2014 年普通高等学校招生全国统一考试（辽宁卷）

理科数学

第 I 卷（共 60 分）

一、选择题：本大题共 12 个小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知全集 $U=R, A=\{x\mid x\le 0\}, B=\{x\mid x\ge 1\}$，则集合 $C_U(A\cup B)=$（　　）

A．$\{x\mid x\ge 0\}$　B．$\{x\mid x\le 1\}$　C．$\{x\mid 0\le x\le 1\}$　D．$\{x\mid 0<x<1\}$

【答案】D

【解析】

试题分析：因为 $A\cup B=\{x|x\le 0$ 或 $x\ge 1\}$，学科网所以 $C_U(A\cup B)=\{x\mid 0<x<1\}$，故选 D.

考点：集合的运算.

2.设复数 z 满足 $(z-2i)(2-i)=5$，则 $z=$（　　）

A．$2+3i$　B．$2-3i$　C．$3+2i$　D．$3-2i$

【答案】A

【解析】

试题分析：因为 $z=\dfrac{5}{(2-i)}+2i\ \therefore z=2+3i$，故选 A.

考点：复数的运算.

3.已知 $a=2^{-\frac{1}{3}}$，$b=\log_2\dfrac{1}{3}, c=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3}$，则（　　）

A．$a>b>c$　B．$a>c>b$　C．$c>a>b$　D．$c>b>a$

【答案】C

【解析】

试题分析：$0<a=2^{-\frac{1}{3}}<2^0=1, b=\log_2\dfrac{1}{3}<0, c=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3}=\log_2 3>1$, 所以 $c>a>b$，故选 C.

考点：1.指数对数化简；2.不等式大小比较.

4.已知 m，n 表示两条不同直线，α 表示平面，下列说法正确的是（　　）

A．若 $m//\alpha,n//\alpha$,则 $m//n$.　　　B．若 $m\perp\alpha$，$n\subset\alpha$，则 $m\perp n$

C．若 $m\perp\alpha$，$m\perp n$，则 $n//\alpha$　　D．若 $m//\alpha$，$m\perp n$，则 $n\perp\alpha$

【答案】B

【解析】

试题分析：若 A．若 $m//\alpha,n//\alpha$,则 m 与 n 可能平行、相交、异面，故 A 错误；B．若 $m\perp\alpha$，$n\subset\alpha$，则 $m\perp n$，显然成立；C．若 $m\perp\alpha$，$m\perp n$，则 $n//\alpha$ 或 $n\subset\alpha$ 故 C 错误；D．若 $m//\alpha$，$m\perp n$，则 $n\perp\alpha$ 或 $n//\alpha$ 或 n 与 α 相交.

考点：1.命题的真假；2.线面之间的位置关系.

5.设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 是非零向量，已知命题 P：若 $\vec{a}\bullet\vec{b}=0$，$\vec{b}\bullet\vec{c}=0$，则 $\vec{a}\bullet\vec{c}=0$；命题 q：若 $\vec{a}//\vec{b},\vec{b}//\vec{c}$，则 $\vec{a}//\vec{c}$，则下列命题中真命题是（　　）

A.　$p\vee q$　　B．$p\wedge q$　C．$(\neg p)\wedge(\neg q)$.　D．$p\vee(\neg q)$

【答案】A

【解析】

试题分析：由题意可知，命题 P 是假命题；命题 q 是真命题，故 $p\vee q$ 为真命题.

考点：命题的真假.

6.6 把椅子摆成一排，3 人随机就座，任何两人不相邻的做法种数为（　　）

A．144　　B．120　　C．72　　D．24

【答案】C

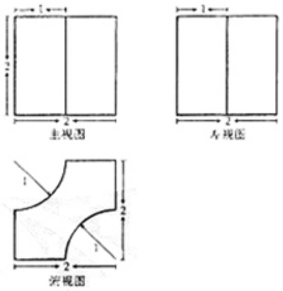
【解析】

试题分析：如图，将 6 把椅子依次编号为 1,2,3,4,5,6，故任何两人不相邻的做法，可安排："1,3,5"；"1,3,6"；"1,4,6"；"2,4,6" 号位置做热坐人，故总数由 $4\cdot A_3^3=24$，故选 D.

考点：排列组合.

7.某几何体三视图如图所示，则该几何体的体积为（　　）

A．$8-2\pi$　　B．$8-\pi$　　C．$8-\dfrac{\pi}{2}$　　D．$8-\dfrac{\pi}{4}$



【答案】B

【解析】

试题分析：由三视图可知，该几何体的直观图是棱长为 2 的正方体，分别在两个对角截去了底面半径为 1，高为 2 的圆柱的四分之一，故该几何体的体积为：$2^3-2\times\frac{1}{4}\times\pi\times 2=8-\pi$.

考点：1.三视图；2.柱体的体积公式.

8.设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，若数列$\{2^{a_1a_n}\}$为递减数列，则（　　）

A．$d<0$　　B．$d>0$　　C．$a_1d<0$　　D．$a_1d>0$

【答案】C

【解析】

试题分析：因为$\{a_n\}$是等差数列，则 $a_n=a_1+(n-1)d$ $\therefore 2^{a_1a_n}=2^{a_1^2+a_1(n-1)d}$，又由于$\{2^{a_1a_n}\}$为递减数列，所以$\frac{2^{a_1a_n}}{2^{a_1a_{n+1}}}=2^{-a_1d}>1=2^0$ $\therefore a_1d<0$，故选 C.

考点：1.等差数列的概念；2.递减数列.

9.将函数 $y=3\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{2}$个单位长度，所得图象对应的函数（　　）

A．在区间$[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}]$上单调递减

B．在区间$[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}]$上单调递增

C．在区间$[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$上单调递减

D．在区间$[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$上单调递增

【答案】B

【解析】

试题分析：将函数 $y=3\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，所得图象对应的函数解析式为

$y=3\sin(2x-\frac{2\pi}{3})$，令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{2\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in z$，即 $y=3\sin(2x-\frac{2\pi}{3})$ 的增区间

为 $[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi],\ k\in z$，令 $k=0$，则可知 B 学科网正确.

考点：函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的性质.

10.已知点 $A(-2,3)$ 在抛物线 C：$y^2=2px$ 的准线上，过点 A 的直线与 C 在第一象限相切于点 B，记 C 的焦点为 F，则直线 BF 的斜率为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　*B*．$\frac{2}{3}$　　*C*．$\frac{3}{4}$　　*D*．$\frac{4}{3}$

【答案】*D*

【解析】

试题分析：由于点 $A(-2,3)$ 在抛物线 C：$y^2=2px$ 的准线上，所以 $-\frac{p}{2}=-2\therefore p=4\therefore y^2=8x$，设直线 AB 的方程为 $x=k(y-3)-2......(*)$，将 $(*)$ 与 $y^2=8x$ 联立，即

$\begin{cases}x=k(y-3)-2\\ y^2=8x\end{cases}\Rightarrow y^2-8ky+24k+16=0......(\otimes)$，则 $\triangle=64k^2-96k-64=0\therefore k=2$（负值舍去），将 $k=2$ 代入 $(\otimes)$ 得 $y=8$，即可求出 $x=8$，故 B（8,8），所以 $k_{BF}=\frac{8-0}{8-2}=\frac{4}{3}$，故选 *D*.

考点：1.直线与抛物线的位置关系；2.斜率公式.

11.当 $x\in[-2,1]$ 时，不等式 $ax^3-x^2+4x+3\ge 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$[-5,-3]$　　*B*．$[-6,-\frac{9}{8}]$　　*C*．$[-6,-2]$　　*D*．$[-4,-3]$

【答案】*C*

【解析】

试题分析：当 $x=0$ 时，原式恒成立；

当 $x\in(0,1]$ 时，原式等价于 $a\ge(\frac{x^2-4x-3}{x^3})_{\max}$ 恒成立；

当 $x\in[-2,0)$ 时，原式等价于 $a\le(\frac{x^2-4x-3}{x^3})_{\min}$ 恒成立；

令 $f(x)=\frac{x^2-4x-3}{x^3},x\in[-2,0)\cup(0,1]$，$\because f(x)=\frac{x^2-4x-3}{x^3}=\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}-\frac{3}{x^3}$，令 $t=\frac{1}{x}$，即 $y=-3t^3-4t^2+t$，$\therefore y'=-9t^2-8t+1$，可知 $(-1,\frac{1}{9})$ 为 y 的学科网增区间，$(-\infty,-1),(\frac{1}{9},+\infty)$ 为 y 的减区间，所以当 $x\in(0,1]$ 时，即 $t\in[1,+\infty)$ 时，$t=1$ 时 $y_{\max}=-6$，即 $f(x)_{\max}=-6\therefore a\ge-6$；当 $x\in[-2,0)$ 时，即 $t\in(-\infty,-\frac{1}{2})$ 时，y 在 $(-\infty,-1)$ 上递减，在 $(-1,-\frac{1}{2}]$ 上递增，所以 $t=-1$ 时 $y_{\min}=-2$，即 $f(x)_{\min}=-2\therefore a\le-2$；综上，可知 a 的取值范围是 $[-6,-2]$，故选 C.

考点：不等式恒成立问题.

12.已知定义在 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)$ 满足：

① $f(0)=f(1)=0$；

②对所有 $x,y\in[0,1]$，且 $x\ne y$，有 $|f(x)-f(y)|<\frac{1}{2}|x-y|$.

若对所有 $x,y\in[0,1]$，$|f(x)-f(y)|<k$，则 k 的最小值为（　　）

$A.\ \frac{1}{2}$　　$B.\ \frac{1}{4}$　　$C.\ \frac{1}{2\pi}$　　$D.\ \frac{1}{8}$

【答案】B

【解析】

试题分析：不妨令 $0\le x<y\le1$，则 $|f(x)-f(y)|<\frac{1}{2}|x-y|$

法一：$2|f(x)-f(y)|=|f(x)-f(0)+f(x)-f(y)-[f(y)-f(1)]|$

$\le|f(x)-f(0)|+|f(x)-f(y)|+|f(y)-f(1)|$

$<\frac{1}{2}|x-0|+\frac{1}{2}|x-y|+\frac{1}{2}|y-1|=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(y-x)+\frac{1}{2}(y-1)=\frac{1}{2}$，

即得 $|f(x)-f(y)|<\frac{1}{4}$，

另一方面，当 $u\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$f(x)=\begin{cases}ux & ,0\le x\le\frac{1}{2}\\ -u(1-x), & \frac{1}{2}<x\le 1\end{cases}$，符合题意，

当 $u\to\frac{1}{2}$ 时，$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)\right|=\frac{u}{2}\to\frac{1}{4}$，

故 $k\le\frac{1}{4}$

法二：当 $x-y\le\frac{1}{2}$ 时，$|f(x)-f(y)|<\frac{1}{2}|x-y|\le\frac{1}{4}$，

当 $x-y>\frac{1}{2}$ 时，$|f(x)-f(y)|=|[f(x)-f(0)]-[f(y)-f(1)]|$

$\le|f(x)-f(1)|+|f(y)-f(0)|<\frac{1}{2}|x-0|+\frac{1}{2}|y-1|=\frac{1}{2}(1-x)+\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(y-x)<\frac{1}{4}$，

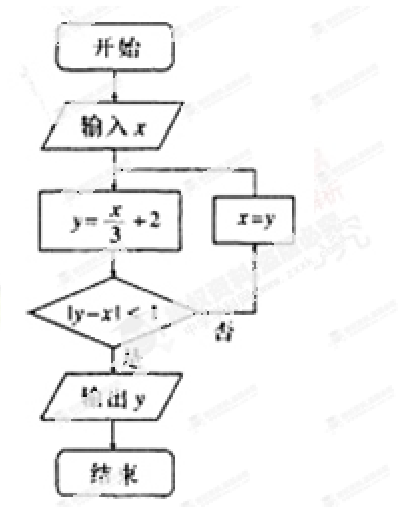
故 $k\le\frac{1}{4}$

考点：1.抽象函数问题；2.绝对值不等式.

第Ⅱ卷（共 90 分）

二、填空题（每题 5 分，满分 20 分，将答案填在答题纸上）

13.执行右侧的程序框图，若输入 $x=9$，则输出 $y=$__________.



【答案】$\frac{29}{9}$ C

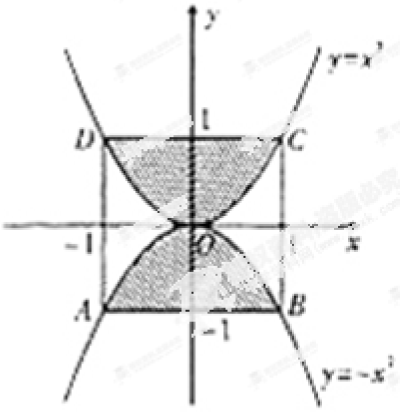
【解析】

试题分析：第一次运行后 $y=5$，第二次运行后 $y=\frac{11}{3}$，第三次运行后 $y=\frac{29}{9}$，此时

$|y-x|=|\frac{29}{9}-\frac{11}{3}|=\frac{4}{9}<1$，满足条件，故输出 $y=\frac{29}{9}$.

考点：程序框图.

14.正方形的四个顶点 $A(-1,-1),B(1,-1),C(1,1),D(-1,1)$ 分别在抛物线 $y=-x^2$ 和 $y=x^2$ 上，如图所示，若将一个质点随机投入正方形 ABCD 中，则质点落在阴影区域的概率是__________.



【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】

试题分析：有几何概型可知若将一个质点随机投入正方形 $ABCD$ 中，则质点落在阴影区域的概率

$$P=\frac{2\int_{-1}^{1}1-x^2dx}{2^2}=\frac{2}{3}.$$

考点：1.几何概型 ；2.定积分.

15.已知椭圆 C：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，点 M 与 C 的焦点不重合，若 M 关于 C 的焦点的对称点分别为 A，B，线段 MN 的中点在 C 上，则 $|AN|+|BN|=$__________.

【答案】12

【解析】

试题分析：设 M,N 的中点坐标为 P，$M(x_M,y_M),N(x_N,y_N),P(x_P,y_P),A(x_A,y_A),B(x_B,y_B)$,则

$x_M+x_A=-2\sqrt{5},x_M+x_B=2\sqrt{5},$

$y_M+y_A=0, y_M+y_B=0, x_M+x_N=2x_P, y_M+y_N=2y_P$；由于

$|AN|+|BN|=\sqrt{(x_A-x_N)^2+(y_A-y_N)^2}+\sqrt{(x_B-x_N)^2+(y_B-y_N)^2}$，化简可得

$|AN|+|BN|=2(\sqrt{(x_p+\sqrt{5})^2+y_p^{\ 2}}+\sqrt{(x_p-\sqrt{5})^2+y_p^{\ 2}})$，根据椭圆的定义

$\sqrt{(x_p+\sqrt{5})^2+y_p^{\ 2}}+\sqrt{(x_p-\sqrt{5})^2+y_p^{\ 2}}=2\times3=6$，所以$|AN|+|BN|=12$.

考点：1.椭圆的定义；2.两点距离公式.

16.对于$c>0$，当非零实数 a，b 满足$4a^2-2ab+4b^2-c=0$，且使$|2a+b|$最大时，$\frac{3}{a}-\frac{4}{b}+\frac{5}{c}$的最小值为__________ .

【答案】-2

【解析】

试题分析：法一：判别式法：令$2a+b=t$，则$b=t-2a$，代入到$4a^2-2ab+4b^2-c=0$中，得

$4a^2-2a(t-2a)+4(t-2a)^2-c=0$，即$24a^2-18ta+4t^2-c=0$……①

因为关于a的二次方程①有实根，所以$\Delta=18^2t^2-4\times24(4t^2-c)\ge0$，可得$t^2\le\frac{8c}{5}$，

$|2a+b|$取最大值时，$\begin{cases}a=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{c}{10}}\\ b=\sqrt{\frac{c}{10}}\end{cases}$或$\begin{cases}a=-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{c}{10}}\\ b=-\sqrt{\frac{c}{10}}\end{cases}$，

当$\begin{cases}a=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{c}{10}}\\ b=\sqrt{\frac{c}{10}}\end{cases}$时，$\frac{3}{a}-\frac{4}{b}+\frac{5}{c}=\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{c}}-\frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{c}}+\frac{5}{c}=-2\sqrt{\frac{10}{c}}+\left(\sqrt{\frac{5}{c}}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{5}{c}}-\sqrt{2}\right)^2-2\ge-2$，

当$\begin{cases}a=-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{c}{10}}\\ b=-\sqrt{\frac{c}{10}}\end{cases}$时，$\frac{3}{a}-\frac{4}{b}+\frac{5}{c}=-\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{c}}+\frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{c}}+\frac{5}{c}=\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{c}}+\frac{5}{c}>0$，

综上可知当$c=\frac{5}{2},a=\frac{3}{4},b=\frac{1}{2}$时，$\left(\frac{3}{a}-\frac{4}{b}+\frac{5}{c}\right)_{\min}=-2$

法二：柯西不等式：由$4a^2-2ab+4b^2-c=0$可得：$2c=3(a+b)^2+5(a-b)^2$

$(2a+b)^2=\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}(a+b)+\frac{\sqrt{5}}{10}\times\sqrt{5}(a+b)\right]^2$

$$\le\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{3}(a+b)\right)^2+\left(\sqrt{5}(a-b)\right)^2\right]=\le 2c\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{20}\right)=\frac{8c}{5},$$

当且仅当 $\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{\sqrt{5}}{10}=\sqrt{3}(a+b):\sqrt{5}(a-b)$ 时取等号，即 $2a=3b$ 时，取等号，

这时 $\begin{cases}a=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{c}{10}}\\ b=\sqrt{\frac{c}{10}}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{c}{10}}\\ b=-\sqrt{\frac{c}{10}}\end{cases}$

当 $\begin{cases}a=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{c}{10}}\\ b=\sqrt{\frac{c}{10}}\end{cases}$ 时，$\frac{3}{a}-\frac{4}{b}+\frac{5}{c}=\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{c}}-\frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{c}}+\frac{5}{c}=-\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{c}}+\frac{5}{c}=5\left(\frac{1}{\sqrt{c}}-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2-2\ge-2$，

当 $\begin{cases}a=-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{c}{10}}\\ b=-\sqrt{\frac{c}{10}}\end{cases}$ 时，$\frac{3}{a}-\frac{4}{b}+\frac{5}{c}=-\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{c}}+\frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{c}}+\frac{5}{c}=\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{c}}+\frac{5}{c}>0$，

综上可知当 $c=\frac{5}{2},a=\frac{3}{4},b=\frac{1}{2}$ 时，$\left(\frac{3}{a}-\frac{4}{b}+\frac{5}{c}\right)_{\min}=-2$

考点：柯西不等式.

三、解答题 （本大题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分 12 分）

在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边 a，b，c，且 $a>c$，已知 $\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}=2$，$\cos B=\frac{1}{3}$，$b=3$，求：

（1）a 和 c 的值；

（2）$\cos(B-C)$ 的值.

【答案】（1）a=3，c=2；（2）$\frac{23}{27}$.

【解析.】

试题分析：（Ⅰ）由 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2$ 和 $\cos B=\frac{1}{3}$，得 ac=6.由余弦定理，得 $a^2+c^2=13$.

解$\begin{cases}ac=6\\a^2+c^2=13\end{cases}$，即可求出 a，c；（Ⅱ）在$\Delta ABC$中，利用同角基本关系得$\sin B=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

由正弦定理，得$\sin C=\dfrac{c}{b}\sin B=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$，又因为$a=b>c$，所以 C 为锐角，因此

$\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\dfrac{7}{9}$，利用$\cos(B-C)=\cos B\cos C+\sin B\sin C$，即可求出结果.

试题解析：（Ⅰ）由$\overline{BA}\cdot\overline{BC}=2$得，$c\cdot a\cos B=2$，又$\cos B=\dfrac{1}{3}$，所以 $ac=6$.

由余弦定理，得$a^2+c^2=b^2+2ac\cos B$.

又 $b=3$，所以$a^2+c^2=9+2\times2=13$.

解$\begin{cases}ac=6\\a^2+c^2=13\end{cases}$，得 $a=2$，$c=3$ 或 $a=3$，$c=2$.

因为 $a>c$,∴ $a=3$，$c=2$.

（Ⅱ）在ΔABC中，$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-(\dfrac{1}{3})^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

由正弦定理，得$\sin C=\dfrac{c}{b}\sin B=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$，学科网又因为$a=b>c$，所以 C 为锐角，因此

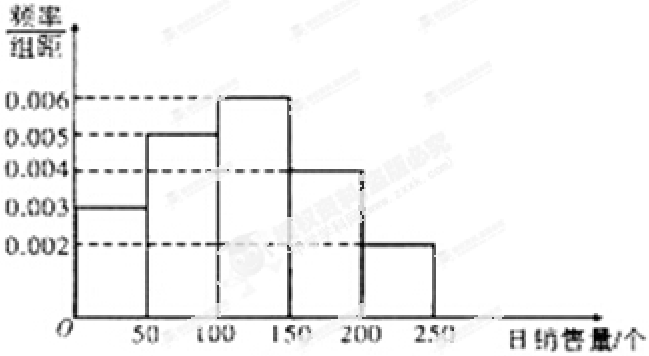
$\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\sqrt{1-(\dfrac{4\sqrt{2}}{9})^2}=\dfrac{7}{9}$.

于是$\cos(B-C)=\cos B\cos C+\sin B\sin C=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{7}{9}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\dfrac{4\sqrt{2}}{9}=\dfrac{23}{27}$.

考点：1.解三角形；2.三角恒等变换.

18. （本小题满分 12 分）

一家面包房根据以往某种面包的销售记录，绘制了日销售量的频率分布直方图，如图所示：



将日销售量落入各组的频率视为概率，并假设每天的销售量相互独立.

（1）求在未来连续 3 天里，有连续 2 天的日销售量都不低于 100 个且另一天的日销售量低于 50 个的概率；

（2）用 X 表示在未来 3 天里日销售量不低于 100 个的天数，求随机变量 X 的分布列，期望 $E(X)$ 及方差 $D(X)$.

【答案】（Ⅰ）0.108；（Ⅱ）详见解析.

【解析】

试题分析：（Ⅰ）设 A_1 表示事件“日销售量不低于 100 个”，A_2 表示事件“日销售量低于 50 个”，B 表示事件“在未来连续 3 天里有连续 2 天日销售量不低于 100 个且另一天的日销售量低于 50 个”.因此可求出 $P(A_1)=0.6$，$P(A_2)=0.15$，利用事件的独立性即可求出 $P(B)$；(Ⅱ)由题意可知 $X\sim B(3,0.6)$,所以即可列出分布列，求出期望为 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 的值.

试题解析：（Ⅰ）设 A_1 表示事件“日销售学科网量不低于 100 个”，A_2 表示事件“日销售量低于 50 个”，B 表示事件“在未来连续 3 天里有连续 2 天日销售量不低于 100 个且另一天的日销售量低于 50 个”.因此

$P(A_1)=(0.006+0.004+0.002)\times 50=0.6$.

$P(A_2)=0.003\times 50=0.15$.

$P(B)=0.6\times 0.6\times 0.15\times 2=0.108$.

（Ⅱ）X 的可能取值为 0,1,2,3.相应的概率为

$P(X=0)=C_3^0\cdot(1-0.6)^3=0.064$,

$P(X=1)=C_3^1\cdot 0.6(1-0.6)^2=0.288$,

$P(X=2)=C_3^2\cdot 0.6^2(1-0.6)=0.432$,

$P(X=3)=C_3^3\cdot 0.6^3=0.216$,

分布列为

X	0	1	2	3
P	0.064	0.288	0.432	0.216

因为 $X\sim B(3,0.6)$,所以期望为 $E(X)=3\times 0.6=1.8$，方差 D（X）$=3\times 0.6\times$（1-0.6）=0.72

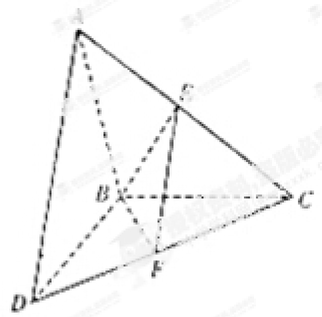
考点：1.频率分布直方图；2.二项分布.

19. （本小题满分 12 分）

如图，ΔABC 和 ΔBCD 所在平面互相垂直，且 $AB=BC=BD=2$，$\angle ABC=\angle DBC=120^0$，$E$、$F$ 分别为 AC、DC 的中点.

（1）求证：$EF\perp BC$；

（2）求二面角 $E-BF-C$ 的正弦值.



【答案】（Ⅰ）详见解析；（Ⅱ）$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

【解析】

试题分析：（Ⅰ）（方法一）过 E 作 $EO\perp BC$，垂足为 O，连 OF，由$\triangle ABC\cong\triangle DBC$ 可证出$\triangle EOC\cong\triangle FOC$，所以$\angle EOC=\angle FOC=\dfrac{\pi}{2}$，即 $FO\perp BC$，又 $EO\perp BC$，因此 $BC\perp$面 EFO，即可证明 $EF\perp BC$.（方法二）由题意，以 B 为坐标原点，在平面 DBC 内过 B 左垂直 BC 的直线为 x 轴，BC 所在直线为 y 轴，在平面 ABC 内过 B 作垂直 BC 的直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.

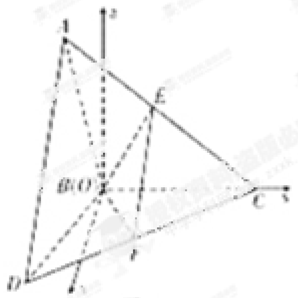


图 2

易得 $E(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}),F(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},0)$,所以 $\overrightarrow{EF}=(\dfrac{\sqrt{3}}{2},0,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}),\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$，因此 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}=0$,从而得 $EF\perp BC$；（Ⅱ）（方法一）在图 1 中，过 O 作 $OG\perp BF$，垂足为 G，连 EG，由平面 $ABC\perp$平面 BDC，从而 $EO\perp$平面 BDC，从而 $EO\perp$面 BDC，又 $OG\perp BF$，由三垂线定理知 EG 垂直 BF，因此$\angle EGO$ 为二面角 E-BF-C 的平面角；在$\triangle EOC$ 中，$EO=\dfrac{1}{2}EC=\dfrac{1}{2}BC\cdot\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，由$\triangle BGO\backsim\triangle BFC$ 知，

$OG=\dfrac{BO}{BC}\cdot FC=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$,因此 $\tan\angle EGO=\dfrac{EO}{OG}=2$,从而 $\sin\angle EGO=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，即可求出二面角 E-BF-C 的正弦值.

（方法二）在图 2 中，平面 BFC 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(0,0,1)$，设平面 BEF 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$，又由 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BF}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$ 得其中一个 $\overrightarrow{n_2}=(1,-\sqrt{3},1)$，设二面角 E-BF-C 的大小为θ，且由题意知θ为锐角，则 $\cos\theta=|\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>|=|\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}|=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，学科网因此 $\sin\angle EGO=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，即可求出二面角 E-BF-C 的正弦值.

试题解析：（Ⅰ）证明：

（方法一）过 E 作 $EO\perp BC$，垂足为 O，连 OF，

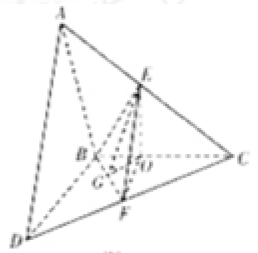


图1

由△ABC≌△DBC 可证出△EOC≌△FOC，所以∠EOC=∠FOC=$\frac{\pi}{2}$，即 $FO\perp BC$，

又 $EO\perp BC$，因此 $BC\perp$面 EFO，

又 $EF\subset$面 EFO，所以 $EF\perp BC$.

（方法二）由题意，以 B 为坐标原点，在平面 DBC 内过 B 左垂直 BC 的直线为 x 轴，BC 所在直线为 y 轴，在平面 ABC 内过 B 作垂直 BC 的直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.

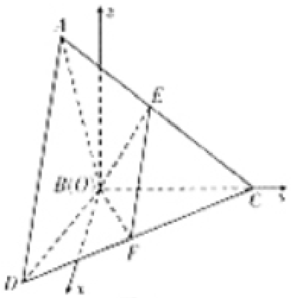


图2

易得 B（0,0,0），A(0，-1，$\sqrt{3}$),D($\sqrt{3}$,-1,0)，C(0,2,0),因而 $E(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),F(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$,所以

$\overrightarrow{EF}=(\frac{\sqrt{3}}{2},0,-\frac{\sqrt{3}}{2}),\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$，因此 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}=0$,从而 $\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{BC}$，所以 $EF\perp BC$.

（Ⅱ）（方法一）在图 1 中，过 O 作 $OG\perp BF$，垂足为 G，连 EG，由平面 $ABC\perp$平面 BDC，从而 $EO\perp$平面 BDC，从而 $EO\perp$面 BDC，又 $OG\perp BF$，由三垂线定理知 EG 垂直 BF.

因此$\angle EGO$ 为二面角 E-BF-C 的平面角；

在$\triangle EOC$ 中，$EO=\frac{1}{2}EC=\frac{1}{2}BC\cdot\cos 30^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由$\triangle BGO\backsim\triangle BFC$ 知，$OG=\frac{BO}{BC}\cdot FC=\frac{\sqrt{3}}{4}$,因此 $\tan\angle EGO=\frac{EO}{OG}=2$,从而 $\sin\angle EGO=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，即二面角 E-BF-C 的正弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

（方法二）在图 2 中，平面 BFC 的一个法学科网向量为 $\overrightarrow{n_1}=(0,0,1)$，设平面 BEF 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$，又 $\overrightarrow{BF}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0),\overrightarrow{BE}=(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$,由 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BF}=0\\\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$ 得其中一个 $\overrightarrow{n_2}=(1,-\sqrt{3},1)$，设二面角 E-BF-C 的大小为 θ，且由题意知 θ 为锐角，则 $\cos\theta=|\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>|=|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}|=\frac{1}{\sqrt{5}}$，因此 $\sin\angle EGO=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，即二面角 E-BF-C 的正弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

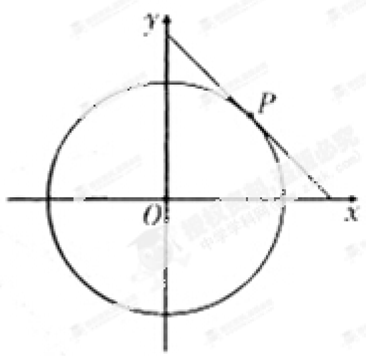
考点：1.线面垂直的判定；2.二面角.

20. （本小题满分 12 分）

圆 $x^2+y^2=4$ 的切线与 x 轴正半轴，y 轴正半轴围成一个三角形，当该三角形面积最小时，切点为 P（如图），双曲线 $C_1:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 过点 P 且离心率为 $\sqrt{3}$.

（1）求 C_1 的方程；

（2）椭圆 C_2 过点 P 且与 C_1 有相同的焦点，直线 l 过 C_2 的右焦点且与 C_2 交于 A，B 两点，若以线段 AB 为直径的圆心过点 P，求 l 的方程.



【答案】（Ⅰ）$x^2-\frac{y^2}{2}=1$；（Ⅱ）$x-(\frac{3\sqrt{6}}{2}-1)y-\sqrt{3}=0$，或 $x+(\frac{3\sqrt{6}}{2}-1)y-\sqrt{3}=0$.

【解析】

试题分析：（Ⅰ）设切点坐标为$(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$，则切线斜率为$-\frac{x_0}{y_0}$，切线方程为

$y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$，即$x_0x+y_0y=4$，此时，学科网两个坐标轴的正半轴与切线围成的三角形面积为

$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{x_0}\cdot\frac{4}{y_0}=\frac{8}{x_0y_0}$.由$x_0{}^2+y_0{}^2=4\geq 2x_0y_0$知当且仅当$x_0=y_0=\sqrt{2}$时$x_0y_0$有最大值，即$S$有最小值，

因此点P得坐标为$(\sqrt{2},\sqrt{2})$，由题意知$\begin{cases}\frac{2}{a^2}-\frac{2}{b^2}=1\\ a^2+b^2=3a^2\end{cases}$解得$a^2=1,b^2=2$，即可求出$C_1$的方程；（Ⅱ）由

（Ⅰ）知C_2的焦点坐标为$(-\sqrt{3},0),(\sqrt{3},0)$，由此$C_2$的方程为$\frac{x^2}{3+b_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1$，其中$b_1>0$.

由$P(\sqrt{2},\sqrt{2})$在C_2上，得$\frac{2}{3+b_1^2}+\frac{2}{b_1^2}=1$，显然，$l$不是直线$y=0$.设$l$的方程为$x=my+\sqrt{3}$，点

$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$由$\begin{cases}x=my+\sqrt{3}\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$得$(m^2+2)y^2+2\sqrt{3}my-3=0$，因

$\overrightarrow{AP}=(\sqrt{2}-x_1,\sqrt{2}-y_1),\overrightarrow{BP}=(\sqrt{2}-x_2,\sqrt{2}-y_2)$由题意知$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$，所以

$x_1x_2-\sqrt{2}(x_1+x_2)+y_1y_2-\sqrt{2}(y_1+y_2)+4=0$，将韦达定理得到的结果代入

$x_1x_2-\sqrt{2}(x_1+x_2)+y_1y_2-\sqrt{2}(y_1+y_2)+4=0$式整理得$2m^2-2\sqrt{6}m+4\sqrt{6}-11=0$，解得$m=\frac{3\sqrt{6}}{2}-1$

或$m=-\frac{3\sqrt{6}}{2}+1$，即可求出直线l的方程.

试题解析：（Ⅰ）设切点坐标为$(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$，则切线斜率为$-\frac{x_0}{y_0}$，切线方程为

$y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$，即$x_0x+y_0y=4$，此时，两个坐标轴的正半轴与切线围成的三角形面积为

$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{x_0}\cdot\frac{4}{y_0}=\frac{8}{x_0y_0}$.由$x_0^2+y_0^2=4\ge 2x_0y_0$知当且仅当$x_0=y_0=\sqrt{2}$时$x_0y_0$有最大值，即$S$有最小值，

因此点P得坐标为$(\sqrt{2},\sqrt{2})$，

由题意知

$$\begin{cases}\frac{2}{a^2}-\frac{2}{b^2}=1\\ a^2+b^2=3a^2\end{cases}$$ 解得$a^2=1,b^2=2$，故C_1方程为$x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知C_2的焦点坐标为$(-\sqrt{3},0),(\sqrt{3},0)$，由此$C_2$的方程为$\frac{x^2}{3+b_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1$，其中$b_1>0$.

由$P(\sqrt{2},\sqrt{2})$在C_2上，得$\frac{2}{3+b_1^2}+\frac{2}{b_1^2}=1$，

显然，l不是直线$y=0$.设l的方程为$x=my+\sqrt{3}$，点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

由$\begin{cases}x=my+\sqrt{3}\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得$(m^2+2)y^2+2\sqrt{3}my-3=0$，又$y_1,y_2$是方程的根，因此

$$\begin{cases}y_1+y_2=-\frac{2\sqrt{3}m}{m^2+2} & ①\\ y_1y_2=\frac{-3}{m^2+2} & ②\end{cases}$$，由$x_1=my_1+\sqrt{3},x_2=my_2+\sqrt{3}$得

$$\begin{cases} x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2\sqrt{3}=\dfrac{4\sqrt{3}}{m^2+2} & ③ \\ x_1x_2=m^2y_1y_2+\sqrt{3}m(y_1+y_2)+3=\dfrac{6-6m^2}{m^2+2} & ④ \end{cases}$$

因 $\overline{AP}=(\sqrt{2}-x_1,\sqrt{2}-y_1),\overline{BP}=(\sqrt{2}-x_2,\sqrt{2}-y_2)$ 由题意知 $\overline{AP}\cdot\overline{BP}=0$，所以

$x_1x_2-\sqrt{2}(x_1+x_2)+y_1y_2-\sqrt{2}(y_1+y_2)+4=0$ ⑤ ，将①，②，③，④代入⑤式整理得

$2m^2-2\sqrt{6}m+4\sqrt{6}-11=0$，解得 $m=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}-1$ 或 $m=-\dfrac{3\sqrt{6}}{2}+1$，因此直线 l 的方程为

$x-(\dfrac{3\sqrt{6}}{2}-1)y-\sqrt{3}=0$，或 $x+(\dfrac{3\sqrt{6}}{2}-1)y-\sqrt{3}=0$.

考点：1.椭圆的方程；2.直线与椭圆的位置关系.

21. （本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=(\cos x-x)(\pi+2x)-\dfrac{8}{3}(\sin x+1)$， $g(x)=3(x-x)\cos x-4(1+\sin x)\ln(3-\dfrac{2x}{\pi})$.

证明：（Ⅰ）存在唯一 $x_0\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，使 $f(x_0)=0$；

(Ⅱ)存在唯一 $x_1\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，使 $g(x_1)=0$，且对（1）中的 $x_0+x_1<\pi$.

【答案】(Ⅰ) 详见解析；(Ⅱ) 详见解析.

【解析】

试题分析：(Ⅰ) 当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时， $f'(x)=-(1+\sin x)(\pi+2x)-2x-\dfrac{2}{3}\cos x<0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上为减函数，又 $f(0)=\pi-\dfrac{8}{3}>0, f(\dfrac{\pi}{2})=-\pi^2-\dfrac{16}{3}<0$，所以存在唯一 $x_0\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，使 $f(x_0)=0$．(Ⅱ) 考虑函数 $h(x)=\dfrac{3(x-\pi)\cos x}{1+\sin x}-4\ln(3-\dfrac{2}{\pi}x), x\in[\dfrac{\pi}{2},\pi]$，令 $t=\pi-x$，则 $x\in[\dfrac{\pi}{2},\pi]$时， $t\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，记 $u(t)=h(\pi-t)=\dfrac{3t\cos t}{1+\sin t}-4\ln(1+\dfrac{2}{\pi}t)$，则 $u'(t)=\dfrac{3f(t)}{(\pi+2t)(1+\sin t)}$ ，有 (Ⅰ) 得，当 $t\in(0,x_0)$ 时， $u'(t)>0$，当 $t\in(x_0,\dfrac{\pi}{2})$ 时， $u'(t)<0$．在 $(0,x_0)$ 上 $u(t)$ 是增函数，又 $u(0)=0$，从而当 $t\in(0,x_0]$时， $u(t)>0$，所以 $u(t)$ 在 $(0,x_0]$ 上无零点.在 $(x_0,\dfrac{\pi}{2})$ 上 $u(t)$ 是减函数，又 $u(x_0)>0,u(\dfrac{\pi}{2})=-4\ln 2<0$，存在唯一的 $t_1\in(x_0,\dfrac{\pi}{2})$ ，使 $u(t_1)=0$.所以存在唯一的 $t_1\in(x_0,\dfrac{\pi}{2})$ 使 $u(t_1)=0$.因此存在唯一的 $x_1=\pi-t_1\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，使 $h(x_1)=h(\pi-t_1)=u(t_1)=0$.因为当 $x\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 时， $1+\sin x>0$，故

$g(x)=(1+\sin x)h(x)$ 与 $h(x)$ 有相同的零点，所以存在唯一的 $x_1\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，使 $g(x_1)=0$.因

$x_1=\pi-t_1,t_1>x_0$，所以 $x_0+x_1<\pi$，即命题得证.

试题解析：（Ⅰ）当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$f'(x)=-(1+\sin x)(\pi+2x)-2x-\frac{2}{3}\cos x<0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上为减函数，又 $f(0)=\pi-\frac{8}{3}>0,f(\frac{\pi}{2})=-\pi^2-\frac{16}{3}<0$，所以存在唯一 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使 $f(x_0)=0$.

（Ⅱ）考虑函数 $h(x)=\frac{3(x-\pi)\cos x}{1+\sin x}-4\ln(3-\frac{2}{\pi}x),x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$，

令 $t=\pi-x$，则 $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$ 时，$t\in[0,\frac{\pi}{2}]$，

记 $u(t)=h(\pi-t)=\frac{3t\cos t}{1+\sin t}-4\ln(1+\frac{2}{\pi}t)$，则 $u'(t)=\frac{3f(t)}{(\pi+2t)(1+\sin t)}$，

有（Ⅰ）得，当 $t\in(0,x_0)$ 时，$u'(t)>0$，当 $t\in(x_0,\frac{\pi}{2})$ 时，$u'(t)<0$.

在 $(0,x_0)$ 上 $u(t)$ 是增函数，又 $u(0)=0$，从而当 $t\in(0,x_0]$ 时，$u(t)>0$，所以 $u(t)$ 在 $(0,x_0]$ 上无零点.

在 $(x_0,\frac{\pi}{2})$ 上 $u(t)$ 是减函数，又 $u(x_0)>0,u(\frac{\pi}{2})=-4\ln 2<0$，存在唯一的 $t_1\in(x_0,\frac{\pi}{2})$，使 $u(t_1)=0$.

所以存在唯一的 $t_1\in(x_0,\frac{\pi}{2})$ 使 $u(t_1)=0$.

因此存在唯一的 $x_1=\pi-t_1\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，使 $h(x_1)=h(\pi-t_1)=u(t_1)=0$.

因为当 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时，$1+\sin x>0$，故 $g(x)=(1+\sin x)h(x)$ 与 $h(x)$ 有相同的零点，所以存在唯一的 $x_1\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，使 $g(x_1)=0$.

因 $x_1=\pi-t_1,t_1>x_0$，所以 $x_0+x_1<\pi$

考点：1.零点唯一性的判断；2.函数的单调性的应用.

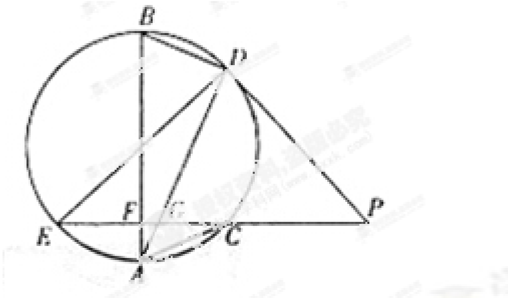
请考生在第 22、23、24 三题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分，作答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应题号下方的方框涂黑.

22.（本小题满分 10 分）选修 4-1：几何证明选讲

如图，EP 交圆于 E、C 两点，PD 切圆于 D，G 为 CE 上一点且 $PG=PD$，连接 DG 并延长交圆于点 A，作弦 AB 垂直 EP，垂足为 F.

（Ⅰ）求证：AB 为圆的直径；

（Ⅱ）若 $AC=BD$，求证：$AB=ED$.



【答案】（Ⅰ）详见解析；（Ⅱ）详见解析.

【解析】

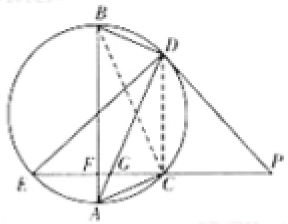
试题分析：（Ⅰ）因为 $PD=PG$,所以$\angle PDG=\angle PGD$.由于 PD 为切线，故$\angle PDA=\angle DBA$,又由于$\angle PGD=\angle EGA$,故$\angle DBA=\angle EGA$,所以$\angle DBA+\angle BAD=\angle EGA+\angle BAD$,从而$\angle BDA=\angle PFA$.由于 AF 垂直 EP，所以$\angle PFA=90°$，于是$\angle BDA=90°$，故 AB 是直径.（Ⅱ）连接 BC，DC.由于 AB 是直径，故$\angle BDA=\angle ACB=90°$，在 $Rt\triangle BDA$ 与 $Rt\triangle ACB$ 中，$AB=BA,AC=BD$．从而 $Rt\triangle BDA\cong Rt\triangle ACB$，于是 $Rt\triangle BDA$ 与$\angle DAB=\angle CBA$.又因为$\angle DCB=\angle DAB$,所以$\angle DCB=\angle CBA$，故 $DC /\!/ AB$.由于 ED 是直径，即可得出结论.

试题解析：（Ⅰ）因为 $PD=PG$,所以$\angle PDG=\angle PGD$.

由于 PD 为切线，故$\angle PDA=\angle DBA$,又由于$\angle PGD=\angle EGA$,故$\angle DBA=\angle EGA$,所以$\angle DBA+\angle BAD=\angle EGA+\angle BAD$,从而$\angle BDA=\angle PFA$.

由于 AF 垂直 EP，所以$\angle PFA=90°$，于是$\angle BDA=90°$，故 AB 是直径.

（Ⅱ）连接 BC，DC.



由于 AB 是直径，故$\angle BDA=\angle ACB=90°$，

在 $Rt\triangle BDA$ 与 $Rt\triangle ACB$ 中，$AB=BA,AC=BD$，

从而 $Rt\triangle BDA\cong Rt\triangle ACB$，于是 $Rt\triangle BDA$ 与$\angle DAB=\angle CBA$.

又因为$\angle DCB=\angle DAB$,所以$\angle DCB=\angle CBA$，故 $DC /\!/ AB$.

由于 ED 是直径，由（Ⅰ）得 $ED=AB$.

考点：1. 圆周角定理；2.与圆有关的比例线段.

23. （本小题满分 10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

将圆 $x^2+y^2=1$ 上每一点的横坐标保持不变，纵坐标变为原来的 2 倍，得曲线 C.

（Ⅰ）写出 C 的参数方程；

(Ⅱ)设直线 $l:2x+y-2=0$ 与 C 的交点为 P_1,P_2，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极坐标建立极坐标系，求过线段 P_1P_2 的中点且与 l 垂直的直线的极坐标方程.

【答案】(Ⅰ) $\begin{cases}x=\cos t\\ y=2\sin t\end{cases}$ （t 为参数）；(Ⅱ) $\rho=\dfrac{3}{4\sin\theta-2\cos\theta}$.

【解析】

试题分析：(Ⅰ)设 (x_1,y_1) 为圆上的点，在曲线 C 上任意取一点（x，y），再根据 $\begin{cases}x=x_1\\ y=2y_1\end{cases}$，由于点 (x_1,y_1) 在圆 $x^2+y^2=1$ 上，求出 C 的方程，化为参数方程.（Ⅱ）解方程组求得 P_1、P_2 的坐标，可得线段 P_1P_2 的中点坐标．再根据与 l 垂直的直线的斜率为 $\frac{1}{2}$，用点斜式求得所求的直线的方程，再根据 $x=\rho cos\theta$、$y=\rho sin\theta$ 可得所求的直线的极坐标方程.

试题解析：(Ⅰ)设 (x_1,y_1) 为圆上的点，在已知变换下位 C 上点 (x,y)，依题意，得 $\begin{cases}x=x_1\\ y=2y_1\end{cases}$ 由 $x_1^2+y_1^2=1$ 得 $x^2+(\frac{y}{2})^2=1$，即曲线 C 的方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$.，故 C 得参数方程为 $\begin{cases}x=\cos t\\ y=2\sin t\end{cases}$ （t 为参数）.

(Ⅱ)由 $\begin{cases}x^2+\dfrac{y^2}{4}=1\\ 2x+y-2=0\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}$，或 $\begin{cases}x=0\\ y=2\end{cases}$.

不妨设 $P_1(1,0)$，$P_2(0,2)$，则线段 P_1P_2 的中点坐标为 $(\frac{1}{2},1)$，所求直线的斜率为 $k=\frac{1}{2}$，于是所求直线方程为

$y-1=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})$，

化极坐标方程，并整理得

$2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta=-3$，即 $\rho=\dfrac{3}{4\sin\theta-2\cos\theta}$.

考点：1.参数方程化成普通方程；2.点的极坐标和直角坐标的互化.

24. （本小题满分 10 分）选修 4-5：不等式选讲

设函数 $f(x)=2|x-1|+x-1$，$g(x)=16x^2-8x+1$，记 $f(x)\le 1$ 的解集为 M，$g(x)\le 4$ 的解集为 N.

（Ⅰ）求 M；

(Ⅱ)当 $x\in M\bigcap N$ 时，证明：$x^2f(x)+x[f(x)]^2\le\frac{1}{4}$.

【答案】（Ⅰ）$M=\{x|0\le x\le\frac{4}{3}\}$；（Ⅱ）详见解析.

【解析】

试题分析：（Ⅰ）由所给的不等式可得当 $x\ge1$ 时，由 $f(x)=3x-3\le1$，或当 $x<1$ 时，由 $f(x)=1-x\le1$，分别求得它们的解集，再取并集，即得所求.（Ⅱ）由 $g(x)\le4$，求得 N，可得 $M\bigcap N=\{x|0\le x\le\frac{3}{4}\}$. 当 $x\in M\cap N$ 时，$f(x)=1-x$，不等式的左边化为 $\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2$，显然它小于或等于 $\frac{1}{4}$，要证的不等式得证.

试题解析：（Ⅰ）$f(x)=\begin{cases}3x-3, x\in[1,+\infty)\\1-x\ \ , x\in(-\infty,1)\end{cases}$

当 $x\ge1$ 时，由 $f(x)=3x-3\le1$ 得 $x\le\frac{4}{3}$，故 $1\le x\le\frac{4}{3}$；

当 $x<1$ 时，由 $f(x)=1-x\le1$ 得 $x\ge0$，故 $0\le x<1$；

所以 $f(x)\le1$ 的解集为 $M=\{x|0\le x\le\frac{4}{3}\}$.

（Ⅱ）由 $g(x)=16x^2-8x+1\le4$ 得 $16(x-\frac{1}{4})^2\le4$，解得 $-\frac{1}{4}\le x\le\frac{3}{4}$，因此 $N=\{x|-\frac{1}{4}\le x\le\frac{3}{4}\}$，故 $M\bigcap N=\{x|0\le x\le\frac{3}{4}\}$.

当 $x\in M\bigcap N$ 时，$f(x)=1-x$，于是

$$x^2f(x)+x[f(x)]^2=xf(x)[x+f(x)]$$

$$=xf(x)=x(1-x)=\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2\le\frac{1}{4}.$$

考点：1.其他不等式的解法；2.交集及其运算.