

试卷类型：A

2011年普通高等学校招生全国统一考试（广东卷）

数学（理科）

本试题共4页，21小题，满分150分，考试用时120分钟。

注意事项：

- 1、答卷前，考生务必用黑色自己的钢笔或签字笔将自己的姓名、和考生号、试室号、座位号，填写在答题卡上。用2B铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
- 2、选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。
- 3、非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求做大的答案无效。
- 4、作答选做题时，请先用2B铅笔填涂选做题的题号对应的信息点，再做答。漏涂、错涂、多涂的，答案无效。
- 5、考生必须保持答题卡得整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

参考公式：柱体的体积公式 $V=Sh$ 其中S为柱体的底面积，h为柱体的高

线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 中系数计算公式 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$,
其中 \bar{x}, \bar{y} 表示样本均值。

N是正整数，则 $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，满分40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设复数 z 满足 $(1+i)z=2$ ，其中 i 为虚数单位，则 $z=$

- A. $1+i$ B. $1-i$ C. $2+2i$ D. $2-2i$

2. 已知集合 $A=\{(x,y) \mid x,y \text{ 为实数, 且 } x^2+y^2=1\}$ ， $B=\{(x,y) \mid x,y \text{ 为实数, 且 } y=x\}$ ，则 $A \cap B$ 的元素个数为

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

3. 若向量 a, b, c 满足 $a \parallel b$ 且 $a \perp b$ ，则 $c \cdot (a+2b)=$

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 0

4. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别是 \mathbb{R} 上的偶函数和奇函数，则下列结论恒成立的是

- A. $f(x)+|g(x)|$ 是偶函数 B. $f(x)-|g(x)|$ 是奇函数
 C. $|f(x)|+g(x)$ 是偶函数 D. $|f(x)|-g(x)$ 是奇函数

5. 在平面直角坐标系 xOy 上的区域 D 由不等式组 $\begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{2} \\ y \leq 2 \\ x \leq \sqrt{2}y \end{cases}$ 给定。若 $M(x,y)$ 为

D 上的动点，点 A 的坐标为 $(\sqrt{2},1)$ ，则 $z = \overline{OM} \cdot \overline{ON}$ 的最大值为

- A. $4\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. 4 D. 3

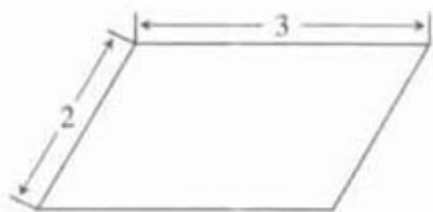
6.

甲、乙两队进行排球决赛，现在的情形是甲队只要在赢一次就获冠军，乙队需要再赢两局才能得冠军，若两队胜每局的概率相同，则甲队获得冠军的概率为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

7.

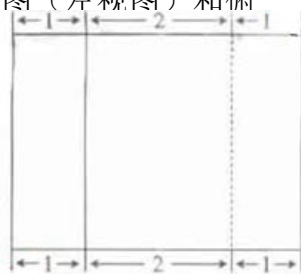
如图1-3，某几何体的正视图（主视图）是平行四边形，侧视图（左视图）和俯视图都是矩形，则该几何体的体积为



正视图



侧视图



俯视图

图 3

- A. $6\sqrt{3}$ B. $9\sqrt{3}$ C. $12\sqrt{3}$ D. $18\sqrt{3}$

8. 设S是整数集Z的非空子集，如果 $\forall a, b \in S$, 有 $ab \in S$ ，则称S关于数的乘法是封闭的。
若T, V是Z的两个不相交的非空子集， $T \cup U = Z$, 且 $\forall a, b, c \in T$, 有

$abc \in T; \forall x, y, z \in V$, 有 $xyz \in V$ ，则下列结论恒成立的是

- A. T, V 中至少有一个关于乘法是封闭的
B. T, V 中至多有一个关于乘法是封闭的
C. T, V 中有且只有一个关于乘法是封闭的
D. T, V 中每一个关于乘法都是封闭的

16. 填空题：本大题共7小题，考生作答6小题，每小题5分，满分30分。

(一) 必做题 (9-13题)

9. 不等式 $|x+1| - |x-3| \geq 0$ 的解集是_____.

10. $x\left(x - \frac{2}{x}\right)^7$ 的展开式中， x^4 的系数是_____ (用数字作答)

11. _____ 等差数列 $|a_n|$ 前9项的和等于前4项的和.

若 $a_1 = 1, a_k + a_4 = 0$ ，则 $k =$ _____.

12. 函数 $f(x) = x - 3x^2 + 1$ 在 $x =$ _____ 处取得极小值。

13.

某数学老师身高176cm，他爷爷、父亲和儿子的身高分别是173cm、170cm和182cm
. 因儿子的身高与父亲的身高有关，该老师用线性回归分析的方法预测他孙子的身高为_____ cm.

(二) 选做题 (14 - 15题, 考生只能从中选做一题)

14. (坐标系与参数方程选做题) 已知两曲线参数方程分别为

$$\begin{cases} x = \sqrt{5} \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases} (0 \leq \theta < \pi) \text{ 和 } \begin{cases} x = \frac{5}{4} t^2 \\ y = t \end{cases} (t \in R), \text{ 它们的交点坐标为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

15. (几何证明选讲选做题) 如图4, 过圆 O 外一点 p 分别作圆的切线

和割线交圆于 A, B , 且 $PB=7$, C 是圆上一点使得 $BC=5$,

$\angle BAC = \angle APB$, 则 $AB = \underline{\hspace{2cm}}$.

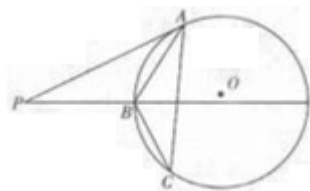


图4

三. 解答题. 本大题共6小题, 满分80分. 解答需写出文字说明、证明过程和演算步骤。

(1) (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = 2 \sin(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{6}), x \in R$.

(1) 求 $f(\frac{5\pi}{4})$ 的值;

(2) 设 $\alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(3\alpha + \frac{\pi}{2}) = \frac{10}{13}, f(3\beta + 2\pi) = \frac{6}{5}$, 求 $\cos(\alpha + \beta)$ 的值.

17.

为了解甲、乙两厂的产品质量, 采用分层抽样的方法从甲、乙两厂生产的产品中分别抽出14件和5件, 测量产品中的微量元素 x, y 的含量 (单位: 毫克). 下表是乙厂的5件产品的测量数据:

编号	1	2	3	4	5
x	169	178	166	175	180

y	75	80	77	70	81
---	----	----	----	----	----

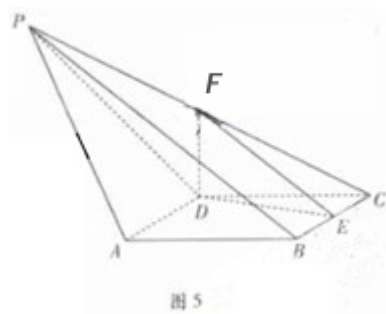
(1) 已知甲厂生产的产品共有98件，求乙厂生产的产品数量；

(2) 当产品中的微量元素 x, y 满足 $x \geq 175$ ，且 $y \geq 75$ 时，该产品为优等品。用上述样本数据估计乙厂生产的优等品的数量；

(3) 从乙厂抽出的上述5件产品中，随机抽取2件，求抽取的2件产品中优等品数 ξ 的分布列及其均值（即数学期望）。

18. (本小题满分13分)

如图5. 在椎体 $P-ABCD$ 中， $ABCD$ 是边长为1的菱形，且 $\angle DAB=60^\circ$ ， $PA=PD=\sqrt{2}$ ， $PB=2$ ， E, F 分别是 BC, PC 的中点.



(1) 证明： $AD \perp$ 平面 DEF ；

(2) 求二面角 $P-AD-B$ 的余弦值.

19. (本小题满分14分)

设圆 C 与两圆 $(x+\sqrt{5})^2+y^2=4, (x-\sqrt{5})^2+y^2=4$ 中的一个内切，另一个外切。

(1) 求圆 C 的圆心轨迹 L 的方程；

(2) 已知点 $M(\frac{3\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}), F(\sqrt{5}, 0)$ ，且 P 为 L 上动点，求 $\|MP\| - \|FP\|$ 的最大值及此时点 P 的坐标.

20. (本小题共14分)

设 $b > 0$ ，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=b$ ， $a_n = \frac{nb a_{n-1}}{a_{n-1} + 2n - 2} (n \geq 2)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 证明：对于一切正整数 n , $a_n \leq \frac{b^{n+1}}{2^{n+1}} + 1$.

21. (本小题满分14分)

在平面直角坐标系 xOy 上, 给定抛物线 $L: y = \frac{1}{4}x^2$. 实数 p, q 满足 $p^2 - 4q \geq 0$, x_1, x_2

是方程 $x^2 - px + q = 0$ 的两根, 记 $\varphi(p, q) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.

(1) 过点 $A(p_0, \frac{1}{4}p_0^2)$ ($p_0 \neq 0$) 作 L 的切线交 y 轴于点 B .

证明：对线段 AB 上任一点 $Q(p, q)$ 有 $\varphi(p, q) = \frac{|p_0|}{2}$;

(2) 设 $M(a, b)$ 是定点, 其中 a, b 满足 $a^2 - 4b > 0, a \neq 0$.

过 $M(a, b)$ 作 L 的两条切线 l_1, l_2 , 切点分别为 $E(p_1, \frac{1}{4}p_1^2), E'(p_2, \frac{1}{4}p_2^2)$, l_1, l_2 与 y 轴分别交与 F, F' . 线段 EF 上异于两端点的点集记为 X . 证明: $M(a, b)$

$\in X \Leftrightarrow |P_1| > |P_2| \Leftrightarrow \varphi(a, b) = \frac{|p_1|}{2}$;

(3) 设 $D = \{ (x, y) \mid y \leq x - 1, y \geq \frac{1}{4}(x+1)^2 - \frac{5}{4} \}$. 当点 (p, q) 取遍 D 时, 求 $\varphi(p, q)$ 的最小值

(记为 φ_{\min}) 和最大值 (记为 φ_{\max}).

2011年广东高考理科数学参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	D	A	C	D	B	A

二、填空题

9. $[1, +\infty)$; 10. 84; 11. 10; 12. 2; 13. 185;

14. $(1, \frac{2\sqrt{5}}{5})$; 15. $\sqrt{35}$;

三、解答题

16. 解: (1) $f(\frac{5\pi}{4}) = 2\sin(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{6}) = 2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$;

(2) $f(3\alpha + \frac{\pi}{2}) = 2\sin\alpha = \frac{10}{13}$, $\therefore \sin\alpha = \frac{5}{13}$, 又 $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\therefore \cos\alpha = \frac{12}{13}$,

$f(3\beta + 2\pi) = 2\sin(\beta + \frac{\pi}{2}) = 2\cos\beta = \frac{6}{5}$, $\therefore \cos\beta = \frac{3}{5}$,

又 $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\therefore \sin\beta = \frac{4}{5}$,

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{16}{65}$.

17. 解: (1) 乙厂生产的产品总数为 $5 \div \frac{14}{98} = 35$;

(2) 样品中优等品的频率为 $\frac{2}{5}$, 乙厂生产的优等品的数量为 $35 \times \frac{2}{5} = 14$;

(3) $\xi = 0, 1, 2$, $P(\xi = i) = \frac{C_2^i C_3^{2-i}}{C_5^2}$ ($i = 0, 1, 2$), ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

均值 $E(\xi) = 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

18. 解: (1) 取 AD 的中点 G , 又 $PA = PD$, $\therefore PG \perp AD$,

由题意知 $\triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore BG \perp AD$,

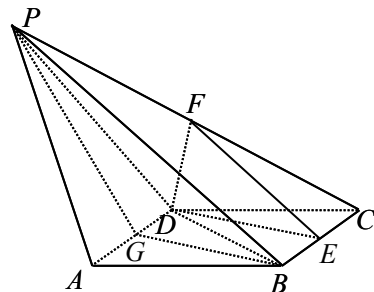
又 PG, BG 是平面 PGB 的两条相交直线,

$\therefore AD \perp$ 平面 PGB ,

$\therefore EF \parallel PB, DE \parallel GB$,

\therefore 平面 $DEF \parallel$ 平面 PGB ,

$\therefore AD \perp$ 平面 DEF



(2) 由 (1) 知 $\angle PGB$ 为二面角 $P-AD-B$ 的平面角,

在 $Rt\triangle PGA$ 中, $PG^2 = \sqrt{2}^2 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{7}{4}$; 在 $Rt\triangle BGA$ 中, $BG^2 = 1^2 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$;

$$\text{在 } \triangle PGB \text{ 中, } \cos \angle PGB = \frac{PG^2 + BG^2 - PB^2}{2PG \cdot BG} = -\frac{\sqrt{21}}{7}.$$

19. 解: (1) 两圆半径都为2, 设圆C的半径为R, 两圆心为 $F_1(-\sqrt{5}, 0)$ 、 $F_2(\sqrt{5}, 0)$,

由题意得 $R = |CF_1| - 2 = |CF_2| + 2$ 或 $R = |CF_2| - 2 = |CF_1| + 2$,

$$\therefore ||CF_1| - |CF_2|| = 4 < 2\sqrt{5} = |F_1F_2|,$$

可知圆心C的轨迹是以 F_1, F_2 为焦点的双曲线, 设方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 则

$$2a = 4, a = 2, c = \sqrt{5}, b^2 = c^2 - a^2 = 1, b = 1, \text{ 所以轨迹L的方程为 } \frac{x^2}{4} - y^2 = 1.$$

(2) $\because ||MP| - |FP|| \leq |MF| = 2$, 仅当 $\overline{PM} = \lambda \overline{PF} (\lambda > 0)$ 时, 取 " $=$ ",

由 $k_{MF} = -2$ 知直线 $l_{MF}: y = -2(x - \sqrt{5})$, 联立 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 并整理得

$$15x^2 - 32\sqrt{5}x + 9 = 0 \text{ 解得 } x = \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ 或 } x = \frac{14\sqrt{5}}{15} \text{ (舍去)}, \text{ 此时 } P(\frac{6\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5})$$

所以 $||MP| - |FP||$ 最大值等于2, 此时 $P(\frac{3\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5})$.

20. 解 (1) 法一: $\frac{a_n}{n} = \frac{ba_{n-1}}{a_{n-1} + 2(n-1)}$, 得 $\frac{n}{a_n} = \frac{a_{n-1} + 2(n-1)}{ba_{n-1}} = \frac{1}{b} + \frac{2}{b} \cdot \frac{n-1}{a_{n-1}}$,

设 $\frac{n}{a_n} = b_n$, 则 $b_n = \frac{2}{b} \cdot b_{n-1} + \frac{1}{b} (n \geq 2)$,

(i) 当 $b = 2$ 时, $\{b_n\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列,

$$\text{即 } b_n = \frac{1}{2} + (n-1) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n, \therefore a_n = 2$$

(ii) 当 $b \neq 2$ 时, 设 $b_n + \lambda = \frac{2}{b} \cdot (b_{n-1} + \lambda)$, 则 $b_n = \frac{2}{b} \cdot b_{n-1} + \lambda(\frac{2}{b} - 1)$,

令 $\lambda(\frac{2}{b} - 1) = \frac{1}{b}$, 得 $\lambda = \frac{1}{2-b}$, $\therefore b_n + \frac{1}{2-b} = \frac{2}{b} \cdot (b_{n-1} + \frac{1}{2-b}) (n \geq 2)$,

知 $b_n + \frac{1}{2-b}$ 是等比数列, $\therefore b_n + \frac{1}{2-b} = (b_1 + \frac{1}{2-b}) \cdot (\frac{2}{b})^{n-1}$, 又 $b_1 = \frac{1}{b}$,

$$\therefore b_n = \frac{1}{2-b} \cdot \left(\frac{2}{b}\right)^n - \frac{1}{2-b} = \frac{1}{2-b} \cdot \frac{2^n - b^n}{b^n}, \therefore a_n = \frac{nb^n(2-b)}{2^n - b^n}.$$

法二：（i）当 $b=2$ 时， $\{b_n\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项， $\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列，

$$\text{即 } b_n = \frac{1}{2} + (n-1) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n, \therefore a_n = 2$$

$$\text{(ii) 当 } b \neq 2 \text{ 时, } a_1 = b, a_2 = \frac{2b^2}{b+2} = \frac{2b^2(b-2)}{b^2-2^2}, a_3 = \frac{3b^3}{b^2+2b+4} = \frac{3b^3(b-2)}{b^3-2^3},$$

猜想 $a_n = \frac{nb^n(b-2)}{b^n-2^n}$ ，下面用数学归纳法证明：

①当 $n=1$ 时，猜想显然成立；

②假设当 $n=k$ 时， $a_k = \frac{kb^k(b-2)}{b^k-2^k}$ ，则

$$a_{k+1} = \frac{(k+1)b \cdot a_k}{a_k + 2(n-1)} = \frac{(k+1)b \cdot kb^k(b-2)}{kb^k(b-2) + 2k \cdot (b^k - 2^k)} = \frac{(k+1)b^{k+1}(b-2)}{b^{k+1} - 2^{k+1}},$$

所以当 $n=k+1$ 时，猜想成立，

$$\text{由①②知, } \forall n \in N^*, a_n = \frac{nb^n(b-2)}{b^n-2^n}.$$

（2）（i）当 $b=2$ 时， $a_n = 2 = \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}} + 1$ ，故 $b=2$ 时，命题成立；

（ii）当 $b \neq 2$ 时， $b^{2n} + 2^{2n} \geq 2\sqrt{b^{2n} \cdot 2^{2n}} = 2^{n+1}b^n$ ，

$$b^{2n-1} \cdot 2 + b \cdot 2^{2n-1} \geq 2\sqrt{b^{2n} \cdot 2^{2n}} = 2^{n+1}b^n,$$

……， $b^{n+1} \cdot 2^{n-1} + b^{n-1} \cdot 2^{n+1} \geq 2\sqrt{b^{2n} \cdot 2^{2n}} = 2^{n+1}b^n$ ，以上 n 个式子相加得

$$b^{2n} + b^{2n-1} \cdot 2 + \dots + b^{n+1} \cdot 2^{n-1} + b^{n-1} \cdot 2^{n+1} + \dots + b \cdot 2^{2n-1} + 2^{2n} \geq n \cdot 2^{n+1}b^n,$$

$$a_n = \frac{n \cdot 2^{n+1}b^n(b-2)}{2^{n+1}(b^n-2^n)} \leq \frac{[(b^{2n} + b^{2n-1} \cdot 2 + \dots + b \cdot 2^{2n-1} + 2^{2n}) - b^n \cdot 2^n](b-2)}{2^{n+1}(b^n-2^n)}$$

$$= \frac{(b^{2n} + b^{2n-1} \cdot 2 + \dots + b \cdot 2^{2n-1} + 2^{2n})(b-2) - b^n \cdot 2^n(b-2)}{2^{n+1}(b^n-2^n)}$$

$$= \frac{(b^{2n+1} - 2^{2n+1}) - b^{n+1} \cdot 2^n + b^n \cdot 2^{n+1}}{2^{n+1}(b^n-2^n)}$$

$$= \frac{(b^{2n+1} - b^{n+1} \cdot 2^n) + (b^n \cdot 2^{n+1} - 2^{2n+1})}{2^{n+1}(b^n-2^n)} = \frac{b^{n+1}}{2^{n+1}} + 1. \text{ 故当 } b \neq 2 \text{ 时, 命题成立;}$$

综上 (i) (ii) 知命题成立.

21. 解: (1) $k_{AB} = y'|_{x=p_0} = \left(\frac{1}{2}x\right)|_{x=p_0} = \frac{1}{2}p_0$,

直线AB的方程为 $y - \frac{1}{4}p_0^2 = \frac{1}{2}p_0(x - p_0)$, 即 $y = \frac{1}{2}p_0x - \frac{1}{4}p_0^2$,

$\therefore q = \frac{1}{2}p_0p - \frac{1}{4}p_0^2$, 方程 $x^2 - px + q = 0$ 的判别式 $\Delta = p^2 - 4q = (p - p_0)^2$,

两根 $x_{1,2} = \frac{p \pm |p_0 - p|}{2} = \frac{p_0}{2}$ 或 $p - \frac{p_0}{2}$,

$\therefore p \cdot p_0 \geq 0$, $\therefore |p - \frac{p_0}{2}| = ||p| - |\frac{p_0}{2}||$, 又 $0 \leq |p| \leq |p_0|$,

$\therefore -|\frac{p_0}{2}| \leq |p| - |\frac{p_0}{2}| \leq |\frac{p_0}{2}|$, 得 $\therefore |p - \frac{p_0}{2}| = ||p| - |\frac{p_0}{2}|| \leq |\frac{p_0}{2}|$,

$\therefore \varphi(p, q) = |\frac{p_0}{2}|$.

(2) 由 $a^2 - 4b > 0$ 知点 $M(a, b)$ 在抛物线L的下方,

①当 $a > 0, b \geq 0$ 时, 作图可知, 若 $M(a, b) \in X$, 则 $p_1 > p_2 \geq 0$, 得 $|p_1| > |p_2|$;

若 $|p_1| > |p_2|$, 显然有点 $M(a, b) \in X$; $\therefore M(a, b) \in X \Leftrightarrow |p_1| > |p_2|$.

②当 $a > 0, b < 0$ 时, 点 $M(a, b)$ 在第二象限,

作图可知, 若 $M(a, b) \in X$, 则 $p_1 > 0 > p_2$, 且 $|p_1| > |p_2|$;

若 $|p_1| > |p_2|$, 显然有点 $M(a, b) \in X$;

$\therefore M(a, b) \in X \Leftrightarrow |p_1| > |p_2|$.

根据曲线的对称性可知, 当 $a < 0$ 时, $M(a, b) \in X \Leftrightarrow |p_1| > |p_2|$,

综上所述, $M(a, b) \in X \Leftrightarrow |p_1| > |p_2|$ (*);

由 (1) 知点M在直线EF上, 方程 $x^2 - ax + b = 0$ 的两根 $x_{1,2} = \frac{p_1}{2}$ 或 $a - \frac{p_1}{2}$,

同理点M在直线E'F'上, 方程 $x^2 - ax + b = 0$ 的两根 $x_{1,2} = \frac{p_2}{2}$ 或 $a - \frac{p_2}{2}$,

若 $\varphi(a, b) = |\frac{p_1}{2}|$, 则 $|\frac{p_1}{2}|$ 不比 $|a - \frac{p_1}{2}|$ 、 $|\frac{p_2}{2}|$ 、 $|a - \frac{p_2}{2}|$ 小,

$\therefore |p_1| > |p_2|$, 又 $|p_1| > |p_2| \Rightarrow M(a, b) \in X$,

$\therefore \varphi(a, b) = \left| \frac{p_1}{2} \right| \Rightarrow M(a, b) \in X$; 又由 (1) 知, $M(a, b) \in X \Rightarrow \varphi(a, b) = \left| \frac{p_1}{2} \right|$;

$\therefore \varphi(a, b) = \left| \frac{p_1}{2} \right| \Leftrightarrow M(a, b) \in X$, 综合 (*) 式, 得证.

(3) 联立 $y = x - 1$, $y = \frac{1}{4}(x+1)^2 - \frac{5}{4}$ 得交点 $(0, -1), (2, 1)$, 可知 $0 \leq p \leq 2$,

过点 (p, q) 作抛物线 L 的切线, 设切点为 $(x_0, \frac{1}{4}x_0^2)$, 则 $\frac{\frac{1}{4}x_0^2 - q}{x_0 - p} = \frac{1}{2}x_0$,

得 $x_0^2 - 2px_0 + 4q = 0$, 解得 $x_0 = p + \sqrt{p^2 - 4q}$,

又 $q \geq \frac{1}{4}(p+1)^2 - \frac{5}{4}$, 即 $p^2 - 4q \leq 4 - 2p$,

$\therefore x_0 \leq p + \sqrt{4 - 2p}$, 设 $\sqrt{4 - 2p} = t$, $\therefore x_0 \leq -\frac{1}{2}t^2 + t + 2 = -\frac{1}{2}(t-1)^2 + \frac{5}{2}$,

$\therefore \varphi_{\max} = \left| \frac{x_0}{2} \right|_{\max}$, 又 $x_0 \leq \frac{5}{2}$, $\therefore \varphi_{\max} = \frac{5}{4}$;

$\therefore q \leq p - 1$, $\therefore x_0 \geq p + \sqrt{p^2 - 4p + 4} = p + |p - 2| = 2$,

$\therefore \varphi_{\min} = \left| \frac{x_0}{2} \right|_{\min} = 1$.

【广东卷】（理科数学）

本试卷分**第I卷**（选择题）和**第II卷**（非选择题）两部分，第I卷第1至第2页，第II卷第3页至第4页。全卷满分150分，考试时间120分钟。

第I卷（选择题 共60分）

一、选择题：（每小题5分，共60分）

【2011·广东理，1】1. 设复数 z 满足 $(1+i)z=2$ ，其中 i 为虚数单位，则 $z=(\quad)$ 。

- A. $1+i$ B. $1-i$ C. $2+2i$ D. $2-2i$

【答案】B.

【解析】依题意得 $z=\frac{2}{1+i}=1-i$ ，故选B.

【2011·广东理，2】2. 已知集合 $A=\{(x,y)|x,y$ 为实数,且 $x^2+y^2=1\}$ ， $B=\{(x,y)|x,y$ 为实数,且 $y=x\}$ ，则 $A\cap B$ 的元素个数为()。

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【答案】C.

【解析】题意等价于求直线 $y=x$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 的交点个数，画大致图像可得答案。

【2011·广东理，3】3. 若向量 a ， b ， c 满足 $a\parallel b$ 且 $a\perp c$ ，则 $c\cdot(a+2b)=(\quad)$ 。

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

【答案】D.

【解析】因为 $a\parallel b$ 且 $a\perp c$ ，所以 $b\perp c$ ，从而 $c\cdot(a+2b)=c\cdot a+2c\cdot b=0$ 。

【2011·广东理，4】4. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别是实数集 \mathbf{R} 上的偶函数和奇函数，则下列结论恒成立的是()。

- A. $f(x)+|g(x)|$ 是偶函数 B. $f(x)-|g(x)|$ 是奇函数
C. $|f(x)|+g(x)$ 是偶函数 D. $|f(x)|-g(x)$ 是奇函数

【答案】A.

【解析】 依题意 $f(-x) = f(x), g(-x) = -g(x)$, 故 $f(-x) + |g(-x)| = f(x) + |g(x)|$, 从而 $f(x) + |g(x)|$ 是偶函数, 故选A.

【2011·广东理, 5】5. 已知平面直角坐标系 xOy 上的区域 D 由不等式组 $\begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{2} \\ y \leq 2 \\ x \leq \sqrt{2}y \end{cases}$ 给定.

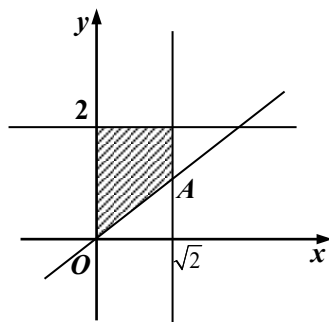
若 $M(x, y)$ 为 D 上的动点, 点 A 的坐标为 $(\sqrt{2}, 1)$, 则

$z = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA}$ 的最大值为 ().

- A. $4\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. 4 D. 3

【答案】 C.

【解析】 目标函数即 $z = \sqrt{2}x + y$, 画出可行域如图所示, 代入端点比较之, 易得当 $x = \sqrt{2}, y = 2$ 时 z 取得最大值 4, 故选C.



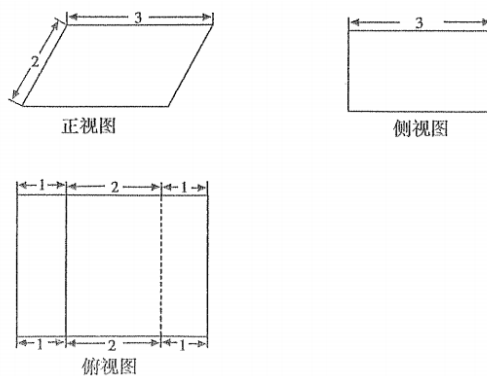
【2011·广东理, 6】6. 甲、乙两队进行排球决赛, 现在的情形是甲队只要再赢一局就获冠军, 乙队需要再赢两局才能得冠军. 若两队胜每局的概率相同, 则甲队获得冠军的概率为().

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

【答案】 D.

【解析】 设甲队获得冠军为事件 A , 则 A 包含两种情况: (1) 第一局胜; (2) 第一局负但第二局胜; 故所求概率 $P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$, 从而选D.

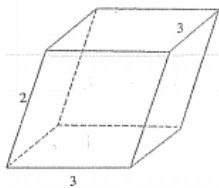
【2011·广东理, 7】7. 如图, 某几何体的正视图 (主视图) 是平行四边形, 侧视图 (左视图) 和俯视图都是矩形, 则该几何体的体积为().



- A. $6\sqrt{3}$ B. $9\sqrt{3}$ C. $12\sqrt{3}$ D. $18\sqrt{3}$

【答案】 B.

【解析】 该几何体是以正视图所在的平行四边形为底面，高为3的四棱柱，又平行四边形的底边长为3，高为 $\sqrt{3}$ ，所以面积 $S = 3\sqrt{3}$ ，从而所求几何体的体积 $V = Sh = 9\sqrt{3}$ ，故选B.



【2011·广东理，8】 8. 设 S 是整数集 Z 的非空子集，如果 $\forall a, b \in S$ ，有 $ab \in S$ ，则称 S 关于数的乘法是封闭的. 若 T, V 是 Z 的两个不相交的非空子集，

$T \cup V = Z$ ，且 $\forall a, b, c \in T$ ，有 $abc \in T$ ； $\forall x, y, z \in V$ ，有 $xyz \in V$ ，则下列结论恒成立的是 ().

- A. T, V 中至少有一个关于乘法是封闭的 B. T, V 中至多有一个关于乘法是封闭的
C. T, V 中有且只有一个关于乘法是封闭的 D. T, V 中每一个关于乘法都是封闭的

【答案】 A.

【解析】

因为 $T \cup V = Z$ ，故必有 $1 \in T$ 或 $1 \in V$ ，不妨设 $1 \in T$ ，则令 $c = 1$ ，依题意对 $\forall a, b \in T$ ，有 $ab \in T$ ，从而 T 关于乘法是封闭的；(其实到此已经可以选A了，但为了严谨，我们往下证明可以有一个不封闭以及可以两个都封闭)，取 $T = N$ ，则 V 为所有负整数组成的集合，显然 T 封闭，但

V 显然是不封闭的, 如 $(-1) \times (-2) = 2 \notin V$; 同理, 若 $T = \{\text{奇数}\}$, $V = \{\text{偶数}\}$, 显然两者都封闭, 从而选 A.

二、填空题: 本大题共 7 小题. 考生作答 6 小题. 每小题 5 分, 满分 30 分.

(一) 必做题 (9~13 题)

【2011·广东理, 9】9. 不等式 $|x+1| - |x-3| \geq 0$ 的解集是_____.

【答案】 $[1, +\infty)$.

【解析】 解法一: 原不等式 $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ -(x+1) - (3-x) \geq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -1 < x \leq 3 \\ x+1 - (3-x) \geq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x > 3 \\ x+1 - (x-3) \geq 0 \end{cases}$,

解得 $x \geq 1$, 从而原不等式的解集为 $[1, +\infty)$.

解法二(首选): $|x+1| - |x-3|$ 的几何意义为到点 -1 的距离与到点 3 的距离的差, 画出数轴易得 $x \geq 1$.

解法三: 不等式即 $|x+1| \geq |x-3|$, 平方得 $x^2 + 2x + 1 \geq x^2 - 6x + 9$, 解得 $x \geq 1$.

【2011·广东理, 10】10. $x(x - \frac{2}{x})^7$ 的展开式中 x^4 的系数是_____ (用数字作答).

【答案】 84.

【解析】 题意等价于求 $(x - \frac{2}{x})^7$ 的展开式中 x^3 的系数 $T_{k+1} = (-2)^k C_7^k x^{7-2k}$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots, 7$,

令 $7 - 2k = 3$ 得 $k = 2$, 故所求系数为 $4C_7^2 = 84$.

【2011·广东理, 11】11. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 9 项和等于前 4 项和, 若 $a_1 = 1, a_k + a_4 = 0$, 则

$k =$ _____.

【答案】 10.

【解析】 由 $S_9 = S_4$ 得 $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 5a_7 = 0$, $a_k + a_4 = 0 = 2a_7 = a_4 + a_{10}$, 故 $k = 10$.

【2011·广东理, 12】12. 函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 在 $x =$ ___ 处取得极小值.

【答案】 2.

【解析】 $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, 当 $x < 0$ 或 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $0 < x < 2$ 时,

$f'(x) < 0$, 故当 $x = 2$ 时, $f(x)$ 取得极小值.

【2011·广东理，12】13

某数学老师身高176cm，他爷爷，父亲，儿子的身高分别是173cm,170cm和182cm，因儿子的身高与父亲的身高有关，该老师用线性回归分析的方法预测他孙子的身高是__ cm.

【答案】 185.

【解析】抓住“儿子的身高与父亲的身高有关”提炼数据(173,170),(170,176),(176,182),易得平均值 $\bar{x}=173, \bar{y}=176$, 于是 $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 3 \times 6 = 18$, $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 18$,

从而 $\hat{b}=1$, $\hat{a}=176-1 \times 173=3$, 所以线性回归方程为 $\hat{y}=x+3$, 当 $x=182$ 时, $\hat{y}=185$

第 II 卷 (非选择题 共90分)

(二) 选做题 (14、15题, 考生只能从中选做一题)

二、填空题: (每小题5分, 共25分)

【2011·广东理, 14】14. (坐标系与参数方程选做题) 已知两曲线参数方程分别为

$$\begin{cases} x = \sqrt{5} \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases} (0 \leq \theta < \pi) \text{ 和 } \begin{cases} x = \frac{5}{4} t^2 \\ y = t \end{cases} (t \in \mathbb{R}), \text{ 它们的交点坐标为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $(1, \frac{2\sqrt{5}}{5})$.

【解析】对应普通方程为 $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1 (-\sqrt{5} < x \leq \sqrt{5}, 0 \leq y \leq 1)$, $y^2 = \frac{4}{5}x$, 联立方程消去 y 得

$x^2 + 4x - 5 = 0$, 解得 $x=1$ 或 $x=-5$ (舍去), 于是 $x=1, y = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 故所求交点坐标为

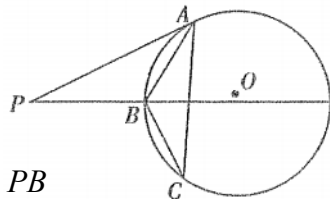
$(1, \frac{2\sqrt{5}}{5})$.

【2011·广东理, 15】15. (几何证明选讲选做题) 如图4, 过圆 O 外一点 P 分别做圆的切线和割线交圆于 A, B 两点, 且 $PB=7, C$ 是圆上一点使得 $BC=5, \angle BAC = \angle APB$, 则 $AB = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\sqrt{35}$.

【解析】结合弦切角定理易得 $\triangle ABP \sim \triangle CBA$, 于是 $\frac{AB}{BC} = \frac{PB}{AB}$,

代入数据解得 $AB = \sqrt{35}$.



三、解答题：（本大题共6小题，共80分）

【2011·广东理，16】16. （本小题满分12分）已知函数 $f(x) = 2\sin(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{6})$, $x \in R$.

(I) 求 $f(\frac{5\pi}{4})$ 的值;

(II) 设 $\alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(3\alpha + \frac{\pi}{2}) = \frac{10}{13}$, $f(3\beta + 2\pi) = \frac{6}{5}$, 求 $\cos(\alpha + \beta)$ 的值.

【解析】.

$$(I) f(\frac{5\pi}{4}) = 2\sin(\frac{1}{3} \cdot \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) = 2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2};$$

$$(II) \text{ 因为 } f(3\alpha + \frac{\pi}{2}) = 2\sin(\alpha + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}) = 2\sin\alpha = \frac{10}{13}, \text{ 所以 } \sin\alpha = \frac{5}{13},$$

$$\text{因为 } f(3\beta + 2\pi) = 2\sin(\beta + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) = 2\sin(\beta + \frac{\pi}{2}) = 2\cos\beta = \frac{6}{5}, \text{ 所以 } \cos\beta = \frac{3}{5},$$

$$\text{又 } \alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}], \text{ 所以 } \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{12}{13}, \sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \frac{4}{5},$$

$$\text{所以 } \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{12}{13} \times \frac{3}{5} - \frac{5}{13} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{65}.$$

【2011·广东理，17】17. （本小题满分13分）为了解甲、乙两厂的产品质量，采取分层抽样的方法从甲、乙两厂的产品中分别抽取14件和5件，测量产品中微量元素 x, y 的含量（单位：毫克）。下表是乙厂的5件产品的测量数据：

编号	1	2	3	4	5
x	169	178	166	175	180
y	75	80	77	70	81

(I) 已知甲厂生产的产品共有98件，求乙厂生产的产品数量；

(II)

当产品中微量元素 x, y 满足 $x \geq 175$ 且 $y \geq 75$ 时，该产品为优等品。用上述样本数据估计乙厂生产的优等品的数量；

(III)

从乙厂抽出的上述5件产品中，随即抽取2件，求抽出的2件产品中优等品数 ξ 的分布列及其均值（即数学期望）。

【解析】.

解：(I) 乙厂生产的产品数量为 $98 \times \frac{5}{14} = 35$ 件；

(II)

样本中满足 $x \geq 175$ ，且 $y \geq 75$ 的产品有2件，故样本频率为 $\frac{2}{5}$ ，则可估计乙厂生产的优等品数

量为 $35 \times \frac{2}{5} = 14$ 件;

(III) ξ 的可能取值为 0, 1, 2, 且 $P(\xi = 0) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$, $P(\xi = 1) = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{3}{5}$,

$P(\xi = 2) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$. 【或者 $P(\xi = i) = \frac{C_2^i C_3^{2-i}}{C_5^2}$ ($i = 0, 1, 2$)】

故 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

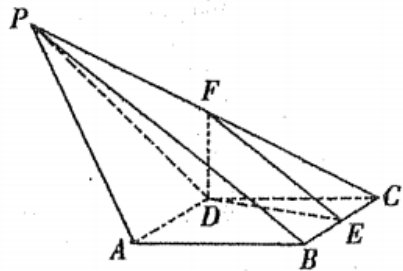
ξ 的数学期望 $E\xi = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{4}{5}$.

【2011·广东理, 18】18. (本小题满分13分) 如图, 在锥体 $P-ABCD$ 中, $ABCD$ 是边长为 1 的菱形, 且 $\angle DBA = 60^\circ$, $PA = PD = \sqrt{2}$, $PB = 2$, E, F 分别是 BC, PC 的中点

(I) 证明: $AD \perp$ 平面 DEF ;

(II) 求二面角 $P-AD-B$ 的平面角.

【解析】.



(I) 取 AD 的中点 G , 又 $PA = PD$, $\therefore PG \perp AD$,

由题意知 $\triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore BG \perp AD$,

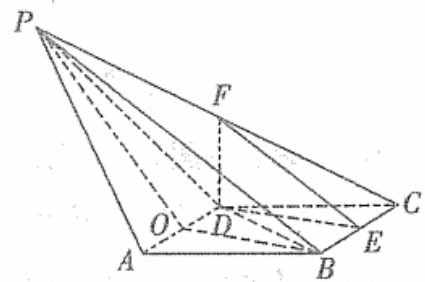
又 PG, BG 是平面 PGB 的两条相交直线,

$\therefore AD \perp$ 平面 PGB ,

$\because EF \parallel PB, DE \parallel GB$,

\therefore 平面 $DEF \parallel$ 平面 PGB ,

$\therefore AD \perp$ 平面 DEF



(II) 由 (1) 知 $\angle PGB$ 为二面角 $P-AD-B$ 的平面角,

在 $Rt\triangle PGA$ 中, $PG^2 = \sqrt{2}^2 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{7}{4}$; 在 $Rt\triangle BGA$ 中, $BG^2 = 1^2 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$;

在 $\triangle PGB$ 中, $\cos \angle PGB = \frac{PG^2 + BG^2 - PB^2}{2PG \cdot BG} = -\frac{\sqrt{21}}{7}$.

另解：（I）连接 AE, BD ,

因为 $ABCD$ 是边长为1的菱形，且 $\angle DAB = 60^\circ$ ，
 E 是 BC 的中点，所以 $\triangle ABD, \triangle BCD$ 均为正三角形，

且 $DE = \frac{\sqrt{3}}{2}, BE = \frac{1}{2}, \angle ABE = 120^\circ$,

$$\text{所以 } AE^2 = AB^2 + BE^2 - 2AB \cdot BE \cdot \cos \angle ABE = \frac{7}{4}$$

$$\text{所以 } AD^2 + DE^2 = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} = AE^2, \text{ 从而 } AD \perp DE,$$

取 AD 的中点 M ，连接 PM, BM ，因为 $PA = PD, BA = BD$ ，所以
 $PM \perp AD, BM \perp AD$,

又 $PM \cap BM = M$ ，所以 $AD \perp$ 平面 PBM ，所以 $AD \perp PB$ ，

在 $\triangle BCP$ 中，因为 E, F 分别是 BC, PC 的中点，所以 $EF \parallel PB$ ，所以 $AD \perp EF$

又 $EF \cap DE = E$ ，所以 $AD \perp$ 平面 DEF 。

（II）解法一：由（I）知 $\angle BMP$ 为二面角 $P-AD-B$ 的平面角，

$$\text{易得 } BM = \frac{\sqrt{3}}{2}, PM = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

$$\text{在 } \triangle BPM \text{ 中, } PB = 2, \text{ 由余弦定理得 } \cos \angle BMP = \frac{BM^2 + PM^2 - PB^2}{2BM \cdot PM} = -\frac{\sqrt{21}}{7}$$

$$\text{所以二面角 } P-AD-B \text{ 的余弦值为 } -\frac{\sqrt{21}}{7}.$$

解法二：先证明 $DF \perp$ 平面 $ABCD$ ，即证明 $DF \perp DE$ 即可，

$$\text{在 } Rt\triangle PBC \text{ 中, } PC = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}; \text{ 在 } \triangle PDC \text{ 中, } \cos \angle DCP = \frac{1^2 + (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2}{2 \times 1 \times \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{所以在 } \triangle FDC \text{ 中, } DF^2 = 1^2 + (\frac{\sqrt{5}}{2})^2 - 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{4}, DF = \frac{1}{2}.$$

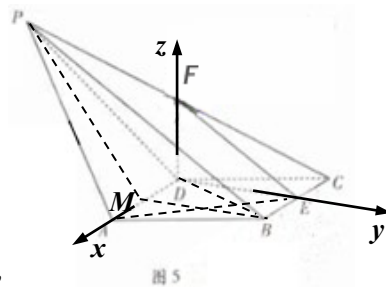
在 $\triangle DEF$ 中， $DE^2 + DF^2 = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{4} = 1 = EF^2$ ，故 $\triangle DEF$ 为直角三角形，从而
 $DF \perp DE$ 。

建立空间直角坐标系 $D-xyz$ 如图所示，则 $D(0,0,0), A(1,0,0), P(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ ，

所以 $\overline{DA} = (1,0,0), \overline{DP} = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ ，设平面 PAD 的一个法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x, y, z)$ ，则

$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overline{DA} = 0 \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overline{DP} = 0 \end{cases}, \text{ 从而 } \begin{cases} x = 0 \\ -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + z = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = 0 \\ z = \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}, \text{ 令 } y = 2 \text{ 得 } \mathbf{n}_1 = (0, 2, \sqrt{3})$$

显然平面 DAB 的一个法向量为 $\mathbf{n}_2 = (0,0,1)$ ，



从而 $\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7} \cdot 1} = \frac{\sqrt{21}}{7}$, 所以二面角 $P-AD-B$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{21}}{7}$.

【2011·广东理, 19】19. (本小题满分14分) 设圆 C 与两圆

$(x+\sqrt{5})^2 + y^2 = 4, (x-\sqrt{5})^2 + y^2 = 4$ 中的一个内切, 另一个外切.

(I) 求圆 C 的圆心轨迹 L 的方程;

(II)

已知点 $M(\frac{3\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}), F(\sqrt{5}, 0)$, 且 P 为 L 上动点, 求 $\|MP\| - \|FP\|$ 的最大值及此时点 P 的坐标.

【解析】.

(I) 设圆 C 的圆心为 $C(x, y)$, 半径为 r , 圆 $(x+\sqrt{5})^2 + y^2 = 4$ 的圆心为 $F_1(-\sqrt{5}, 0)$, 半径为2; 圆 $(x-\sqrt{5})^2 + y^2 = 4$ 的圆心为 $F_2(\sqrt{5}, 0)$, 半径为2; 依题意, 有 $\begin{cases} \|CF_1\| = r+2 \\ \|CF_2\| = r-2 \end{cases}$ 或

$\begin{cases} \|CF_1\| = r-2 \\ \|CF_2\| = r+2 \end{cases}$, 所以 $\|CF_1\| - \|CF_2\| = 4 < 2\sqrt{5} = \|F_1F_2\|$.

所以圆 C 的圆心轨迹 L 是以原点为中心, 焦点在 x 轴上, 焦距为 $2c = 2\sqrt{5}$, 实轴长为 $2a = 4$ 的双曲线, 因此 $a = 2, c = \sqrt{5}, b = 1$, 故轨迹 L 的方程为 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

(II) 易得过点 $M(\frac{3\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}), F(\sqrt{5}, 0)$ 的直线 l 的方程为 $y = -2(x - \sqrt{5})$,

联立方程 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - y^2 = 1 \\ y = -2(x - \sqrt{5}) \end{cases}$, 消去 y 得 $15x^2 - 32\sqrt{5}x + 84 = 0$, 解得 $x_1 = \frac{6\sqrt{5}}{5}, x_2 = \frac{14\sqrt{5}}{15}$,

则直线 l 与双曲线 L 的交点为 $P_1(\frac{6\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}), P_2(\frac{14\sqrt{5}}{15}, \frac{2\sqrt{5}}{15})$,

因为 P_1 在线段 MF 外, 所以 $\|MP_1\| - \|FP_1\| = \|MF\| = \sqrt{(\frac{2\sqrt{5}}{5})^2 + (\frac{4\sqrt{5}}{5})^2} = 2$,

因为 P_2 在线段 MF 内, 所以 $\|MP_2\| - \|FP_2\| < \|MF\|$,

若点 P 不住 MF 上, 则 $\|MP\| - \|FP\| < \|MF\|$,

综上, $\|MP\| - \|FP\|$ 的最大值为2, 此时点 P 的坐标为 $(\frac{6\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5})$.

解析二:

(I) 两圆半径都为2, 设圆C的半径为R, 两圆心为 $F_1(-\sqrt{5}, 0)$ 、 $F_2(\sqrt{5}, 0)$,

由题意得 $R = |CF_1| - 2 = |CF_2| + 2$ 或 $R = |CF_2| - 2 = |CF_1| + 2$,

$$\therefore ||CF_1| - |CF_2|| = 4 < 2\sqrt{5} = |F_1F_2|,$$

可知圆心C的轨迹是以 F_1, F_2 为焦点的双曲线, 设方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 则

$$2a = 4, a = 2, c = \sqrt{5}, b^2 = c^2 - a^2 = 1, b = 1, \text{ 所以轨迹L的方程为 } \frac{x^2}{4} - y^2 = 1.$$

(II) $\because ||MP| - |FP|| \leq |MF| = 2$, 仅当 $\overline{PM} = \lambda \overline{PF} (\lambda > 0)$ 时, 取 " $=$ ",

由 $k_{MF} = -2$ 知直线 $l_{MF}: y = -2(x - \sqrt{5})$, 联立 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 并整理得

$$15x^2 - 32\sqrt{5}x + 9 = 0 \text{ 解得 } x = \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ 或 } x = \frac{14\sqrt{5}}{15} \text{ (舍去), 此时 } P\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right).$$

所以 $||MP| - |FP||$ 最大值等于2, 此时 $P\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$.

【2011·广东理, 20】20. (本小题满分14分) 设 $b > 0$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = b$

$$a_n = \frac{nba_{n-1}}{a_{n-1} + 2n - 2} (n \geq 2).$$

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 证明: 对于一切正整数 n , $a_n \leq \frac{b^{n+1}}{2^{n+1}} + 1$.

【解析】.

(I) 由 $a_n = \frac{nba_{n-1}}{a_{n-1} + 2n - 2}$ 得 $\frac{n}{a_n} = \frac{2}{b} \cdot \frac{n-1}{a_{n-1}} + \frac{1}{b}$,

当 $b = 2$ 时, $\frac{n}{a_n} - \frac{n-1}{a_{n-1}} = \frac{1}{2}$, 所以 $\{\frac{n}{a_n}\}$ 是以首项为 $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}$, 公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列,

所以 $\frac{n}{a_n} = \frac{1}{2} + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$, 从而 $a_n = 2$.

当 $b \neq 2$ 时, $\frac{n}{a_n} + \frac{1}{2-b} = \frac{2}{b} \left(\frac{n-1}{a_{n-1}} + \frac{1}{2-b} \right)$, 所以 $\{\frac{n}{a_n} + \frac{1}{2-b}\}$ 是首项为 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2-b} = \frac{2}{b(2-b)}$,

公比为 $\frac{2}{b}$ 的等比数列, 所以 $\frac{n}{a_n} + \frac{1}{2-b} = \frac{2}{b(2-b)} \cdot \left(\frac{2}{b}\right)^{n-1} = \frac{2^n}{b^n(2-b)}$,

从而 $a_n = \frac{nb^n(2-b)}{2^n - b^n}$.

综上所述，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \begin{cases} 2, & b = 2 \\ \frac{nb^n(2-b)}{2^n - b^n}, & b \neq 2 \end{cases}$

(II) 当 $b = 2$ 时，不等式显然成立；

当 $b \neq 2$ 时，要证 $a_n \leq \frac{b^{n+1}}{2^{n+1}} + 1$ ，只需证 $\frac{nb^n(2-b)}{2^n - b^n} \leq \frac{b^{n+1}}{2^{n+1}} + 1$ ，即证

$$n \cdot 2^{n+1} \cdot b^n \leq (2^{n+1} + b^{n+1}) \cdot \frac{b^n - 2^n}{b-2} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } (2^{n+1} + b^{n+1}) \cdot \frac{b^n - 2^n}{b-2} &= (2^{n+1} + b^{n+1})(b^{n-1} + 2b^{n-2} + 2^2b^{n-3} + \cdots + 2^{n-1}) \\ &= (2^{n+1}b^{n-1} + 2^{n+2}b^{n-2} + \cdots + 2^{2n}) + (b^{2n} + 2b^{2n-1} + \cdots + 2^{n-1}b^{n+1}) \\ &= 2^{n+1}b^n \left[\left(\frac{1}{b} + \frac{2}{b^2} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{b^n} \right) + \left(\frac{b^n}{2^{n+1}} + \frac{b^{n-1}}{2^n} + \cdots + \frac{b}{2^2} \right) \right] \\ &= 2^{n+1}b^n \left[\left(\frac{1}{b} + \frac{b}{2^2} \right) + \left(\frac{2}{b^2} + \frac{b^2}{2^3} \right) + \cdots + \left(\frac{2^{n-1}}{b^n} + \frac{b^n}{2^{n+1}} \right) \right] \\ &\geq 2^{n+1}b^n \left(2\sqrt{\frac{1}{b} \cdot \frac{b}{2^2}} + 2\sqrt{\frac{2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{2^3}} + \cdots + 2\sqrt{\frac{2^{n-1}}{b^n} \cdot \frac{b^n}{2^{n+1}}} \right) = 2^{n+1}b^n(1+1+\cdots+1) = n2^{n+1}b^n \end{aligned}$$

所以不等式 (*) 成立，从而原不等式成立；

综上所述，当 $b > 0$ 时，对于一切正整数 n ， $a_n \leq \frac{b^{n+1}}{2^{n+1}} + 1$ 。

解析二：

(I) 解法一： $\frac{a_n}{n} = \frac{ba_{n-1}}{a_{n-1} + 2(n-1)}$ ，得 $\frac{n}{a_n} = \frac{a_{n-1} + 2(n-1)}{ba_{n-1}} = \frac{1}{b} + \frac{2}{b} \cdot \frac{n-1}{a_{n-1}}$ ，

设 $\frac{n}{a_n} = b_n$ ，则 $b_n = \frac{2}{b} \cdot b_{n-1} + \frac{1}{b} (n \geq 2)$ ，

(i) 当 $b = 2$ 时， $\{b_n\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项， $\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列，

即 $b_n = \frac{1}{2} + (n-1) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n$ ， $\therefore a_n = 2$

(ii) 当 $b \neq 2$ 时，设 $b_n + \lambda = \frac{2}{b} \cdot (b_{n-1} + \lambda)$ ，则 $b_n = \frac{2}{b} \cdot b_{n-1} + \lambda \left(\frac{2}{b} - 1 \right)$ ，

令 $\lambda \left(\frac{2}{b} - 1 \right) = \frac{1}{b}$ ，得 $\lambda = \frac{1}{2-b}$ ， $\therefore b_n + \frac{1}{2-b} = \frac{2}{b} \cdot (b_{n-1} + \frac{1}{2-b}) (n \geq 2)$ ，

知 $b_n + \frac{1}{2-b}$ 是等比数列， $\therefore b_n + \frac{1}{2-b} = (b_1 + \frac{1}{2-b}) \cdot \left(\frac{2}{b} \right)^{n-1}$ ，又 $b_1 = \frac{1}{b}$ ，

$\therefore b_n = \frac{1}{2-b} \cdot \left(\frac{2}{b} \right)^n - \frac{1}{2-b} = \frac{1}{2-b} \cdot \frac{2^n - b^n}{b^n}$ ， $\therefore a_n = \frac{nb^n(2-b)}{2^n - b^n}$ 。

解法二：（i）当 $b=2$ 时， $\{b_n\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项， $\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列，

$$\text{即 } b_n = \frac{1}{2} + (n-1) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n, \therefore a_n = 2$$

$$\text{(ii) 当 } b \neq 2 \text{ 时, } a_1 = b, a_2 = \frac{2b^2}{b+2} = \frac{2b^2(b-2)}{b^2-2^2}, a_3 = \frac{3b^3}{b^2+2b+4} = \frac{3b^3(b-2)}{b^3-2^3},$$

猜想 $a_n = \frac{nb^n(b-2)}{b^n-2^n}$ ，下面用数学归纳法证明：

①当 $n=1$ 时，猜想显然成立；

②假设当 $n=k$ 时， $a_k = \frac{kb^k(b-2)}{b^k-2^k}$ ，则

$$a_{k+1} = \frac{(k+1)b \cdot a_k}{a_k + 2(n-1)} = \frac{(k+1)b \cdot kb^k(b-2)}{kb^k(b-2) + 2k \cdot (b^k - 2^k)} = \frac{(k+1)b^{k+1}(b-2)}{b^{k+1} - 2^{k+1}},$$

所以当 $n=k+1$ 时，猜想成立，

$$\text{由①②知, } \forall n \in N^*, a_n = \frac{nb^n(b-2)}{b^n-2^n}.$$

(II) (i) 当 $b=2$ 时， $a_n = 2 = \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}} + 1$ ，故 $b=2$ 时，命题成立；

(ii) 当 $b \neq 2$ 时， $b^{2n} + 2^{2n} \geq 2\sqrt{b^{2n} \cdot 2^{2n}} = 2^{n+1}b^n$ ，

$$b^{2n-1} \cdot 2 + b \cdot 2^{2n-1} \geq 2\sqrt{b^{2n} \cdot 2^{2n}} = 2^{n+1}b^n,$$

$$\dots, b^{n+1} \cdot 2^{n-1} + b^{n-1} \cdot 2^{n+1} \geq 2\sqrt{b^{2n} \cdot 2^{2n}} = 2^{n+1}b^n, \text{ 以上 } n \text{ 个式子相加得}$$

$$b^{2n} + b^{2n-1} \cdot 2 + \dots + b^{n+1} \cdot 2^{n-1} + b^{n-1} \cdot 2^{n+1} + \dots + b \cdot 2^{2n-1} + 2^{2n} \geq n \cdot 2^{n+1}b^n,$$

$$a_n = \frac{n \cdot 2^{n+1}b^n(b-2)}{2^{n+1}(b^n-2^n)} \leq \frac{[(b^{2n} + b^{2n-1} \cdot 2 + \dots + b \cdot 2^{2n-1} + 2^{2n}) - b^n \cdot 2^n](b-2)}{2^{n+1}(b^n-2^n)}$$

$$= \frac{(b^{2n} + b^{2n-1} \cdot 2 + \dots + b \cdot 2^{2n-1} + 2^{2n})(b-2) - b^n \cdot 2^n(b-2)}{2^{n+1}(b^n-2^n)}$$

$$= \frac{(b^{2n+1} - 2^{2n+1}) - b^{n+1} \cdot 2^n + b^n \cdot 2^{n+1}}{2^{n+1}(b^n-2^n)}$$

$$= \frac{(b^{2n+1} - b^{n+1} \cdot 2^n) + (b^n \cdot 2^{n+1} - 2^{2n+1})}{2^{n+1}(b^n-2^n)} = \frac{b^{n+1}}{2^{n+1}} + 1. \text{ 故当 } b \neq 2 \text{ 时, 命题成立;}$$

综上 (i) (ii) 知命题成立。

【2011·广东理，21】21. （本小题满分14分）在平面直角坐标系 xOy 上，给定抛物线

$L: y = \frac{1}{4}x^2$ ，实数 p, q 满足 $p^2 - 4q \geq 0$ ， x_1, x_2 是方程 $x^2 - px + q = 0$ 的两根，记

$$\varphi(p, q) = \max\{|x_1|, |x_2|\}.$$

(1) 过点 $A(p_0, \frac{1}{4}p_0^2)$ ($p_0 \neq 0$) 作 L 的切线交 y 轴于点 B . 证明: 对线段 AB 上的任一点

$$Q(p, q), \text{ 有 } \varphi(p, q) = \frac{|p_0|}{2};$$

(2)

设 $M(a, b)$ 是定点, 其中 a, b 满足 $a^2 - 4b > 0, a \neq 0$. 过 $M(a, b)$ 作 L 的两条切线 l_1, l_2 , 切点分别为 $E(p_1, \frac{1}{4}p_1^2), E'(p_2, \frac{1}{4}p_2^2)$, l_1, l_2 与 y 轴分别交于 F, F' . 线段 EF 上异于两端点的点

集记为 X , 证明: $M(a, b) \in X \Leftrightarrow |p_1| > |p_2| \Leftrightarrow \varphi(a, b) = \frac{|p_1|}{2}$;

(3)

设 $D = \{(x, y) \mid y \leq x - 1, y \geq \frac{1}{4}(x+1)^2 - \frac{5}{4}\}$, 当点 (p, q) 取遍 D 时, 求 $\varphi(p, q)$ 的最小值

(记为 φ_{\min}) 和最大值 (记为 φ_{\max}).

【解析】

(I) 因为 $y' = \frac{1}{2}x$, 所以 $y'|_{x=p_0} = \frac{1}{2}p_0$, 过点 A 的切线方程为 $y - \frac{1}{4}p_0^2 = \frac{1}{2}p_0(x - p_0)$

即 $y = \frac{p_0}{2}x - \frac{p_0^2}{4}$, 从而 $B(0, -\frac{p_0^2}{4})$, 又 $Q(p, q)$ 在直线 AB 上, 故 $q = \frac{p_0 p}{2} - \frac{p_0^2}{4}$, 其中

$$0 \leq p \leq |p_0|$$

所以方程为 $x^2 - px + \frac{p_0 p}{2} - \frac{p_0^2}{4} = 0$, 解得 $x_1 = \frac{p_0}{2}, x_2 = p - \frac{p_0}{2}$

由于 $0 \leq p \leq |p_0|$, 且 p, p_0 同号, 所以 $|x_2| = |p - \frac{p_0}{2}| = \frac{|p_0|}{2} = |x_1|$, 所以 $\varphi(p, q) = \frac{|p_0|}{2}$.

(II) 过点 $M(a, b)$ 且切点为 $E(p_1, \frac{1}{4}p_1^2)$ 的 L 的切线 l_1 方程为 $EF: y = \frac{p_1}{2}x - \frac{p_1^2}{4}$

因为 $M(a, b) \in l_1$, 所以 $b = \frac{p_1}{2}a - \frac{p_1^2}{4}$ 且 $0 < |a| < |p_1|$, 因为 $E'(p_2, \frac{1}{4}p_2^2)$,

所以 $k_{ME'} = \frac{\frac{1}{4}p_2^2 - (\frac{p_1}{2}a - \frac{p_1^2}{4})}{p_2 - a} = \frac{p_2}{2}$, 即 $\frac{1}{4}p_2^2 - (\frac{p_1}{2}a - \frac{p_1^2}{4}) = \frac{p_2}{2}(p_2 - a)$

即 $\frac{p_1^2}{4} - \frac{p_2^2}{4} = \frac{p_1}{2}a - \frac{p_2}{2}a$, 所以 $\frac{p_1^2}{4} - \frac{p_2^2}{4} = (\frac{p_1}{2} + \frac{p_2}{2} - a)(\frac{p_1}{2} - \frac{p_2}{2}) = 0$, 所以 $p_2 = 2a - p_1$

因为 $0 < |a| < |p_1|$, 且 a, p_1 同号, 所以 $|p_2| = |2a - p_1| < |2p_1 - p_1| = |p_1|$

反之也成立, 所以 $M(a, b) \in X \Leftrightarrow |p_1| > |p_2|$,

由 (I) 可知, $M(a, b) \in X \Rightarrow \varphi(a, b) = \frac{|p_1|}{2}$, 反之, 逆推也成立, 所以 $M(a, b) \in X$

$$\Leftrightarrow \varphi(a,b) = \frac{|p_1|}{2},$$

$$\text{综上, } M(a,b) \in X \Leftrightarrow |p_1| > |p_2| \Leftrightarrow \varphi(a,b) = \frac{|p_1|}{2}.$$

(III) 此题即求当点 (p,q) 取遍 D 时, 方程 $x^2 - px + q = 0$ 的绝对值较大的根的最大值与最小值,

$$\text{解方程得 } x = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \text{ 因为 } D = \{(x,y) \mid y \leq x-1, y \geq \frac{1}{4}(x+1)^2 - \frac{5}{4}\},$$

$$\text{令 } x-1 = \frac{1}{4}(x+1)^2 - \frac{5}{4}, \text{ 解得 } x=0 \text{ 或 } x=2, \text{ 所以 } 0 \leq p \leq 2, \varphi(p,q) = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2},$$

$$\text{因为 } (p,q) \in D, \text{ 所以 } \frac{1}{4}(p+1)^2 - \frac{5}{4} \leq q \leq p-1, \text{ 于是 } (p+1)^2 - 5 \leq 4q \leq 4p-4,$$

$$\text{所以 } (p-2)^2 \leq p^2 - 4q \leq -2p+4, \text{ 所以 } \varphi(p,q) = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \in [1, \frac{p + \sqrt{-2p+4}}{2}],$$

$$\text{设 } f(p) = \frac{p + \sqrt{-2p+4}}{2} \quad (0 \leq p \leq 2), \text{ 令 } t = \sqrt{-2p+4}, \text{ 则 } p = \frac{4-t^2}{2} \quad (0 \leq t \leq 2),$$

$$\text{则 } f(p) = g(t) = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + 1 = -\frac{1}{4}(t-1)^2 + \frac{5}{4}, \text{ 所以 } f(p) \in [1, \frac{5}{4}].$$

$$\text{综上, 当 } p=2, q=1 \text{ 或 } p=0, q=-1 \text{ 时, } \varphi_{\min} = 1; \text{ 当 } p=\frac{3}{2}, q=\frac{5}{16} \text{ 时, } \varphi_{\max} = \frac{5}{4}.$$

$$\text{(III) 联立 } y = x-1, y = \frac{1}{4}(x+1)^2 - \frac{5}{4} \text{ 得交点 } (0,-1), (2,1), \text{ 可知 } 0 \leq p \leq 2,$$

$$\text{过点 } (p,q) \text{ 作抛物线 } L \text{ 的切线, 设切点为 } (x_0, \frac{1}{4}x_0^2), \text{ 则 } \frac{\frac{1}{4}x_0^2 - q}{x_0 - p} = \frac{1}{2}x_0,$$

$$\text{得 } x_0^2 - 2px_0 + 4q = 0, \text{ 解得 } x_0 = p + \sqrt{p^2 - 4q},$$

$$\text{又 } q \geq \frac{1}{4}(p+1)^2 - \frac{5}{4}, \text{ 即 } p^2 - 4q \leq 4 - 2p,$$

$$\therefore x_0 \leq p + \sqrt{4 - 2p}, \text{ 设 } \sqrt{4 - 2p} = t, \therefore x_0 \leq -\frac{1}{2}t^2 + t + 2 = -\frac{1}{2}(t-1)^2 + \frac{5}{2},$$

$$\therefore \varphi_{\max} = \left| \frac{x_0}{2} \right|_{\max}, \text{ 又 } x_0 \leq \frac{5}{2}, \therefore \varphi_{\max} = \frac{5}{4};$$

$$\therefore q \leq p-1, \therefore x_0 \geq p + \sqrt{p^2 - 4p + 4} = p + |p-2| = 2,$$

$$\therefore \varphi_{\min} = \left| \frac{x_0}{2} \right|_{\min} = 1.$$

解析二：

$$(1) k_{AB} = y'|_{x=p_0} = \left(\frac{1}{2}x\right)|_{x=p_0} = \frac{1}{2}p_0,$$

$$\text{直线} AB \text{的方程为 } y - \frac{1}{4}p_0^2 = \frac{1}{2}p_0(x - p_0), \text{ 即 } y = \frac{1}{2}p_0x - \frac{1}{4}p_0^2,$$

$$\therefore q = \frac{1}{2}p_0p - \frac{1}{4}p_0^2, \text{ 方程 } x^2 - px + q = 0 \text{ 的判别式 } \Delta = p^2 - 4q = (p - p_0)^2,$$

$$\text{两根 } x_{1,2} = \frac{p \pm |p_0 - p|}{2} = \frac{p_0}{2} \text{ 或 } p - \frac{p_0}{2},$$

$$\therefore p \cdot p_0 \geq 0, \therefore |p - \frac{p_0}{2}| = |p| - |\frac{p_0}{2}|, \text{ 又 } 0 \leq |p| \leq |p_0|,$$

$$\therefore -|\frac{p_0}{2}| \leq |p| - |\frac{p_0}{2}| \leq |\frac{p_0}{2}|, \text{ 得 } \therefore |p - \frac{p_0}{2}| = |p| - |\frac{p_0}{2}| \leq |\frac{p_0}{2}|,$$

$$\therefore \varphi(p, q) = |\frac{p_0}{2}|.$$

(2) 由 $a^2 - 4b > 0$ 知点 $M(a, b)$ 在抛物线 L 的下方，

① 当 $a > 0, b \geq 0$ 时，作图可知，若 $M(a, b) \in X$ ，则 $p_1 > p_2 \geq 0$ ，得 $|p_1| > |p_2|$ ；

若 $|p_1| > |p_2|$ ，显然有点 $M(a, b) \in X$ ； $\therefore M(a, b) \in X \Leftrightarrow |p_1| > |p_2|$ 。

② 当 $a > 0, b < 0$ 时，点 $M(a, b)$ 在第二象限，

作图可知，若 $M(a, b) \in X$ ，则 $p_1 > 0 > p_2$ ，且 $|p_1| > |p_2|$ ；

若 $|p_1| > |p_2|$ ，显然有点 $M(a, b) \in X$ ；

$$\therefore M(a, b) \in X \Leftrightarrow |p_1| > |p_2|.$$

根据曲线的对称性可知，当 $a < 0$ 时， $M(a, b) \in X \Leftrightarrow |p_1| > |p_2|$ ，

综上所述， $M(a, b) \in X \Leftrightarrow |p_1| > |p_2|$ (*)；

由 (1) 知点 M 在直线 EF 上，方程 $x^2 - ax + b = 0$ 的两根 $x_{1,2} = \frac{p_1}{2}$ 或 $a - \frac{p_1}{2}$ ，

同理点 M 在直线 $E'F'$ 上，方程 $x^2 - ax + b = 0$ 的两根 $x_{1,2} = \frac{p_2}{2}$ 或 $a - \frac{p_2}{2}$ ，

若 $\varphi(a, b) = |\frac{p_1}{2}|$ ，则 $|\frac{p_1}{2}|$ 不比 $|a - \frac{p_1}{2}|$ 、 $|\frac{p_2}{2}|$ 、 $|a - \frac{p_2}{2}|$ 小，

$\therefore |p_1| > |p_2|$ ，又 $|p_1| > |p_2| \Rightarrow M(a, b) \in X$ ，

$\therefore \varphi(a, b) = |\frac{p_1}{2}| \Rightarrow M(a, b) \in X$ ；又由 (1) 知， $M(a, b) \in X \Rightarrow \varphi(a, b) = |\frac{p_1}{2}|$ ；

$\therefore \varphi(a, b) = \frac{p_1}{2} \Leftrightarrow M(a, b) \in X$, 综合 (*) 式, 得证.

(3) 联立 $y = x - 1$, $y = \frac{1}{4}(x+1)^2 - \frac{5}{4}$ 得交点 $(0, -1), (2, 1)$, 可知 $0 \leq p \leq 2$,

过点 (p, q) 作抛物线 L 的切线, 设切点为 $(x_0, \frac{1}{4}x_0^2)$, 则 $\frac{\frac{1}{4}x_0^2 - q}{x_0 - p} = \frac{1}{2}x_0$,

得 $x_0^2 - 2px_0 + 4q = 0$, 解得 $x_0 = p + \sqrt{p^2 - 4q}$,

又 $q \geq \frac{1}{4}(p+1)^2 - \frac{5}{4}$, 即 $p^2 - 4q \leq 4 - 2p$,

$\therefore x_0 \leq p + \sqrt{4 - 2p}$, 设 $\sqrt{4 - 2p} = t$, $\therefore x_0 \leq -\frac{1}{2}t^2 + t + 2 = -\frac{1}{2}(t-1)^2 + \frac{5}{2}$,

$\therefore \varphi_{\max} = \left| \frac{x_0}{2} \right|_{\max}$, 又 $x_0 \leq \frac{5}{2}$, $\therefore \varphi_{\max} = \frac{5}{4}$;

$\therefore q \leq p - 1$, $\therefore x_0 \geq p + \sqrt{p^2 - 4p + 4} = p + |p - 2| = 2$,

$\therefore \varphi_{\min} = \left| \frac{x_0}{2} \right|_{\min} = 1$.