$，则$\tan\alpha =$（　）

A. $\frac{\sqrt{15}}{15}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{15}}{3}$

10. 将4个1和2个0随机排成一行，则2个0不相邻的概率为（　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{4}{5}$

11.

已知A，B，C是半径为1的球O的球面上的三个点，且$AC \perp BC, AC = BC = 1$，则三棱锥$O-ABC$的体积为（　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{12}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{12}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

12. 设函数$f\left(x\right)$的定义域为$\mathbf{R}$，$f\left(x+1\right)$为奇函数，$f\left(x+2\right)$为偶函数，当$x \in \left[1,2\right]$时，

$f(x) = ax^2 + b$．若$f\left(0\right) + f\left(3\right) = 6$，则$f\left(\frac{9}{2}\right) =$（　）

A. $-\frac{9}{4}$　　B. $-\frac{3}{2}$　　C. $\frac{7}{4}$　　D. $\frac{5}{2}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13. 曲线$y = \frac{2x-1}{x+2}$在点$\left(-1,-3\right)$处的切线方程为________．

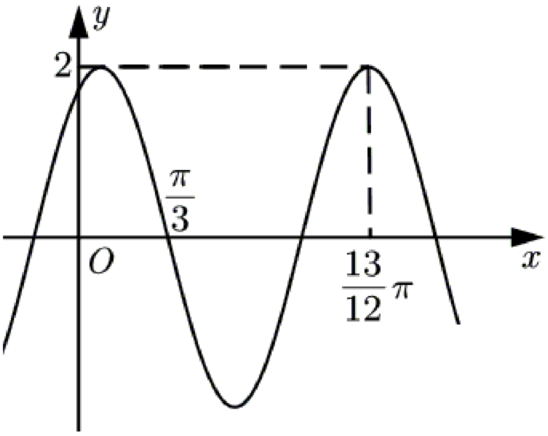
14. 已知向量$\vec{a} = \left(3,1\right), \vec{b} = \left(1,0\right), \vec{c} = \vec{a} + k\vec{b}$．若$\vec{a} \perp \vec{c}$，则$k =$________．

15. 已知F_1, F_2为椭圆C：$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$的两个焦点，$P$，$Q$为$C$上关于坐标原点对称的两点，且

$\left|PQ\right|=\left|F_1F_2\right|$，则四边形$PF_1QF_2$的面积为________.

16. 已知函数$f\left(x\right)=2\cos(\omega x+\varphi)$的部分图像如图所示，则满足条件

$\left(f(x)-f\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\right)\left(f(x)-f\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)>0$的最小正整数$x$为________.



三、解答题：共70分．解答应写出交字说明、证明过程或演算步骤，第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答．第22、23题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共60分．

17.

甲、乙两台机床生产同种产品，产品按质量分为一级品和二级品，为了比较两台机床产品的质量，分别用两台机床各生产了200件产品，产品的质量情况统计如下表：

	一级品	二级品	合计
甲机床	150	50	200
乙机床	120	80	200
合计	270	130	400

（1）甲机床、乙机床生产的产品中一级品的频率分别是多少?

（2）能否有99%的把握认为甲机床的产品质量与乙机床的产品质量有差异?

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P\left(K^2\geq k\right)$	0.050	0.010	0.001

k	3.841	6.635	10.828

18.

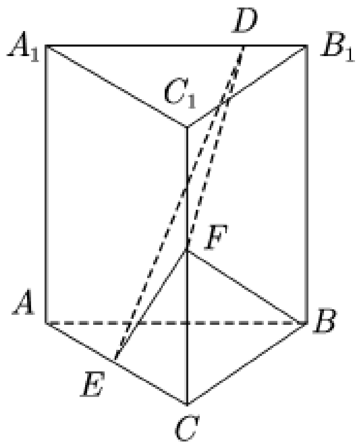
已知数列$\left\{a_n\right\}$的各项均为正数，记S_n为$\left\{a_n\right\}$的前n项和，从下面①②③中选取两个作为条件，证明另外一个成立.

①数列$\left\{a_n\right\}$是等差数列：②数列$\left\{\sqrt{S_n}\right\}$是等差数列；③$a_2=3a_1$.

注：若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分.

19.

已知直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，侧面AA_1B_1B为正方形，$AB=BC=2$，E，F分别为AC和CC_1的中点，D为棱A_1B_1上的点．$BF\perp A_1B_1$



（1）证明：$BF\perp DE$；

（2）当B_1D为何值时，面BB_1C_1C与面DFE所成的二面角的正弦值最小?

20. 抛物线C的顶点为坐标原点O．焦点在x轴上，直线l：$x=1$交C于P，Q两点，且$OP\perp OQ$．已知点$M\left(2,0\right)$，且$\odot M$与l相切.

（1）求C，$\odot M$的方程；

（2）设A_1,A_2,A_3是C上的三个点，直线A_1A_2，A_1A_3均与$\odot M$相切．判断直线A_2A_3与$\odot M$的位置关系，并说明理由.

21. 已知$a>0$且$a\neq 1$，函数$f(x)=\dfrac{x^a}{a^x}(x>0)$.

（1）当 $a=2$ 时，求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）若曲线 $y=f\left(x\right)$ 与直线 $y=1$ 有且仅有两个交点，求a的取值范围.

（二）选考题：共10分．请考生在第22、23题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．

[选修4-4：坐标系与参数方程]（10分）

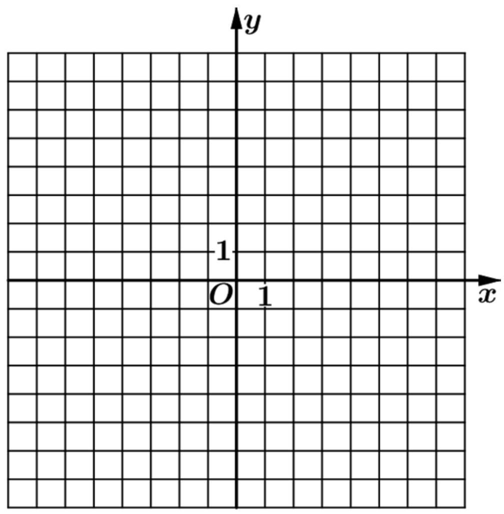
22. 在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线C的极坐标方程为 $\rho=2\sqrt{2}\cos\theta$.

（1）将C的极坐标方程化为直角坐标方程；

（2）设点A的直角坐标为 $\left(1,0\right)$，M为C上的动点，点P满足 $\overrightarrow{AP}=\sqrt{2}\,\overrightarrow{AM}$，写出$P$的轨迹 C_1 的参数方程，并判断C与 C_1 是否有公共点.

[选修4-5：不等式选讲]（10分）

23. 已知函数 $f(x)=\left|x-2\right|,g(x)=\left|2x+3\right|-\left|2x-1\right|$.



（1）画出 $y=f\left(x\right)$ 和 $y=g\left(x\right)$ 的图像；

（2）若 $f\left(x+a\right)\ge g\left(x\right)$，求$a$的取值范围.